Calcul d'intersection dans l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre fixé et hiérarchies intégrables

Yohan Mandin–Hublé

2 octobre 2020

Table des matières

1 Introduction

L'objet central de la présente introduction au domaine de recherche est l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre fixé. Il s'agit de considérer les surfaces de Riemann en famille, dans une compactification qui possède un sens géométrique raisonnable permettant une certaine intuition, et qui notamment présente une dualité de Poincaré. L'anneau de cohomologie de cet espace reste encore mystérieux, mais des techniques de calcul d'intersection ont été progressivement développées au sein d'un sous-anneau, dit tautologique, formé de classes « naturelles », obtenues comme classes de Chern de certains fibrés. Des liens ont été peu à peu mis en évidence entre certaines familles d'intégrales de classes de cohomologie, regroupées sous forme de séries génératrices, et certaines équations aux dérivées partielles bien connues, notamment l'équation Korteweg-de Vries. La conjecture de Witten, démontrée par Kontsevitch, a ainsi ouvert la voie à quantité d'autres résultats et généralisations, dont la conjecture de Witten r-spin, récemment démontrée. Pour l'anecdote, et sans prétendre à une quelconque connaissance de la physique sous-jacente, il s'agissait d'une formulation précise de l'idée que la gravité (quantique en deux dimensions) devait être uniquement définie, et donc que les deux approches connues jusqu'alors devaient coïncider !

Pour revenir au sujet, la notion de théorie cohomologique des champs, comme famille de classes de cohomologie vérifiant certaines relations de compatibilité, a été dégagée et a commencée à être étudiée pour elle-même. Une construction, la hiérarchie de Dubrovin-Zhang, a permis de lui associer un système infini de hamiltoniens dont les flots commutent, également appelé système intégrable, qui s'est révélé être un cadre adéquat pour formuler et résoudre des problèmes du même type que la conjecture initiale de Witten. Enfin, des théories cohomologiques des champs ont été construites à partir d'autres domaines des mathématiques, comme la théorie de Gromov-Witten, approche qui s'est révélée fructueuse.

Récemment, une nouvelle construction a été proposée par Buryak, associant à une théorie cohomologique des champs une autre hiérarchie intégrable aux propriétés remarquables. Cette construction se base sur une classe d'homologie particulière dans l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre fixé, à savoir le cycle de double ramification.

2 Espace de modules des surfaces de Riemann de genre fixé

Dans cette section, nous décrivons successivement les points, la structure géométrique et un sous-anneau important de l'anneau de cohomologie de notre espace.

2.1 Courbes nodales

Définition 2.1. On appelle *courbe nodale* une variété complexe analytique compacte connexe irréductible de dimension 1 dont les seules singularités éventuelles sont des noeuds. Localement, au voisinage d'un noeud, la courbe s'écrit $xy = 0$ avec $x, y \in \mathbb{C}$.

On peut représenter schématiquement une telle courbe nodale comme un certains nombre de tores à trous (les composantes) collés entre eux à certains points (les noeuds), en gardant à l'esprit que l'intersection entre les composantes est en réalité transverse.

On considère nos courbes nodales avec la donnée supplémentaire d'un certain nombre de points marqués dessus. Notamment, et ce qui suit rendra cela un peu plus clair, on n'admet que les courbes présentant un groupe d'automorphismes fini. Pour voir que ce n'est pas trop contraignant, rappelons le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre supérieur ou égal à 2. Alors le groupe d'automorphismes de X est fini.*

On appelle composante non stable d'une courbe nodale une composante de genre 0 avec deux points marqués ou moins ou une composante de genre 1 sans point marqués, les éventuels noeuds comptant comme des points marqués. Enfin, pour décrire certains morphismes entre nos espaces de module de surfaces de Riemann avec points marqués, on aura besoin de la notion suivante de stabilisation d'une courbe.

Définition 2.2. La *stabilisation* d'une courbe nodale avec n points marqués est définie comme le résultat de la contraction des composantes non stables. Une composante non stable comportant exactement un noeud contient au plus un point marqué, et l'image de ce point marqué dans la nouvelle courbe est le noeud. Une composante non stable comportant deux noeuds ou plus ne contient pas de points marqués.

On considère dès lors l'espace dont les points sont les $(C, x_1, ..., x_n)$ où C est une courbe nodale de genre g fixé et les x_i des points marqués sur C, à biholomorphisme préservant les points marqués près. On veut calculer dans cet espace, et pour cela le munir d'une structure géométrique adéquate.

2.2 Une structure sur notre espace

Définition 2.3. Soit X un espace topologique. Une *carte orbifold* sur un ouvert U de X est un homéomorphisme $\phi : U \to V/G$, où V est un ouvert de $\mathbb{C}^k$ et G un groupe fini qui agit dessus.

Une *sous- carte* sur $U' \subset U$ est la donnée d'une application $\phi' : U' \to V'/G'$, d'un morphisme de groupes $h : G' \to G$ et d'un plongement holomorphe $F : V' \to V$ tels que F respecte les actions de G' et de G modulo h, F commute à ϕ et ϕ' et le stabilisateur de tout point x de U' pour l'action de G' est isomorphe au stabilisateur de $F(x)$ pour l'action de G.

Un *atlas orbifold* sur X est la donnée de cartes deux à deux compatibles qui recouvrent X, deux cartes étant compatibles si elles possèdent une sous-carte commune autour de chaque point de leur intersection.

Un *orbifold complexe lisse* est la donnée d'un espace topologique X et d'un atlas orbifold maximal sur X. L'orbifold est dit compact si l'espace sous-jacent l'est.

Définition 2.4. On définit les groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'un orbifold comme les groupes de d'homologie et de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de son espace topologique sous-jacent.

Théorème 2.2. *Pour les orbifolds complexes lisses compacts connexes orientés, on a une dualité de Poincaré entre l'homologie et la cohomologie à coefficients dans* $\mathbb{Q}$.

Précisons ce qu'on entend par dualité de Poincaré pour le lecteur ou la lectrice à qui ce terme ne serait pas familier : les groupes d'homologie et de cohomologie sont tous nuls au-delà de la dimension m de l'orbifold (comme avec une variété de dimension finie), et il existe une classe fondamentale dans le dernier groupe d'homologie qui donne, par intégration partielle sur un $\alpha \in H^{m-k}(X, \mathbb{Q})$ un élément de $H^k(X, \mathbb{Q})$, et donc une forme linéaire sur $H_k(X, \mathbb{Q})$. La dualité de Poincaré est l'affirmation que cet accouplement entre les $H^{m-k}(X, \mathbb{Q})$ et les $H_k(X, \mathbb{Q})$ est non dégénérée. Autrement dit, dans notre orbifold $\overline{M_{g,n}}$, on peut mener les calculs cohomologiques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ "comme dans une variété".

Pour un traitement efficace des orbifolds et de leurs invariants cohomologiques du point de vue des groupoïdes, on pourra consulter [1].

Notons $M_{g,n}$ l'espace des surfaces de Riemann lisses de genre g à n points marqués. Le théorème suivant donne une structure sur $M_{g,n}$ ainsi qu'une compactification dont le sens géométrique est parlant.

Théorème 2.3. *Il existe un orbifold complexe lisse compact de dimension $3g-3+n$ noté $\overline{M_{g,n}}$, un orbifold complexe lisse compact de dimension $3g-2+n$ noté $\overline{C_{g,n}}$ et une application $p : \overline{C_{g,n}} \to \overline{M_{g,n}}$ tels que :*

1. *$M_{g,n} \subset \overline{M_{g,n}}$ est un sous-orbifold ouvert et dense, et $C_{g,n} \subset \overline{C_{g,n}}$ est sa pré-image par p*
2. *les fibres de p sont des courbes stables de genre g avec n points marqués*
3. *chaque courbe stable est isomorphe à exactement une fibre*
4. *le stabilisateur d'un point $t \in \overline{M_{g,n}}$ est isomorphe au groupe d'automorphismes de la courbe stable correspondante C_t.*

Exemple 2.1. Une sphère avec deux points marqués ou moins n'est pas stable. Une sphère avec trois points marqués est stable, et n'admet que l'identité comme automorphisme. En effet, le groupe d'automorphismes de $P^1(\mathbb{C})$ est :

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0.$$

Fixons une sphère avec trois points, $0, 1, \infty$. Une fois fixée la valeur de ces trois points par un automorphisme, on ne peut plus fixer la valeur d'un quatrième. On en déduit que $M_{0,4}$ est une sphère privée de trois points, c'est une variété lisse. On a donc envie de dire que la compactification de cet espace est la sphère. Quel sens géométrique donner aux points limites ? Ce sont les trois courbes nodales formées de deux sphères jointes par un noeud, avec deux points sur l'une et deux points sur l'autre, courbes nodales qui sont bien stables. Comment construire la courbe universelle correspondante ? On considère $P^1 \times P^1$ et les sections $s_0, s_1, s_\infty : x \to (x, 0), (x, 1), (x, \infty)$, ainsi que la section $s : t \to (t, t)$. On éclate aux points d'intersection entre la diagonale et les sections s_0, s_1, s_∞, et on obtient une famille $X \to P^1(\mathbb{C})$, avec quatre sections disjointes (puisque, par exemple, $s_0(0) = [0, 1]$ et $s(0) = [1, 1]$ dans le diviseur exceptionnel).

2.3 Classes caractéristiques et sous-anneau tautologique

2.3.1 Classes caractéristiques, le point de vue axiomatique

Pour tout ce paragraphe, X est une variété différentielle compacte connexe orientée réelle lisse de dimension finie. L'étude de l'anneau de cohomologie de X est un problème intéressant, et une première étape vers une compréhension plus fine de X. On peut chercher alors à construire des éléments de cet anneau de cohomologie non pas à partir de la définition, qui n'y est pas très adaptée, mais à partir de certaines structures X, ici les fibrés vectoriels complexes. A chaque opération sur les fibrés vectoriels (somme directe, produit tensoriel, tiré-en-arrière...), on demande que corresponde une opération sur les classes de cohomologie associées. Ceci constitue un point de vue, axiomatique, sur les classes caractéristiques, dont on peut montrer qu'elles répresentent également des obstructions à étendre certaines sections de ces fibrés vectoriels.

Théorème 2.4. *A tout $E \to X$ fibré vectoriel complexe sur X et tout $i \geq 0$, on peut associer un $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, et la collection de ces classes vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$c_0(E) = 1$, et si E est de rang k, alors $c_i(E) = 0$ pour $i \geq k$*
2. *si $f : X' \to X$, alors $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$*
3. *$c(E \oplus E') = c(E)c(E')$ où $c = \sum_i c_i$ est la classe totale de Chern*
4. *pour $\gamma \to \mathbb{C}P^1$ le fibré tautologique sur $\mathbb{C}P^1$, on a $c_1(\gamma) = -1$, au sens où $\langle c_1(\gamma), [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1$.*

2.3.2 Quelques classes de cohomologie dans $\overline{M_{g,n}}$

Bien que $\overline{M_{g,n}}$ ne soit pas une variété lisse mais un orbifold, la même stratégie peut s'appliquer, et l'on peut définir les classes caractéristiques de fibrés vectoriels orbifolds. Contrairement au cadre précédent, elles seront des éléments des groupes de cohomologie à coefficients rationnels (et non plus entiers). On définit donc quelques fibrés au-dessus de $\overline{C_{g,n}}$ et de $\overline{M_{g,n}}$, et quelques diviseurs dans $\overline{M_{g,n}}$.

Définition 2.5. Un *fibré vectoriel sur un orbifold* est la donnée, sur un voisinage U/G d'un point p de l'orbifold, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et G un groupe fini agissant sur U, d'un fibré vectoriel V sur U et d'une action de G sur l'espace total du fibré qui commute à la projection et qui soit linéaire dans les fibres.

1. L le *fibré cotangent relatif* au-dessus de $p : \overline{C_{g,n}} \to \overline{M_{g,n}}$, c'est-à-dire le fibré dont la fibre en un point x de $\overline{C_{g,n}}$ est le fibré cotangent à $p^{-1}(p(x))$ en x, où le fibré cotangent à une courbe nodale est défini comme le fibré cotangent sur le produit des composantes avec une certaine condition de recollement au noeud (voir la remarque ci-dessous)
2. le fibré L_i, tiré-arrière de L par la section σ_i qui donne le i-ième point marqué, et sa première classe de Chern $\psi_i = c_1(L_i)$
3. le *fibré de Hodge*, noté E, qui est de rang g, dont on note λ_i la i-ième classe de Chern, et dont la fibre en un point est l'espace des formes différentielles holomorphes sur la courbe correspondant au point, autrement dit le poussé-en-avant du fibré dualisant relatif sur la courbe universelle,
4. le diviseur δ_h^P dont un point générique est une courbe lisse de genre h contenant les points P attachés à une courbe lisse de genre $g - h$, qui est donc dans $\overline{M_{g,n}} - M_{g,n}$
5. le diviseur δ_{irr} dont un point générique est une courbe lisse de genre $g - 1$ dont on a attaché deux points.

Remarque 2.1. Notons que la notion de forme différentielle holomorphe sur une courbe nodale n'est pas vraiment claire. On entend par là la donnée d'une forme différentielle holomorphe sur chaque composante, sauf éventuellement aux noeuds où elle est autorisée à prendre des pôles au plus simples, de résidu opposé de part et d'autre du noeud. Cette description particulièrement simple de la fibre du fibré de Hodge permet de nombreux raisonnements.

2.4 Morphismes entre les $\overline{M_{g,n}}$ et sous-anneau tautologique

Définition 2.6. On appelle *morphisme d'oubli* l'application $p : \overline{M_{g,n+1}} \to \overline{M_{g,n}}$ qui a une courbe $(C, x_1, ..., x_{n+1})$ associe la stabilisation de la courbe $(C, x_1, ..., x_n)$.

Définition 2.7. On appelle *morphisme d'attachement de type séparant* l'application $p : \overline{M_{g_1,n+1}} \times \overline{M_{g_2,m+1}} \to \overline{M_{g_1+g_2,n+m}}$ qui prend deux courbes $(C_1, x_1, ..., x_n, q_1)$ et $(C_2, y_1, ..., y_m, q_2)$ et les attache en q_1 et q_2 (création d'un noeud séparant). On dispose également d'un *morphisme d'attachement de type non séparant* $p : \overline{M_{g-1,n+2}} \to \overline{M_{g,n}}$, obtenu en attachant les deux derniers points marqués d'une courbe de genre $g - 1$ (création d'un noeud non séparant).

Lemme 2.1. *La courbe universelle* $\overline{C_{g,n}} \to \overline{M_{g,n}}$ *s'identifie au morphisme d'oubli* $\overline{M_{g,n+1}} \to \overline{M_{g,n}}$.

Ces divers morphismes permettent de tirer en arrière ou de pousser en avant les classes définies plus haut sur chaque $\overline{M_{g,n}}$. Cette observation conduit à la définition du sous-anneau tautologique de $H^*(\overline{M_{g,n}}, \mathbb{Q})$ comme le plus petit sous-anneau stable par tiré-en-arrière et poussé-en-avant par ces divers morphismes (rappelons que ces opérations ne commutent pas). Il s'agit, informellement, du sous-anneau composé de toutes les classes qu'on peut facilement obtenir (d'où leur nom de tautologique). Il s'avère que ce sous-anneau est strict en général.

2.5 Calcul d'intersection

Dans la quatrième section de cette introduction au domaine de recherche, nous définirons des équations aux dérivées partielles dont les coefficients seront des intégrales de classes tautologiques. On dispose d'un algorithme pour le calcul d'intersection dans le sous-anneau tautologique, dont nous choisissons de présenter ici l'une des briques (faciles) de base : l'équation des cordes et du dilaton. Pour une description presque complète de l'algorithme, on réfère aux notes de Dimitri Zvonkine ([12]).

Lemme 2.2. *On a :*

$$\psi_i = p^*(\psi_i) + \delta_0^{i,n+1}.$$

Démonstration. Notons L_i le fibré sur $\overline{M_{g,n+1}}$ et L'_i sur $\overline{M_{g,n}}$. On a :

$$L_i = p^*(L'_i)(\delta_0^{i,n+1}).$$

On peut le voir dans la description d'un fibré en droites par ses fonctions de transition. Sur un ouvert $U \in \overline{M_{g,n+1}}$ qui ne rencontre pas $\delta_0^{i,n+1}$, les fibrés L_i et $p^*(L'_i)$ sont identifiés. Une section holomorphe de L_i sur cet ouvert U s'étend naturellement par zéro sur $\delta_0^{i,n+1}$. En effet, une 1-forme holomorphe sur une courbe appartenant à $\delta_0^{i,n+1}$ est nulle sur la composante de genre 0, et une section holomorphe de L_i n'est autre que la restriction au i-ième point d'une 1-forme holomorphe sur chaque courbe. □

Proposition 2.1. L'*équation des cordes* est la relation suivante :

$$\int_{\overline{M_{g,n+1}}} \psi_1^{d_1} ... \psi_n^{d_n} = \sum_i \int_{\overline{M_{g,n}}} \psi_1^{d_1} ... \psi_i^{d_i - 1} ... \psi_n^{d_n}.$$

On a également l'*équation du dilaton* :

$$\int_{\overline{M_{g,n+1}}} \psi_1^{d_1} ... \psi_n^{d_n} \psi_{n+1} = (2g - 2 + n) \int_{\overline{M_{g,n}}} \psi_1^{d_1} ...... \psi_n^{d_n}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on rappelle que :

$$\psi_i = p^*(\psi_i) + \delta_0^{i,n+1}.$$

On en déduit une formule pour les $\psi_i^{d_i}$. En substituant dans l'intégrale, et en se souvenant qu'entre deux espaces de dimension différente, l'intégrale d'un tiré-en-arrière est nulle, on obtient l'égalité :

$$\int_{\overline{M_{g,n+1}}} \psi_1^{d_1} ... \psi_n^{d_n} = \sum_i \int_{\overline{M_{g,n+1}}} p^*(\psi_1^{d_1} ... \psi_i^{d_i - 1} ... \psi_n^{d_n}) \delta_0^{i,n+1} = \sum_i \int_{\overline{M_{g,n}}} \psi_1^{d_1} ... \psi_i^{d_i - 1} ... \psi_n^{d_n} p_*(\delta_0^{i,n+1}).$$

Or $\delta_0^{i,n+1}$ est isormorphe via p à $\overline{M_{g,n}}$, d'où le résultat. Pour l'équation du dilaton, on procède de manière analogue. □

3 Théories cohomologiques des champs

3.1 Définition, premiers exemples

Définition 3.1. Soir V un espace vectoriel de dimension n, doté d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et d'un élément privilégié noté 1.. On appelle *théorie cohomologie des champs* (CohFT en anglais) une collection de morphismes $c_{g,n} : V^{\otimes n} \to H^*_{paire}(\overline{M_{g,n}})$ pour tout couple stable (g, n) avec certaines conditions de compatibilité :

1. $c_{g,n}$ commute aux actions de S_n définies sur $V^{\otimes n}$ par permutation des facteurs et sur $\overline{M_{g,n}}$ par permutation des points marqués
2. on a : $\forall a, b \in V c_{0,3}(1 \otimes a \otimes b) = (a, b)$ (rappellons que $\overline{M_{0,3}}$ est un point)
3. si $p : \overline{M_{g,n+1}} \to \overline{M_{g,n}}$ est le morphisme d'oubli, alors $p^*(c_{g,n}(v_1 \otimes ... \otimes v_n)) = 1 \otimes v_1 \otimes ... \otimes v_n$
4. prenons une base e_i de V avec $e_1 = 1$ et notons $\eta_{ij} = (e_i, e_j)$, alors en notant le morphisme d'attachement $u : \overline{M_{g_1,n_1+1}} \times \overline{M_{g_2,n_2+1}} \to \overline{M_{g_1+g_2,n_1+n_2}}$ on a :
$$u^*(c_{g_1+g_2,n_1+n_2})(e_{a_1}\otimes...\otimes e_{a_n}) = \sum_{i,j} c_{g_1,n_1+1}(e_{a_1}\otimes...\otimes e_{a_{n_1}}\otimes e_i)c_{g_2,n_1+1}(e_{a_{n_1+1}}\otimes...\otimes e_{a_{n_1+n_2}}\otimes e_j)\eta^{ij}$$
5. si l'on considère l'autre morphisme d'attachement $v : \overline{M_{g-1,n+2}} \to \overline{M_{g,n}}$ on a :
$$v^*(c_{g,n})(a_1 \otimes ... \otimes a_n) = \sum_{i,j} c_{g-1,n+2}(a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes e_i \otimes e_j)\eta^{ij}.$$

Proposition 3.1. Considérons V de dimension 1 et e une base de V telle que $(e, e) = 1$. Alors on définit
$$c_{g,n}(e \otimes ... \otimes e) = 1 + \epsilon\lambda_1 + ... + \epsilon^g \lambda_g.$$
C'est une théorie cohomologique des champs.

Définition 3.2. Le *potentiel d'une théorie cohomologique des champs* est défini comme la fonction génératrice des intersections de la théorie avec les classes ψ_i :
$$F(t^*_*; \epsilon) = \sum_{g\geq 0} \epsilon^{2g} \sum_{n,2g-2+n>0} \frac{1}{n!} \sum_{d_1,...,d_n\geq 0} \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n} \left(\int_{\overline{M_{g,n}}} c_{g,n}(e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_n}) \prod \psi_i^{d_i} \right) \prod t^{\alpha_i}_{d_i}.$$

Pour la théorie cohomologique des champs triviale, on obtient la fonction génératrice des intersections des ψ_i, objet de la célèbre conjecture de Witten.

Proposition 3.2. Identifions e_1 à 1. Le potentiel F vérifie l'équation suivante :
$$\frac{\partial F}{\partial t^1_0} = \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq N \\ p\geq 0}} t^\alpha_{p+1} \frac{\partial F}{\partial t^\alpha_p} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha,\beta} t^\alpha_0 t^\beta_0 + \epsilon \int_{\overline{M_{1,1}}} c_{1,1}(e_1).$$

Démonstration. Essentiellement, $c_{g,n}(e_1 \otimes e_{\alpha_2} ... \otimes e_{\alpha_n}) = \pi^* c_{g,n-1}(e_{\alpha_2} \otimes ... \otimes e_{\alpha_n})$, et un raisonnement similaire à celui mené pour l'équation des cordes dans $\overline{M_{g,n}}$ conduit au résultat. Il faut bien entendu être soigneux sur les cas limites. □

3.2 Construire des théories cohomologiques des champs

Construire des théories cohomologiques des champs non élémentaires est une chose difficile. Pour mon mémoire, je me suis intéressé à un papier assez informel et fondateur de Witten ([11]), qui donne une bonne idée de la construction de la théorie r-spin, au moins en genre 0 (c'est-à-dire des applications $c_{g,n}$ pour $g = 0$).

L'idée est d'introduire un espace de modules des structures r-spin des surfaces de Riemann de genre g à n points marqués, qui consiste pour chaque point représentant une surface *lisse* en la donnée d'une racine r-ième de son fibré cotangent holomorphe. Ici se présente déjà une première difficulté : la construction d'un tel espace et d'une compactification raisonnable. Pour un tel espace, on aurait au-dessus de sa courbe universelle un faisceau recollant les données de toutes ces racines r-ième de fibrés cotangent. Une seconde difficulté apparaît : on ne peut pas en obtenir directement un fibré sur l'espace de modules des structures r-spin, sauf dans le cas $g = 0$. Dans ce cas, on prend la classe de Chern de plus haut degré de ce nouveau fibré, et on la pousse en avant par le morphisme d'oubli de la structure r-spin, ce qui donne une classe de cohomologie dans $\overline{M_{g,n}}$. Ce raisonnement, on le voit, présente des difficultés majeures qui sont des questions à part entière de géométrie algébrique.

Pour se faire une idée des différents domaines des mathématiques à partir desquels on peut construire des théories cohomologiques des champs, on pourra lire l'habilitation à diriger des recherches de Paolo Rossi ([8]). Pour le cas particulier de la théorie de Gromow-Witten, voir [10].

4 Hiérarchies intégrables

4.1 Définition

Cette sous-section est probablement la plus technique à lire de cette introduction. Néanmoins, elle présente (succintement) un formalisme utile à la compréhension de la suite.

Notations 4.1. Soient u_j^α, $j \geq 0$, $1 \leq \alpha \leq N$ des variables. On considère l'anneau A_N des polynômes en les $u_j^\alpha, j \geq 1$ dont les coefficients sont des séries formelles en les u_0^α, c'est-à-dire l'anneau des expressions suivantes :

$$f(u; u_x, u_{xx}, ...) = \sum_{m \geq 0} \sum_{1 \leq \alpha_1, ..., \alpha_m \leq N, j_1, ..., j_m \geq} f_{\alpha_1, ..., \alpha_m}^{j_1, ..., j_m}(u) u_{j_1}^{\alpha_1} ... u_{j_m}^{\alpha_m},$$

où l'on a renommé, pour l'intuition, $u = u_0^\alpha$, $u_x = u_1^\alpha$ et ainsi de suite. Il s'agit d'un anneau gradué, avec $deg(u_k^\alpha) = k$ et $deg(f(u)) = 0$. Il est muni d'un opérateur de dérivation "par rapport à x" :

$$\partial_x = \sum_{1 \leq \alpha \leq N} \sum_{s \geq 0} u_{s+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_s^\alpha}.$$

Maintenant que nous avons des polynômes différentielles en u (les éléments de A_N), nous pouvons définir des fonctionnelles.

Définition 4.1. Les fonctionnelles sont les élements de $\Lambda_N = A_N / Im(\delta_x)$. On note la fonctionnelle image de $h \in A_N$ par la projection $\pi : A_N \to \Lambda_N$:

$$\pi(h) = \int h dx = \overline{h}$$

On peut définir la dérivée variationnelle d'une fonctionnelle, c'est un polynôme dans A_N :

$$\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\alpha} = \sum_i (-\partial_x)^i \frac{\partial h}{\partial u_i^\alpha}.$$

Définition 4.2. Un *structure de Poisson* sur λ_N est la donnée d'un crochet de Poisson, c'est-à-dire d'une opération $\{.,.\} : \Lambda_N \times \Lambda_N \to \Lambda_N$ bilinéaire, antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi. Par définition, si $K = (K^{a,b})$ où $K^{a,b} = \sum_{j \geq 0} f_j^{a,b} \partial_x^j$, où chaque $f_j^{a,b}$ est un polynôme différentiel, alors K est dit hamiltonien s'il induit une structure de Poisson sur Λ_N par la formule :

$$\{\overline{g}, \overline{h}\}_K = \int \sum_{a,b} \frac{\delta \overline{g}}{\delta u^a} K^{a,b} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^b} dx.$$

Remarque 4.1. Pour bien comprendre ce que l'on fait, voici un résumé extrêmement bref et informel de la théorie des systèmes intégrables en dimension finie. On considère une variété lisse V de dimension $2n$ munie d'une 2-forme non dégénérée w et une fonction H lisse à valeurs réelles définie sur V appelée hamiltoniene. On peut associer à H via w un champ de vecteurs X_H tel que que dH soit la contraction de w par X_H. On peut considérer la structure de Poisson (ou de Lie) sur l'algèbre des fonctioncs C^∞ sur V : $\{f, g\} = w(X_f, X_g)$, et le sous-espace vectoriel W de cette algèbre donné par les f telles que $\{f, H\} = 0$. On parle d'intégrabilité lorsque l'on peut trouver suffisamment d'éléments indépendants de W, dont les flots associés commutent donc. Ces flots sont contraints à rester dans les lignes de niveau définies par les différents hamiltoniens compatibles qu'on a pu trouver.
Dans notre cas, en dimension infinie, on va pouvoir associer à chaque hamiltonien une variable t_p^α et considérer des solutions qui seront des séries formelles en ces variables.

Définition 4.3. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles : $\frac{\partial u^a}{\partial \tau_i} = f_i^a(u; u_x, u_{xx}...), i \geq i, 1 \leq a \leq N$, où les f_i^a sont des polynômes différentiels. Un tel système sera dit hamiltonien s'il existe une structure de Poisson sur Λ_N dans laquelle ces équations se réécrivent comme des flots de hamiltoniens qui commutent. Précisément, on demande qu'il existe un opérateur hamiltonien K et des fonctionnelles $\overline{h_i}$ tels que :

$$f_i^a = \sum K^{a,b} \frac{\delta \overline{h_i}}{\delta u^b},$$

$$\{\overline{h_i}, \overline{h_j}\}_K = 0.$$

Enfin, on va décrire une reformulation particulièrement utile de ce cadre, qui correspond intuitivement à une transformation de Fourier formelle.

Définition 4.4. On considère cette fois des variables formelles p_n^a pour $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq a \leq N$. Soit B_N la sous-algèbre des séries formelles en ces variables donnée par les expressions :

$$f = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{1 \leq a_1,...,a_k \leq N \\ n_1,...,n_k \neq 0 \\ n_1+...+n_k=0}} f_{a_1,...,a_k}^{n_1,...,n_k} p_{n_1}^{a_1} ... p_{n_k}^{a_k}.$$

Pour une matrice symétrique η on considère la structure de Poisson sur B_N donnée par :

$$\{p_n^a, p_m^b\} = imn\eta^{ab}\delta_{m+n,0}.$$

(C'est-à-dire que l'on étend cette formule par bilinéarité et par la règle de Leibnitz :

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b.)$$

Exemple 4.1.

$$\{\{p_n^a, p_m^b\}, p_l^c\} = -mnl\eta^{ab}\eta^{0c}$$

Décrivons la relation entre Λ_N et B_N. Prenons donc un polynôme différentiel $f \in A_N$, et opérons le changement de variable formel $u_k^a = \sum_{n \neq 0}(in)^k p_n^a \,\mathrm{e}^{inx}$. Ecrivons ensuite f sous la forme $\sum_{m \in \mathbb{Z}} P_m \,\mathrm{e}^{imx}$, et notons $T_0(f) = P_0$. Alors T_0 est nulle sur l'image de ∂_x (car un polynôme différentiel dans l'image de δ_x n'a pas de terme qui soit un produit des u^a), et donc T_0 est définie sur Λ_N.

L'application T_0 est plus particulièrement à valeurs dans la sous-algèbre de B_N^{pol} de B_N formée des expressions de la forme :

$$f = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{1 \leq a_1,...,a_k \leq N \\ n_1,...,n_k \neq 0 \\ n_1+...+n_k=0}} P_{a_1,...,a_k}(n_1, ..., n_k) p_{n_1}^{a_1} ... p_{n_k}^{a_k},$$

où les $P_{a_1,...,a_k}$. Elle y est surjective, de noyau engendré par les fonctionnelles $\int u^a dx$. Autrement dit, pour tout $f \in B_N^{pol}$, il existe une unique fonctionnelle locale $\int h dx$ telle que $T_0(h) = f$ et $\frac{\partial h}{\partial u^a}|_{u_*^*=0} = 0$, on note $h = Q(f)$.

Enfin, on peut ajouter une structure supplémentaire à ces objets. Prenons un ϵ de degré -2, et tensorisons nos espaces A_N et Λ_N par $\mathbb{C}[[\epsilon]]$. On peut alors considérer les sous-espaces de degré total k, notés respectivement $A_N^{[k]}$ et $\Lambda_N^{[k]}$. On demande aux opérateurs hamiltoniens K d'être de degré total 1, de sorte que $\{.,.\}_K : \Lambda_N^{[k]} \times \Lambda_N^{[l]} \to \Lambda_N^{[k+l+1]}$.

4.2 Hiérarchie DR

4.2.1 Cycle de double ramification et formule de Hain

Définition 4.5. Soit $d_1, ..., d_n$ des entiers de somme nulle. On appelle *cycle de double ramification* associé aux d_i et on note $DR(d_1, ..., d_n)$ le lieu, dans $\overline{M_{g,n}}$ des courbes C telles que $\mathcal{O}_C(\sum d_i x_i)$ soit trivial.

La question du calcul de $DR(d_1, ..., d_n)$ en fonction de classes caractéristiques a été posée par Eliashberg. Une réponse partielle fut apportée par Hain, dans un article de 2003 ([6]), qui a donné une formule valable sur $M_{g,n}^{ct}$, le sous-espace des courbes nodales sans noeud non séparant.

Théorème 4.1. *Sur $M_{g,n}^{ct}$, on a :*

$$DR(d_1, ..., d_n) = \frac{1}{g!}(0 \cdot \lambda_1 + \frac{1}{2}\sum_i d_i^2 \psi_i - \frac{1}{2}\sum_{P \subseteq I} d_P^2 \delta_0^P - \frac{1}{2}\sum_{h>0, P \subseteq I} d_P^2 \delta_h^P)^g \tag{1}$$

Présentons les grandes idées de la preuve récente de cette formule par Zakharov et Gruchevsky dans un papier de 2014 ([5]).

La première simplification du problème s'opère en introduisant la jacobienne universelle au-dessus de $M_{g,n}^{ct}$: la fibre en chaque $[C, x_1, ..., x_n]$ est la jacobienne de C, c'est-à-dire l'espace des fibrés en droites holomorphes sur C de degré 0 sur chaque composante de C (rappelons que C est une courbe nodale). On construit une section $s_{d_1,...,d_n}$ à valeurs dans dans la jacobienne telle que $s_{d_1,...,d_n}([C, x_1, ..., x_n]) = \mathcal{O}_C(\sum_i d_i x_i)$. Le lieu $DR(d_1, ..., d_n)$ s'interprête alors comme le tiré-en-arrière par $s_{d_1,...,d_n}$ de la section nulle de la jacobienne universelle.

La deuxième idée est de remplacer la classe d'homologie de l'image de cette section nulle par une certaine puissance d'un certain diviseur de la jacobienne universelle, appelé diviseur thêta, noté T, qui possède d'intéressantes propriétés géométriques, notamment vis à vis d'un plongement d'Abel d'une courbe dans sa jacobienne. On calcule donc $s^*_{d_1,...,d_n}(T)$.

Enfin, la troisième idée est la suivante : on connaît une base de $H^2(\overline{M_{g,n}}, \mathbb{Q})$, on veut exprimer un élément dans cette base, donc on trouve une famille de courbes-test dont les intersections avec les éléments de cette base soient particulièrement simples et dont les intersections avec $s^*_{d_1,...,d_n}(T)$ soient calculables grâce aux propriétés du diviseur T.

4.2.2 Hiérarchie DR

Pour tout $1 \leq a \leq N$ et $d \geq 0$ on définit les hamiltoniens suivants :

$$g_{\alpha,d} = \sum_{g\geq 0}\sum_{n\geq 2}\frac{\epsilon^g}{n!}\sum_{\substack{a_1,...,a_n\neq 0\\ a_1+...+a_n=0\\ 1\leq\alpha_1,...,\alpha_n\leq N}}\left(\int_{DR_g(0,a_1,...,a_n)}\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes e_{\alpha_1}\otimes ...\otimes e_{\alpha_n})\right)\prod p_{a_i}^{\alpha_i}.$$

On peut appliquer la formule de Hain, car l'intégrale contre λ_g permet de se restreindre au lieu des courbes de type compact, grâce au lemme suivant.

Lemme 4.1. *La restriction de λ_g au lieu des courbes de type non-compact est nulle.*

Démonstration. Sur le lieu des courbes de type non-compact (le diviseur δ_{irr}) et en considérant le morphisme d'attachement $\overline{M_{g-1,n+2}} \to \overline{M_{g,n}}$, on a une l'application résidu au noeud non-séparant qui donne une suite exacte $0 \to E_{g-1} \to E_g \to \mathbb{C} \to 0$, d'où le résultat par multplicativité de la classe de Chern totale. □

La formule de Hain montre que ces expressions sont donc bien de type polynomial de degré $2g$. Autrement dit, on peut définir les fonctionnelles $\overline{g_{\alpha,d}} = Q(g_{\alpha,d}) \in \Lambda_N^0$.

On se place dans la structure de Poisson donnée par $K = \eta\partial_x$. On a le résultat suivant, essentiel, pour lequel on réfère à [2] ainsi qu'à [3].

Théorème 4.2. *La hiérarchie construite est bien intégrable, c'est-à-dire :*

$$\{g_{\alpha,p}, g_{\beta,q}\}_{\eta\partial_x} = 0.$$

Signalons que la hiérarchie DR est une construction récente, due à Buryak [2], [4]. Dans la partie suivante, nous rattachons cette construction au contexte mathématique qui l'a précédée.

5 Quelques résultats et directions de recherche

Pour cette section, les résultats et discussions présentées seront informelles et peu précises. La raison en est qu'une description approfondie de certains objets (hiérarchies KP, KdV, r-KdV, construction de Dubrovin-Zhang) serait nécessaire, mais que la place manque.

5.1 Un mot sur KP et KdV

La hiérarchie KP est un certain système infini d'équations aux dérivées partielles, pour lequel on dispose d'une belle et utile correspondance : les exponentielles de solutions formelles, appelés tau-fonction, correspondent à des points dans la grassmanienne infinie d'un certain espace de Hilbert.

Cette correspondance permet de déterminer des solutions combinatoires de KP, une approche qui permet de prouver que la série génératrice des nombres de Hurwitz, qui comptent les revêtements ramifiés d'une surface de Riemann avec un profil donné de ramification, satisfait les équations KP. Cette approche est décrite et utilisée dans plusieurs articles de Maxim Kazarian, par exemple [7]. .

On peut également, toujours au moyen de cette correspondance, vue sous un angle plus analytique que combinatoire, exprimer des solutions réelles de KP, qui correspondent à des propagations de solitons. On peut trouver cela, et bien d'autres choses, dans un célèbre article de Segal et Wilson ([9]), notamment une construction de Krichever donnant une interprétation du flot associé à la hiérarchie KP.

La hiérarchie KdV est une sous-hiérarchie de la hiérarchie KP, elle ne garde qu'une partie du système d'équations différentielles. Cette condition peut se traduire par la correspondance mentionnée plus haut en une condition sur les points de la grassmanienne infinie correspondant à des tau-fonction pour KdV. KdV est connu depuis longtemps dans le domaine des équations aux dérivées partielles comme l'équation modélisant la propagation d'un soliton.

5.2 Un mot sur la construction de Dubrovin-Zhang et l'équivalence DZ-DR

La construction de Dubrovin-Zhang est similaire à la hiérarchie DR mentionnée plus haut en ce qu'elle associe à une théorie cohomologique des champs une hiérarchie intégrable. Néanmoins la construction est assez différente, et fait notamment intervenir une hypothèse technique supplémentaire de semi-simplicité sur la théorie cohomologique des champs.

La construction part du potentiel associé à une théorie cohomologique des champs, en déduit des corrélateurs (qui sont des dérivées partielles d'ordre deux du potentiel) à partir desquels on construit ensuite les hamiltoniens de la hiérarchie. Les corrélateurs ont une interprétation géométrique directe en termes de nombre d'intersection sur les espaces de modules $\overline{M_{g,n}}$.

La hiérarchie DR, quant à elle, définit comme on l'a vu directement les hamiltoniens, dont les coefficients sont des intégrales sur les $\overline{M_{g,n}}$. A partir de ces hamiltoniens, et en introduisant une nouvelle structure sur les hiérarchies intégrables appelée *tau-symétrie*, on construit des corrélateurs, puis un potentiel de la hiérarchie DR. Ici, les corrélateurs n'ont pas a priori d'interprétation géométrique.

Il se trouve cependant que les propriétés du cycle de double ramification et des divers classes tautologiques qui apparaissent dans la définition des hamiltoniens permettent d'obtenir des résultats sur les corrélateurs et le potentiel qui ressemblent à ceux obtenus pour DZ (par exemple l'annulation des corrélateurs de degré trop haut, qui vient pour DZ de ce que la dimension de $\overline{M_{g,n}}$ est finie), voire totalement nouveaux, comme l'annulateur des corrélateurs de bas degré.

Enfin, une importante conjecture du domaine prévoit *l'équivalence des deux constructions*, DZ et DR, à une transformation de Miura près (un changement de variable). Pour les définitions et un énoncé précis, on réfère à [2].

5.3 Deux théorèmes et une piste de recherche

L'équivalence DZ DR a été vérifiée sur un certain nombre de cas. De fait, une partie des efforts de recherches se concentre, depuis l'énoncé de la conjecture de Witten (le théorème de Kontsevitch) sur l'identification de la hiérarchie DZ associée à une théorie cohomologique des champs. Pour la théorie cohomologique des champs triviale, c'est la hiérarchie de Korteweg de Vries. Pour la théorie r-spin, un résultat récent de Zvonkine, Faber et Sdadrin montre qu'il s'agit de la hiérarchie r-KdV.

Enfin, on sait que KP peut être retrouvée comme limite de r-KdV, et on se demande donc si un certain passage à la limite dans la théorie r-spin ne pourrait pas être identifié à KP.

Références

[1] Alejandro Adem, Johann Leida, and Yongbin Ruan. *Orbifolds and Stringy Topology.* Cambridge University Press, 2007.

[2] A. Buryak. Double ramification cycles and integrable hierarchies. *Communications in Mathematical Physics*, 336(3) :1085–1107, Dec 2014.

[3] A. Buryak, S. Shadrin, L. Spitz, and D. Zvonkine. Integrals of psi-classes over double ramification cycles, 2012.

[4] Alexandr Buryak, Boris Dubrovin, Jérémy Guéré, and Paolo Rossi. Tau-structure for the double ramification hierarchies. *Communications in Mathematical Physics*, 363(1) :191–260, Aug 2018.

[5] Samuel Grushevsky and Dmitry Zakharov. The double ramification cycle and the theta divisor. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(12) :4053–4064, Aug 2014.

[6] Richard Hain. Normal functions and the geometry of moduli spaces of curves, 2011.

[7] M E Kazarian and S K Lando. Combinatorial solutions to integrable hierarchies. *Russian Mathematical Surveys*, 70(3) :453–482, Jun 2015.

[8] Paolo Rossi. *Integrable systems and moduli spaces of curves.* Habilitation à diriger des recherches, université de bourgogne, November 2016.

[9] Graeme Segal and George Wilson. Loop groups and equations of kdv type. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 61 :5–65, 1985.

[10] R. Vakil. The moduli space of curves and gromov–witten theory. *Enumerative Invariants in Algebraic Geometry and String Theory*, page 143–198, 2008.

[11] Edward Witten. Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity. *Topological methods in modern mathematics*, page 235–269, 1993.

[12] Dimitri Zvonkine. An introduction to moduli spaces of curves and its intersection theory. https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sites/ifmaquette.ujf-grenoble.fr/files/ete2011-zvonkine.pdf.