

Mémoire

d'introduction au domaine de recherche

Cartes, Matchings et polynômes de Jack

Houcine Ben Dali

13 Octobre 2020

1 Introduction

Définition 1.1. Soit $n \geq 0$ un entier. On dit que λ est une partition de n si λ est une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tel que $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$. Dans ce cas, l'entier n est la taille de la partition λ , et sera noté $|\lambda|$, et k est le nombre de parts de λ et sera noté $l(\lambda)$. Si λ est une partition de n on écrit alors $\lambda \vdash n$.

On note \mathfrak{P} l'ensemble des partitions d'entiers (par convention la partition vide est la seule partition de taille 0).

Si $\lambda \in \mathfrak{P}$, on définit

$$z_\lambda := \prod_i m_i! i^{m_i}$$

où m_i désigne le nombre de parts de taille i dans λ .

Polynômes symétriques : Soit $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots)$ une suite de variables. On dit que $f(\mathbf{x})$ est un polynôme symétrique si pour toute permutation σ de \mathbb{N} à support fini on a

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \dots)$$

et pour tout $r \geq 0$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$$

est un polynôme en x_1, x_2, \dots, x_r . On note Λ l'espace des polynômes symétriques. On dispose de plusieurs bases de Λ , indexées toutes par des partitions d'entiers :

1. *Base monomiale* : Soit λ une partition, et soit $k := l(\lambda)$.

$$m_\lambda := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \text{ deux à deux distincts}} x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \dots x_{i_k}^{\lambda_k}$$

2. *Fonctions power-sum* : Soit $j \geq 1$. On définit

$$p_j := \sum_{i \geq 1} x_i^j$$

et pour λ partition on définit $p_\lambda := p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_k}$ où $k = l(\lambda)$.

3. *Fonctions de Schur* : Soit $n \geq 1$ et soit $\lambda \vdash n$. Alors on définit la fonction de Schur associée à λ :

$$s_\lambda := \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu$$

où χ^λ désignent les caractères du groupe symétrique.

Polynômes de Jack : Dans ce mémoire, α désignera un paramètre dans \mathbb{R}_+ , et $b := \alpha - 1$.

Comme $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{P}}$ est une base de l'espace des polynômes symétriques, on définit sur Λ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \alpha^{l(\lambda)}$$

pour $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$. Si $\lambda \in \mathfrak{P}$, on prend $\lambda_i = 0$ si $i > l(\lambda)$.

Définition 1.2. On définit sur les partitions de taille n un ordre partiel \leq appelé ordre de dominance défini par : $\lambda \leq \mu$ si et seulement si pour tout i on a $\sum_{j \leq i} \mu_j \leq \sum_{j \leq i} \lambda_j$.

Les polynômes de Jack ont été introduits dans [Mac95] :

Théorème 1.1. *Il existe une unique famille de fonctions symétriques $(J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}))$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Triangularité et normalisation* : Si $\lambda \vdash n$, alors

$$J_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{\mu \vdash n} u_{\lambda\mu} m_\mu$$

avec $u_{\lambda[1^n]} = n!$ et $u_{\lambda\mu} = 0$ sauf si $\mu \leq \lambda$.

2. *Orthogonalité* : si $\lambda \neq \mu$ alors $\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\mu^{(\alpha)} \rangle_\alpha = 0$

Exemple 1.1. — Pour $\alpha = 1$, les polynômes de Jack coïncident avec les fonctions de Schur à une constante près (voir proposition 1.2 [Sta89]) :

$$J_\lambda^{(1)} = H_\lambda s_\lambda$$

où $H_\lambda := \frac{|\lambda|!}{x^{\lambda(1)}}$.

— Pour $\alpha = 2$, les polynômes de Jack sont appelés polynômes zonaux. (voir [Mac95] chapitre VII).

Pour $\theta \in \mathfrak{P}$ on définit $j_\theta^{(\alpha)} := \langle J_\theta^{(\alpha)}, J_\theta^{(\alpha)} \rangle_\alpha$ et $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots)$.

On définit les deux fonctions suivantes introduites dans [GJ96b], et qui dépendent du paramètre $b := \alpha - 1$:

Définition 1.3.

$$\tau_b^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}) = \sum_{\theta \in \mathfrak{P}} \frac{t^{|\theta|}}{j_\theta^{(\alpha)}} J_\theta^{(\alpha)}(\mathbf{p}) J_\theta^{(\alpha)}(\mathbf{q}^{(0)}) J_\theta^{(\alpha)}(\mathbf{q}^{(1)})$$

et

$$\Psi_b^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}) = (1+b)t \frac{\partial}{\partial t} \ln \tau_b^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)})$$

Définition 1.4. On définit les séries de connexion $c_{\mu\nu}^\lambda(b)$ et $h_{\mu\nu}^\lambda(b)$ par

$$\tau_b^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \frac{c_{\mu\nu}^\lambda(b)}{z_\lambda (1+b)^{l(\lambda)}} \mathbf{p}_\lambda \mathbf{q}_\mu^{(0)} \mathbf{p}_\nu^{(1)} \quad (1)$$

$$\Psi_b^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}) = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} h_{\mu\nu}^\lambda(b) \mathbf{p}_\lambda \mathbf{q}_\mu^{(0)} \mathbf{p}_\nu^{(1)} \quad (2)$$

Cartes biparties :

Définition 1.5. Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement unicellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord à homéomorphisme près (voir [Cha09] paragraphe 1.1.1).

On dit qu'une carte connexe est orientable si la surface sur laquelle elle est plongée l'est. On définit le genre g de la carte par $2 - 2g = s - n + f$ où s désigne le nombre de sommets de la carte, n le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

On considère qu'une *carte non connexe* est un ensemble de cartes connexes qu'on regarde sur des surfaces indépendantes.

Une carte est orientable si toutes ses composantes connexes sont orientables.

La *taille* d'une carte M est le nombre d'arêtes qu'elle contient et sera noté $|M|$.

On appelle carte bipartie une carte dont les sommets sont coloriés en deux couleurs, noir et blanc, et tel que toute arête lie deux sommets de couleurs différentes. Une carte connexe est *enracinée* si elle admet un coin incident à un sommet blanc qui est marqué, et orienté. Ceci revient d'une manière équivalente à distinguer le côté d'une arête, qui sera par définition le côté qui suit le coin racine.

On dit qu'une carte est de type (λ, μ, ν) si les degrés des sommets blancs (respectivement noirs) se réordonnent en μ , (respectivement ν), et les degrés des faces se réordonnent en λ . En particulier, $l(\lambda)$ correspond au nombre de faces de la carte et $l(\mu)$ (respectivement $l(\nu)$) correspond au nombre de sommets blancs (respectivement sommet noirs). Le genre de la carte bipartie vérifie alors $2g - 2 = n - (l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu))$.

Matchings : On considère l'ensemble à $2n$ éléments $\mathcal{A}_n := \{1, \hat{1}, \dots, n, \hat{n}\}$. On note \mathfrak{F}_n l'ensemble des matchings parfaits sur \mathcal{A}_n , (ou encore les partitions de \mathcal{A}_n en ensembles à deux éléments). Dans la suite le terme matching sera utilisé pour désigner les matchings parfaits. On note ε l'élément de \mathfrak{F}_n qui lie i à \hat{i} pour tout i . Les éléments de \mathcal{A}_n sans chapeau sont dits de première classe, et les éléments avec chapeau sont dits de deuxième classe.

Un matching est dit biparti si chacune de ses arêtes lie deux éléments de \mathcal{A}_n de classes différentes.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ une partition de n , alors on définit δ_λ l'élément de \mathfrak{F}_n tel que

$$\delta_\lambda = \{\{1, \hat{2}\}, \{2, \hat{3}\}, \dots, \{\lambda_1 - 1, \widehat{\lambda_1}\}, \{\lambda_1, \hat{1}\}, \{\lambda_1 + 1, \widehat{\lambda_1 + 2}\}, \dots\}$$

Exemple 1.2. Pour $n = 8$ et $\lambda = (3, 3, 2)$ on obtient la paire de matching $(\varepsilon, \delta_\lambda)$ de la figure 1.

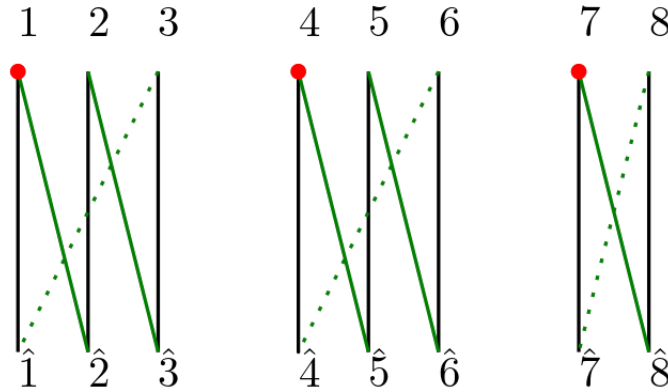


FIGURE 1 – Exemple de $\varepsilon \cup \delta_\lambda$ pour $\lambda = [3, 3, 2]$

Définition 1.6. Si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ sont des matchings, alors on note le graphe formé par leurs arêtes $G(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$. Et on définit $\Lambda(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ comme la partition dont les parts sont la moitié des tailles des composantes connexes de $G(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$.

On vérifie alors que $\Lambda(\varepsilon, \delta_\lambda) = \lambda$. On définit pour $\lambda, \mu, \nu \vdash n$,

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu}^\lambda := \{\delta \in \mathfrak{F}_n, \Lambda(\varepsilon, \delta) = \mu, \Lambda(\delta_\lambda, \delta) = \nu\}$$

Goulden Et Jackson établissent dans [GJ96a] et [GJ96b] que dans les cas $b = 0$ et $b = 1$, les fonction $\tau_b^{(1)}$ et $\Psi_b^{(1)}$ sont les séries génératrices de cartes biparties et de matchings, plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème 1.2. (Goulden et Jackson 1996) : Pour $\lambda, \mu, \nu \vdash n$ on a :

1. $h_{\mu\nu}^\lambda(0)$ est le nombre de cartes bipartie orientables de type (λ, μ, ν) .
2. $h_{\mu\nu}^\lambda(1)$ est le nombre de cartes bipartie (orientables ou pas) de type (λ, μ, ν) .
3. $c_{\mu\nu}^\lambda(0)$ est le nombre de matchings bipartis de $\mathfrak{F}_{\mu\nu}^\lambda$.
4. $c_{\mu\nu}^\lambda(1)$ est le nombre de tous les matchings de $\mathfrak{F}_{\mu\nu}^\lambda$.

Ils énoncent alors les deux conjectures suivantes qui restent :

La b -conjecture : Pour $\lambda, \mu, \nu \vdash n$, il existe une statistique ϑ sur les cartes enracinées de type (λ, μ, ν) à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\vartheta(M, c) = 0$ si et seulement si M est orientable, et

$$h_{\mu\nu}^\lambda(b) = \sum_{(M,c) \text{ de type } (\lambda, \mu, \nu)} b^{\vartheta(M,c)}$$

La Conjecture de Matching-Jack : Pour $\lambda, \mu, \nu \vdash n$, il existe une statistique θ sur $\mathfrak{F}_{\mu\nu}^\lambda$ à valeurs dans les entiers positifs, tel que $\theta(\delta) = 0$ si et seulement si δ est biparti, et telle que

$$c_{\mu\nu}^\lambda(b) = \sum_{\delta \in \mathfrak{F}_{\mu\nu}^\lambda} b^{\theta(\delta)}$$

Remarque 1. La statistiques ϑ peut être vue comme une mesure de non orientabilité sur les cartes enracinées, et la statistique θ comme une mesure de "non bipartité" sur les matchings.

Remarque 2. Par le théorème 1.2, il est facile de voir que la b -conjecture (respectivement la conjecture Matching-Jack) est équivalente à dire que $h_{\mu\nu}^\lambda$ (respectivement $c_{\mu\nu}^\lambda$ est un polynôme à coefficients entiers positifs.

Ces deux conjectures, restent toujours ouvertes, et on ne sait pas non plus démontrer aucune implication entre elles.

Plan du mémoire : Dans la section 2, on explique comment on peut décrire des cartes biparties avec des matchings. Cette description sera utile dans la section 3 pour donner quelques étapes de la démonstration des conjectures dans le cas $b = 1$ (points 2 et 4 du théorème 1.2).

Dans la section 4, on énonce les résultats les plus récents en relation avec les deux conjectures.

Dans la section 5, on donne une version généralisée des deux conjectures.

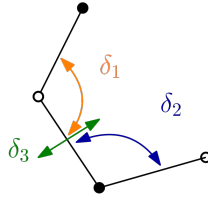
2 Lien entre cartes biparties et matchings.

Soit M une carte bipartie à n arêtes. On dit qu'elle est étiquetée si il y a une bijection entre les côtés des arêtes et \mathcal{A}_n . Si la carte est enracinée, alors on demande que la bijection envoie le côté racine sur $1 \in \mathcal{A}_n$.

On définit alors les trois matchings suivants :

1. le premier matching δ_1 lie les paires de côtés qui forment un coin autour d'un sommet blanc.
2. le deuxième δ_2 lie les paires de côtés qui forment un coin autour d'un sommet noir.
3. le troisième δ_3 lie les deux côtés de chaque arêtes.

Ainsi $\Lambda(\delta_1, \delta_2)$ est le type des faces de M , $\Lambda(\delta_1, \delta_3)$ est celui des sommets blancs et $\Lambda(\delta_2, \delta_3)$ est le type des sommets noirs.



Pour $\lambda, \mu, \nu \vdash n$, on obtient alors une bijection entre $\{(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \mathfrak{F}_n^3, \Lambda(\delta_1, \delta_2) = \lambda, \Lambda(\delta_1, \delta_3) = \mu, \Lambda(\delta_2, \delta_3) = \nu\}$ et les cartes biparties étiquetées de type (λ, μ, ν) (pas forcément connexes). (Voir [GJ96a] paragraphe 3).

3 Cas $b = 1$

Dans ce paragraphe, on donne quelques étapes de la démonstration donnée dans [GJ96a] des conjectures dans le cas $b = 1$.

Définition 3.1. Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathfrak{F}_n$, on dit que $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ est de type (λ, μ, ν) si $\Lambda(\delta_1, \delta_2) = \lambda$, $\Lambda(\delta_1, \delta_3) = \mu$ et $\Lambda(\delta_2, \delta_3) = \nu$.

Définition 3.2. Soit

On définit \mathfrak{B}_n le sous groupe de \mathfrak{S}_{2n} qui stabilise le matching ε^1 . :

$$\mathfrak{B}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}, \sigma\varepsilon = \varepsilon\}$$

\mathfrak{B}_n est appelée le sous groupe hyperoctaédral de \mathfrak{S}_{2n} .

-
1. On regarde ici \mathfrak{S}_{2n} comme le groupe de permutation de \mathcal{A}_n

On note \mathcal{K}_λ les classes de double coset $\mathfrak{B}_n \backslash \mathfrak{S}_{2n} / \mathfrak{B}_n$ indexées par $\lambda \vdash n$, et on définit K_λ comme la somme de toutes les permutations dans \mathcal{K}_λ .

Avec la description du paragraphe précédent, on a une bijection entre cartes biparties étiquetées de type (λ, μ, ν) et triplets de matchings $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ du même type. Ce nombre peut être lié aux coefficients de structure dans l'algèbre de double coset $\mathfrak{B}_n \backslash \mathfrak{S}_{2n} / \mathfrak{B}_n$: en effet si on note $b_{\mu\nu}^\lambda := [K_\lambda]K_\mu K_\nu$, alors le nombre de triplets de matchings de type (λ, μ, ν) est donné par

$$\frac{(2n)! |\mathcal{C}_\lambda| 2^{n-l(\lambda)}}{|\mathfrak{B}_n|^2} b_{\mu\nu}^\lambda$$

D'autre part, pour $b = 1$ les polynômes de Jack coïncident avec les polynômes zonaux notés Z_λ (voir [Mac95] paragraphe 2 du chapitre VII.). Ces polynômes peuvent être exprimés dans la base des fonctions power-sums :

$$Z_\lambda = \frac{1}{|\mathfrak{B}_n|} \sum_{\mu \vdash n} \phi^\lambda(\mu) p_\mu \quad (3)$$

où

$$\phi^\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_\mu} \chi^{2\lambda}(\sigma)$$

Ces caractères vérifient l'équation suivante :

$$b_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{|\mathcal{K}_\lambda|} \sum_{\theta} \frac{1}{H_{2\theta}} \phi^\theta(\lambda) \phi^\theta(\mu) \phi^\theta(\nu) \quad (4)$$

La définition 1.3 avec les équations (3) et (4) permettent de déduire que

$$\tau_1^{(1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(2n)!} \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \sum_{M \text{ de type } (\lambda, \mu, \nu)} p_\lambda q_\mu^{(0)} q_\nu^{(1)} \quad (5)$$

où la troisième somme se fait sur les cartes biparties étiquetées.

En prenant le log, et en oubliant toutes les étiquettes des cartes sauf l'étiquette 1 (qui permet de choisir la racine) on obtient :

$$\Psi_1^{(1)} = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \sum_{(M, c) \text{ de type } (\lambda, \mu, \nu)} p_\lambda q_\mu^{(0)} q_\nu^{(1)} \quad (6)$$

où la troisième somme se fait sur des cartes enracinées.

L'équation (5) (respectivement (6)) permet d'obtenir la conjecture Matching-Jack (respectivement la b -conjecture) dans le cas $b = 1$.

4 Résultats en relations avec la conjecture.

Dans ce paragraphe λ , μ et ν désignent trois partitions de taille n . On définit $d_1 := n + l(\lambda) - (l(\mu) + l(\nu))$, $d_2 := n - l(\mu)$ et $g = n + 2 - (l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu))$.

1. (La Croix 2009 [LC09]) Si on suppose la polynômialité des coefficients $h_{\mu\nu}^\lambda$ alors ils s'écrivent de la forme

$$h_{\mu\nu}^\lambda = \sum_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor} b^{g-2i} (1+b)^i$$

2. (Dołęga-Féray 2016 [DF16]) Les coefficients $c_{\mu\nu}^\lambda$ sont des polynômes à coefficients rationnels en b , de degré majoré par $\min(d_1, d_2)$.
3. (Dołęga-Féray 2017 [DF17]) Les coefficients $h_{\mu\nu}^\lambda$ sont des polynômes à coefficients rationnels en b de degré g .
4. (Dołęga 2017 [Dol17]) Si $\lambda = [n]$, alors on a une interprétation du terme du plus haut degré de $h_{\mu\nu}^\lambda$ avec une famille de cartes unicellulaires sans "anses".
5. Dans mon mémoire, je donne une interprétation en termes de matchings des termes en $[b^{d_1}]c_{\mu\nu}^\lambda$ et $[b^{d_2}]c_{\mu\nu}^\lambda$, et donc en particulier déterminer les cas où ces deux bornes pour le degré de $c_{\mu\nu}^\lambda$ sont atteintes.
6. (Chapuy-Dołęga 2020 [CD20]) si $r \leq n$ est un entier alors

$$h_{\mu,r}^\lambda := \sum_{l(\nu)=r} h_{\mu,\nu}^\lambda$$

est un polynôme à coefficients entiers positifs. En effet, ils démontrent ce résultat dans un cadre plus général qui sera expliqué dans le paragraphe suivant.

7. Dans mon mémoire, je déduis du théorème précédent un résultat analogue pour les coefficients c .

5 Conjectures généralisées :

Définition 5.1. Pour $k \geq 1$, on définit

$$\tau_b^{(k)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)}) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{j_\lambda^{(\alpha)}} J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p}) J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{q}^{(0)}) \dots J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{q}^{(k)})$$

et

$$\Psi_b^{(k)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)}) = (1+b)t \frac{\partial}{\partial t} \ln \tau_b^{(k)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)})$$

où $J_\theta^{(\alpha)}$ désigne le polynôme de Jack associé à la partition θ , exprimée dans la base des powersums.

Ceci permet alors de définir les coefficients de connexion généralisés.

Pour $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \vdash n$ on définit $c_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda(b)$ et $h_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda(b)$ tel que

$$\tau_b^k(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)}) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k} \frac{1}{z_\lambda (1+b)^{l(\lambda)}} c_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda(b) \mathbf{p}_\lambda \mathbf{q}_{\mu_0}^{(0)} \dots \mathbf{q}_{\mu_k}^{(k)}$$

et

$$\Psi_b^k(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)}) = \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \vdash n} h_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda(b) \mathbf{p}_\lambda \mathbf{q}_{\mu_0}^{(0)} \dots \mathbf{q}_{\mu_k}^{(k)}$$

On peut alors énoncer **une version généralisée de la b -conjecture** : Pour toutes partitions $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \vdash n$, $c_{\mu^0 \mu^1 \dots \mu^k}^\lambda(b)$ et $h_{\mu^0 \mu^1 \dots \mu^k}^\lambda(b)$ sont des polynômes en b dont tous les coefficients sont des entiers positifs.

5.1 Constellations

La définition suivante généralise la notion de cartes biparties.

Définition 5.2. Une k -constellation est une carte où les sommets sont coloriés de 0 à k , et qui vérifie les deux conditions suivantes :

- Tout voisin d'un sommet de couleur 0 (respectivement k) est forcément de couleur 1 (respectivement $k - 1$).
- Les voisins d'un sommet de couleur i , avec $0 < i < k$, sont de couleur $i - 1$ ou $i + 1$, et tout coin d'un tel point séparent des sommets de couleurs $i - 1$ et $i + 1$.

On définit le degré d'un sommet de couleur 0 ou k , comme son degré dans la carte. Pour les autres sommets, leurs degré dans la constellation est leurs degrés dans la carte divisé par 2. On définit également le degré d'une face comme étant le nombre de sommets de couleurs 0 qu'elle contient. Ceci permet de définir le type de la constellation $(\lambda^{-1}, \lambda^0, \dots, \lambda^k)$, où λ^{-1} est la partition associée aux degrés des faces, et pour tout $i \in \llbracket k \rrbracket$, λ^i comme la partition associée aux sommets de couleurs i .

On définit la taille $|\mathbf{M}|$ d'une constellation \mathbf{M} comme le nombre de coins de couleur 0.

Dans mon mémoire, je généraliser la description des cartes biparties avec des matchings au cas des k -constellations. On commence par introduire la définition suivante :

Définition 5.3. 1. On appelle hyper-arête d'une constellation un chemin sur une face qui lie un coin de couleur 0 et un coin de couleur k consécutifs.

2. Une constellation connexe \mathbf{M} est enracinée si elle admet un coin orienté c de couleur 0 qui est marqué. Ceci revient à marquer une hyper-arête, qui sera par convention celle qui suit le coin racine.

Si la constellation n'est pas connexe alors on dit qu'elle est enracinée si chacune des composantes connexes est enracinée.

- On dit qu'une constellation de taille n est étiquetée si ses hyper-arêtes sont étiquetées par \mathcal{A}_n .

Une constellation étiquetée est enracinée par l'hyper-arête d'étiquette 1. On note les constellations étiquetées avec un check ; $\check{\mathbf{M}}$.

On remarque que le nombre d'hyper-arêtes est deux fois la taille de la constellation, et que le nombre d'hyper-arêtes d'une face est deux fois son degré.

Remarque 3. Le cas des cartes biparties correspond au 1-constellations, et les hyper-arêtes sont des côtés d'arêtes.

Dans l'exemple de la figure 2, on a une 2-constellation de taille 4 sur le plan projectif. Les 8 hyper-arêtes sont étiquetées par \mathcal{A}_4 .

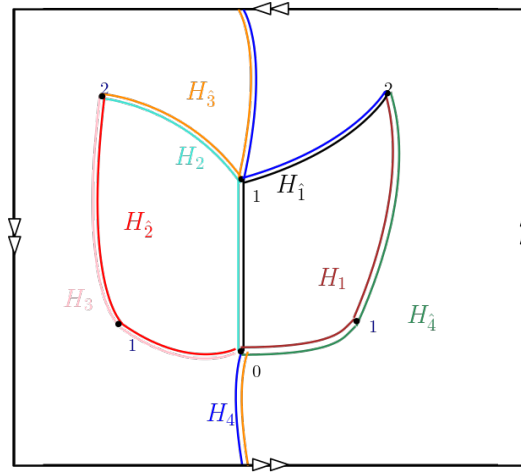


FIGURE 2 – Exemple d'une 2-constellation sur le plan projectif

5.2 Lien entre constellations et matchings :

Comme dans le cas des cartes, on peut parfaitement décrire une k constellation étiquetée de taille n avec $k + 2$ matchings sur \mathcal{A}_n :

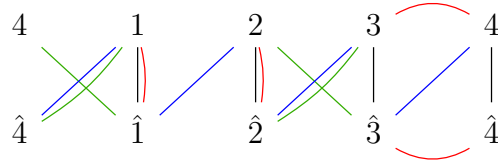
- pour $i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$, on définit un matching δ_i , qui lie les étiquettes de deux hyper-arêtes qui ont une arête de couleur $(i, i + 1)$ en commun.
- δ_{-1} lie les étiquettes des hyper-arêtes adjacentes sur une face et qui partage un coin de couleur 0.
- δ_k lie les étiquettes des hyper-arêtes adjacentes sur une face et qui partage un coin de couleur k .

Ainsi le type des faces correspond à $\Lambda(\delta_{-1}, \delta_k)$, et pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ le type des sommets de couleur i correspond à $\Lambda(\delta_{i-1}, \delta_i)$.

On obtient ainsi une bijection entre constellations étiquetées de type $(\lambda, \mu^0, \dots, \mu^k)$ et

$$\mathfrak{F}_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda := \{(\delta_0, \dots, \delta_{k-1}) \text{ tel que } \Lambda(\varepsilon, \delta_0) = \mu^0, \Lambda(\delta_0, \delta_1) = \mu^1, \dots, \Lambda(\delta_{k-1}, \delta_k) = \mu^k\}$$

Exemple 5.1. Dans l'exemple de la 2-constellation de la figure 2, on obtient les 4 matchings suivants, δ_{-1} en rouge, δ_0 en bleu, δ_1 en vert et δ_2 en noir.



Ceci permet de généraliser la démonstration du théorème 1.2 donnée dans [GJ96a] aux cas des k -constellations :

- Théorème 5.1.**
1. $h_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda(0)$ est le nombre de k -constellations orientables enracinées de type $(\lambda, \mu^0, \dots, \mu^k)$.
 2. $h_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda(0)$ est le nombre de k -constellations enracinées (orientables ou pas) de type $(\lambda, \mu^0, \dots, \mu^k)$.
 3. $c_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda(0)$ est le nombre de k -uplets de matchings bipartis de $\mathfrak{F}_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda$.
 4. $c_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda(0)$ est le nombre de tous les k -uplets de matchings de $\mathfrak{F}_{\mu^0, \dots, \mu^k}^\lambda$.

Si \mathbf{M} est une constellation de type $(\lambda, \mu^0, \dots, \mu^k)$, Alors on dira que $(\lambda, \mu^0, l(\mu^1), \dots, l(\mu^k))$ est le *type marginal* de \mathbf{M} .

Le résultat le plus récent en relation avec la b -conjecture est le théorème suivant, démontré par Chapuy et Dołęga (voir [CD20]), donne une interprétation des somme marginales des coefficients h généralisés, où on contrôle les deux premières permutations et la longueur des autres partitions :

Théorème 5.2. *Pour tout $k \geq 1$, il existe une mesure de non orientabilité ν sur les k -constellations enracinée, telle que $\nu(\mathbf{M}, c) = 0$ si et seulement si (\mathbf{M}, c) est orientable, et telle que pour tout $n \geq 1$, $\lambda, \mu \vdash n$, $l_1, l_2, \dots, l_k \geq 1$. On a :*

$$h_{\mu, l_1, \dots, l_k}^\lambda = \sum_{\substack{(\mathbf{M}, c) \text{ connexe de type} \\ \text{marginal } (\lambda, \mu, l_1, \dots, l_k)}} b^{\nu(\mathbf{M}, c)}$$

où

$$h_{\mu, l_1, \dots, l_k}^\lambda := \sum_{l(\mu_i) = l_i} h_{\mu, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda$$

Dans mon mémoire, j'en déduis un théorème analogue pour les coefficients c :

Théorème 5.3. *Soit $\lambda \vdash n$. Il existe une statistique ϑ sur les k -uplets de matchings de \mathfrak{F}_n telle que $\vartheta(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{k-1}) = 0$ si et seulement si tous les matchings sont bipartis, et telle que pour $\mu \vdash n$, et $l_1, \dots, l_k \geq 1$.*

$$c_{\mu, l_1, l_2, \dots, l_k}^\lambda(b) = \sum_{(\delta_i) \in \mathfrak{F}_{\mu, l_1, \dots, l_k}^\lambda} b^{\vartheta(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{k-1})}$$

où

$$c_{\mu, l_1, \dots, l_k}^\lambda := \sum_{l(\mu_i) = l_i} c_{\mu, \mu_1, \dots, \mu_k}^\lambda$$

La démonstration que j'utilise pour passer du théorème 5.2 au théorème 5.3 n'est pas valable pour montrer que la b -conjecture implique la conjecture de Matching-Jack ; j'utilise une propriété de la mesure de non orientabilité des constellations enracinées qui n'a été démontré que dans un sens faible (celui où on ne contrôle que les longueurs des k -dernières partitions).

Références

- [CD20] G. Chapuy and M. Dołęga. Non orientable branched coverings, b-Hurwitz numbers, and positivity for multiparametric Jack expansions. 2020.
- [Cha09] G Chapuy. *Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur*. PhD thesis, 9 Juin 2009.
- [DF16] M. Dołęga and V. Féray. Gaussian fluctuations of Young diagrams and structure constants of Jack characters. *Duke Math. J.*, 165(7) :1193–1282, 2016.
- [DF17] M. Dołęga and V. Féray. Cumulants of Jack symmetric functions and the b-conjecture. *Transactions of the Mathematical Society*, 389(12) :9015–9039, December 2017.
- [Dol17] M. Dołęga. Top degree part in b-conjecture for unicellular bipartite maps. *Electron. J. Combin.*, 24(3) :Paper 3.24, 2017.
- [GJ96a] I.P. Goulden and D.M. Jackson. Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials. *Canadian J. Math.*, Vol. 48(3) :569–584, 1996.
- [GJ96b] I.P. Goulden and D.M. Jackson. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for jack symmetric functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 348,(Number 3), March 1996.

- [LC09] M.A La Croix. *The combinatorics of the Jack parameter and the genus series for topological maps*. PhD thesis, University of Waterloo, 2009.
- [Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*, deuxième édition. *Clarendon Press, Oxford*, 348(Number 3), 1995.
- [Sta89] R.P. Stanley. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions. *Advances in Math*, 77 :76–115, 1989.