

# Introduction au domaine de recherche

Groupes de Veech des surfaces de translation

Julien Boulanger

1<sup>er</sup> octobre 2020

## 1 Introduction.

Les groupes de Veech sont des groupes fuchsien apparaissant naturellement dans le cadre de l'étude des surfaces de translation. Ils sont donc à l'interface entre la théorie des groupes, la géométrie (plate et hyperbolique), les systèmes dynamiques et la théorie ergodique (entre autres). Malgré de nombreuses avancées dans la compréhension des surfaces de translation via l'espace des modules ces dernières années menée par de nombreuses personnes dont la plus célèbre est sans doute Maryam Mirzakhani, les groupes de Veech restent assez peu connus. On est notamment très loin de savoir quels groupes fuchsien se réalisent en tant que groupes de Veech. Outre cette volonté zoologique de classer les groupes de Veech, leur étude est motivée par l'envie de mieux comprendre l'espace de modules des surfaces de translation. Pour une introduction aux surfaces de translation, on peut notamment consulter [Zor06] ou [Wri14].

## 2 Contexte et préliminaires.

### 2.1 Surfaces de translation.

Une surface de translation est une surface qui peut être obtenue à partir de polygones euclidiens en recollant des cotés 2 à 2 parallèles de même longueur, et tel que chaque côté soit recollé à un unique autre côté<sup>1</sup>. On obtient alors une surface (compacte orientable) qui hérite de la métrique plate des polygones recollés, avec éventuellement un nombre fini de singularités (lorsque la somme des angles autour d'un sommet recollé n'est pas égale à  $2\pi$ ). En fait, on peut également décrire ces surfaces comme des surfaces compactes ayant un atlas à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et dont les changements de cartes sont des (restrictions de) translations de  $\mathbb{R}^2$ . Une troisième manière de les aborder est de remarquer que l'ensemble de telles surfaces de translation en genre  $g$  est isomorphe à l'ensemble des formes

---

1. En fait, il faut aussi une direction privilégiée, mais on en parlera pas trop.

holomorphes sur une surface de Riemann de genre  $g$ . Pour ces équivalences on peut notamment consulter [Mas00].

L'étude des surfaces de translation a plusieurs motivations. Leur construction provient notamment de l'étude des trajectoires des billards sur des polygones (pas seulement rectangulaires) et de l'astuce du "dépliement" du polygone pour étudier les trajectoires (qui deviennent alors des lignes droites) pour pouvoir se passer des problèmes de réflexion de la trajectoire sur les côtés. Si le polygone original ("billard") possède des angles rationnels, alors la procédure de dépliement va conduire à construire un plus grand polygone<sup>2</sup> ayant des côtés 2 à 2 parallèles et de même longueur identifiés pour refermer la surface. On aura obtenu une surface de translation, sur laquelle la trajectoire originale du billard sera devenue simplement une trajectoire directionnelle (je me déplace en ligne droite sur le polygone, et lorsque je rencontre l'un des côtés, je ressorts avec la même pente sur le côté identifié).

Une autre motivation provient de l'étude des structures géométriques sur les surfaces : une surface de translation est un exemple de  $(G, X)$  structure sur un tore à  $g$  trous avec  $X = \mathbb{R}^2$  et  $G$  le groupe des translations de  $\mathbb{R}^2$ .

Enfin, l'ensemble des 1-formes holomorphes que l'on peut mettre sur une surface à  $g$ -trous forme un espace topologique appelé l'espace de modules, que l'on cherche à classifier.

## 2.2 Groupes de Veech.

Une surface de translation est donc une surface, compacte orientable de genre  $g$ , avec une structure supplémentaire appelée structure de translation. On peut se demander quels sont alors les difféomorphismes qui préservent cette structure. Ces difféomorphismes sont en fait des applications affines dans les cartes, de différentielle constante et de déterminant 1. On note  $Aff(X)$  l'ensemble des applications affines qui préservent  $X$ . La différentielle d'un difféomorphisme affine de  $X$  est une matrice  $2 \times 2$  constante à coefficients réels et de déterminant 1 (car elle préserve la surface donc son aire). C'est donc un élément de  $SL_2(\mathbb{R})$ . En fait, W. Veech a montré que le groupe des différentielles de difféomorphismes affines de  $X$ , noté  $SL(X)$  est un sous groupe discret de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Les sous groupes discrets de  $SL_2(\mathbb{R})$  sont appelés des *groupes fuchsians* et sont très étudiés pour toutes leurs propriétés, liées notamment au fait que  $SL_2(\mathbb{R})$  est isomorphe au groupe des isométries de  $\mathbb{H}^2$ , le plan hyperbolique. Le groupe  $SL(X)$  est appelé le *groupe de Veech* associé à la surface de translation  $X$ . Avant d'aller plus loin, on peut rappeler quelques bases nécessaires de géométrie hyperbolique.

---

2. en fait, possiblement plusieurs, mais ensuite on pourra se ramener à un seul polygone

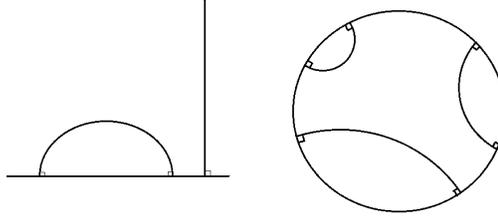


FIGURE 1 – Les géodésiques hyperboliques dans le modèle du demi-plan et du disque.

### 2.3 Groupes fuchsien et géométrie hyperbolique.

Le plan hyperbolique est par définition le demi plan supérieur du plan complexe  $\{x + iy, y > 0\}$ . On peut le munir d'une métrique riemannienne dont les géodésiques sont représentées sur la figure 1. C'est également une surface de Riemann. On note  $\partial\mathbb{H}^2$  la frontière du plan hyperbolique, qui est constituée des points du bord : les points sur l'axe réel ainsi que le point à l'infini. On note  $T^1\mathbb{H}^2$  son fibré unitaire tangent. Le groupe des isométries directes  $Isom^+(\mathbb{H}^2)$  de  $\mathbb{H}^2$  est isomorphe à  $PSL_2(\mathbb{R})$ . L'action de  $Isom^+(\mathbb{H}^2)$  s'étend naturellement en une action simplement transitive sur  $T^1\mathbb{H}^2$ .

On rappelle que les isométries du plan hyperbolique peuvent être de trois types différents :

- Une *isométrie hyperbolique* est représentée dans  $PSL_2(\mathbb{R})$  par un élément ayant une trace de valeur absolue  $> 2$ . Elle fixe deux éléments de  $\partial\mathbb{H}^2$  et aucun élément dans  $\mathbb{H}^2$ ,
- Une *isométrie parabolique* est représentée dans  $PSL_2(\mathbb{R})$  par un élément de trace de valeur absolue  $= 2$ . Elle fixe exactement un élément de  $\partial\mathbb{H}^2$  et aucun de  $\mathbb{H}^2$ .
- Une *isométrie elliptique* est représentée dans  $PSL_2(\mathbb{R})$  par un élément de trace de valeur absolue  $< 2$ . Elle fixe exactement un élément de  $\mathbb{H}^2$  et aucun de  $\partial\mathbb{H}^2$ .

#### Groupes fuchsien :

Un *groupe fuchsien*  $\Gamma$  est un sous groupe discret de  $Isom^+(\mathbb{H}^2)$  (on le verra surtout comme un sous groupe discret de  $PSL_2(\mathbb{R})$ ). En fait, un sous-groupe de  $Isom^+(\mathbb{H}^2)$  est fuchsien si et seulement si son action sur  $\mathbb{H}^2$  est proprement discontinue. On peut alors quotienter  $\mathbb{H}^2$  par  $\Gamma$  pour obtenir une *surface hyperbolique*<sup>3</sup>, c'est à dire une variété avec un atlas de cartes à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$  et dont les changements de cartes sont des isométries de  $\mathbb{H}^2$ . En fait, un théorème dit que toute surface hyperbolique est de cette forme. L'étude de certaines propriétés géométriques des surfaces hyperboliques se ramène alors à l'étude des groupes

3. avec possiblement des singularités en nombre fini, appelés points coniques.

fuchsien.

On dira alors que le groupe  $\Gamma$  est un *réseau* lorsque la surface  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  est d'aire finie<sup>4</sup>. Si elle est de plus compacte, on dira que  $\Gamma$  est un *réseau uniforme*.

**Exemple 2.1.**  $PSL_2(\mathbb{Z})$  est un réseau et on peut trouver une représentation du groupe  $\Gamma = \langle A, B, C, D \mid [A, B][C, D] = 1 \rangle$  dans  $PSL_2(\mathbb{R})$  qui en fait un réseau uniforme (la surface  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  est en fait un tore hyperbolique à deux trous).

## 2.4 Retournons à nos groupes de Veech

Une des premières motivations liées à l'étude des groupes de Veech est un résultat de W.Veech lui même :

**Théorème 2.2** ([Vee89]). *Si le groupe de Veech  $SL(X)$  d'une surface de translation  $X$  est un réseau de  $SL_2(\mathbb{R})$ , alors pour toute direction  $\theta \in \mathbb{S}^1$  le flot dans la direction  $\theta$  sur la surface  $X$  est ou bien périodique ou bien uniquement ergodique.*

En particulier, cela s'applique dans le cas de certains billards rationnels, pour lesquels toute trajectoire non périodique se doit d'être uniformément distribuée.

Un autre intérêt des groupes de Veech est qu'ils permettent de mieux comprendre la géométrie de l'espace des modules, en particulier l'action de  $SL_2(\mathbb{R})$  sur celui-ci. En effet, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.3.** *La  $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite d'une surface de translation  $X$  dans l'espace de modules est isomorphe à  $SL_2(\mathbb{R})/SL(X)$ .*

Outre ces motivations, on voit que les groupes de Veech font le lien entre la géométrie hyperbolique et la géométrie plate. Ainsi, si un groupe fuchsien donné est un groupe de Veech, on aura une nouvelle manière de comprendre ce groupe fuchsien. La question naturelle est alors de savoir **quels groupes fuchsien peuvent être réalisés en tant que groupes de Veech**. Or, il est en fait très difficile de calculer le groupe de Veech d'une surface donnée, et donc très difficile de s'approcher d'une classification. Dans la suite, on va définir une notion de "degré" sur une surface hyperbolique. Les surfaces de degré 1 ou 2 sont assez bien connues, mais il y a très peu de résultats en degré supérieur. C'est à ce problème que l'on va s'intéresser.

## 2.5 Exemples

### Premier exemple : le cas du tore

Dans cet exemple on considère la surface de translation obtenue à partir d'un

---

4. pour la forme volume quotient induite par celle sur  $\mathbb{H}^2$ .

carré de côté unitaire dont on recolle les cotés opposés. On obtient topologiquement un tore. La question est de savoir quelles sont les applications affines qui préservent ce tore. Par exemple, la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  agit comme un *twist de dehn* sur le tore et le préserve, car on peut découper le nouveau polygone obtenu et recoller les morceaux sur d'autres identifications pour retrouver notre tore original, comme sur la figure 2.

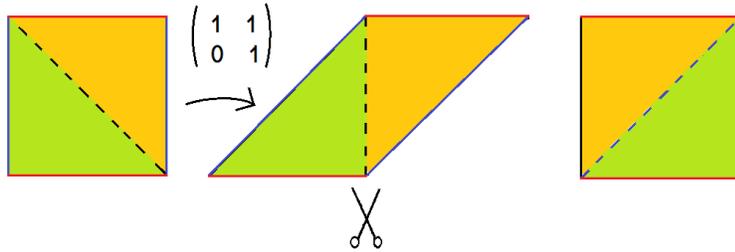


FIGURE 2 – L'action de  $M$  induit un difféomorphisme affine qui préserve le tore.

Ainsi,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(X)$ . Plus généralement, on peut montrer que n'importe quelle matrice de  $SL_2(\mathbb{Z})$  est dans le groupe de Veech. En fait, ce sont les seules. Ainsi, pour ce tore  $SL(X) = SL_2(\mathbb{Z})$ <sup>5</sup>.

Cela permet également de montrer que l'espace de modules des 1-formes holomorphes sur le tore est isomorphe à la surface modulaire  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ .

Plus généralement, si l'on se donne un polygone régulier à  $2n$  cotés, on peut construire une surface de translation en identifiant les cotés opposés. On obtient alors une surface de genre  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

### Autres exemples de surfaces de Veech

Lorsqu'on veut généraliser en genre supérieur, on se rend compte qu'il y a généralement très peu de difféomorphismes affines préservant la structure de translation. En fait, *si l'on prend une surface de translation au hasard, son groupe de Veech sera trivial*.

Or, nous nous intéressons ici aux surfaces de translation dont le groupe de Veech n'est justement pas trivial. Les exemples les plus simples de groupes de Veech non triviaux sont les réseaux de  $SL_2(\mathbb{R})$ , comme dans le cas du tore. Ceci motive alors la définition suivante :

**Définition 2.4.** Une surface de translation est appelée une *surface de Veech* si son groupe de Veech est un réseau de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

<sup>5</sup>. Si on prend un tore donné par un polygone différent, son groupe de Veech sera conjugué à  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

*Remarque 2.5.* On peut montrer qu'un groupe de Veech ne peut pas être un réseau uniforme. Ce résultat n'est pas le seul résultat de "non-existence" de groupes de Veech. On sait que certains groupes de Hecke ne peuvent pas être des groupes de Veech, mais on ne sait pas beaucoup plus.

En genre supérieur ou égal à 2, il est déjà plus difficile de calculer le groupe de Veech, et donc de démontrer qu'une surface de translation donnée est (ou non) une surface de Veech. Cependant, Veech a donné une caractérisation des éléments paraboliques, que nous expliquerons plus tard, qui permet d'exhiber des surfaces de Veech. Mais voyons tout d'abord deux autres exemples.

On se donne un polygone avec un nombre impair  $2n + 1$  de côtés, on peut construire une surface de translation en considérant deux copies du polygone et en les recollant le long d'une arête, appelée alors le double  $(2n + 1)$ -gone, comme sur la figure 3 pour le double-pentagone.

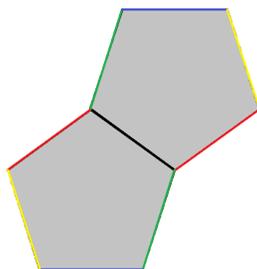


FIGURE 3 – Le double pentagone donne est un autre exemple de surface de Veech.

Enfin, un dernier exemple important : ces surfaces, présentées dans la figure 4, ont été construites dans [McM05] et sont les prototypes de surfaces de Veech dans l'espace de module des surfaces de translation de genre 2 avec une seule singularité double  $\Omega_2M(2)$ , c'est à dire qu'on a le théorème suivant :

**Théorème 2.6** ([McM05]). *Toute surface de Veech primitive<sup>6</sup> dans  $\Omega_2M(2)$  est dans la  $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de l'une des surfaces décrites sur la figure 4 avec  $D$  un entier positif qui n'est pas un carré.*

**Points de connexion et groupes de Veech infiniment engendrés.** Pour chercher des exemples de surfaces de translation ayant un groupe de Veech infiniment engendré, on peut utiliser une construction due à P.Hubert et T.Schmidt qui s'appuie sur la notion de point de connexion, dont on va parler ici. C'est à cette notion que je me suis principalement intéressé pendant mon stage.

**Définition 2.7.** Soit  $X$  une surface de translation et  $P$  un point de  $X$ , qui n'est pas une singularité.

---

6. C'est à dire qu'il n'est pas un revêtement d'une autre surface de translation.

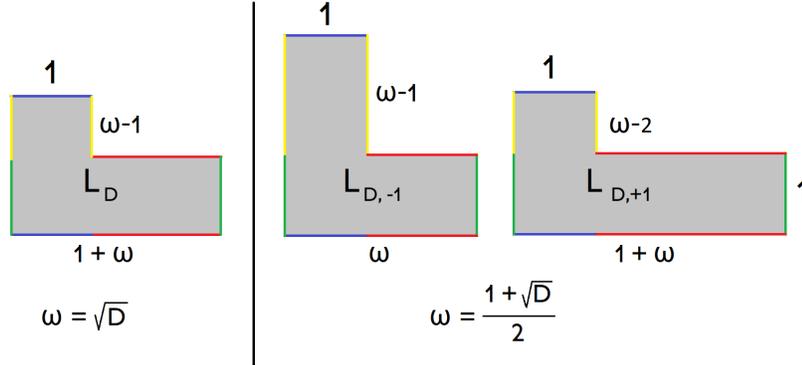


FIGURE 4 – Les prototypes de surfaces de Veech dans  $\Omega_2 M(2)$ .

- (1) Une *séparatrice* issue de  $P$  est un segment reliant une singularité de  $X$  à  $P$ .
- (2) Une *connexion de selles* est un segment reliant deux singularités (éventuellement les mêmes).
- (3) On dit que  $P$  est un *point de connexion* si toute séparatrice issue de  $P$  se prolonge en une connexion de selles.
- (4) Enfin, un point de connexion est dit *périodique* si son orbite sous l'action du groupe de Veech est finie.

La notion de point de connexion est assez restrictive, mais on peut montrer, sur un certain type de surfaces de translation<sup>7</sup> qu'il en existe et on sait même les caractériser. Comme dit précédemment, cette notion permet de construire des groupes de Veech infiniment engendrés par le théorème suivant :

**Théorème 2.8.** *Soit  $X$  une surface de Veech et  $P$  un point de connexion non-périodique sur  $X$ . Alors les surfaces de translation obtenues comme revêtement (fini) de translation<sup>8</sup> de  $X$  ramifié en  $P$  sont infiniment engendrées et du premier type.*

### Etude des éléments paraboliques dans le groupe de Veech et décomposition en cylindres.

Il existe une caractérisation géométrique et dynamique des éléments paraboliques du groupe de Veech. Cette caractérisation permet dans certains cas de calculer explicitement le groupe de Veech. Pour l'énoncer, il faut comprendre la notion de *décomposition en cylindres* d'une surface de translation dans la direction  $\theta$ .

**Définition 2.9.** (1) Un cylindre dans la direction  $\theta$  sur une surface de translation  $X$  est un ensemble maximal connexe de géodésiques de direction  $\theta$  fermées simples

7. Les surfaces de translation à corps d'holonomie quadratique, que l'on verra plus tard.

8. Il faut demander à ces revêtements que les singularités soient envoyées exactement sur les singularités, [HS04] parle de *balanced translation covers*.

homotopes.

(2) Une surface de translation est alors dite *décomposable en cylindres* si elle se décompose en un nombre fini de cylindres qui recouvrent la surface excepté un nombre fini de connexions de selles.

Concrètement, un cylindre se présentera sous la forme de la figure 5<sup>9</sup>. Le module d'un cylindre sera alors le rapport  $\frac{\text{hauteur}}{\text{longueur}}$  du rectangle définissant le cylindre. Une décomposition en cylindres d'une surface de translation est donc une représentation polygonale de la surface de translation faite de rectangles.



FIGURE 5 – Un exemple de cylindre. Les directions horizontales forment un ensemble connexe maximal de géodésiques horizontales fermées simples et homotopes.

Enfin, une matrice possède un élément parabolique (resp.hyperbolique) dans la direction  $\theta$  si la direction  $\theta$  est direction propre d'une matrice parabolique (resp.hyperbolique) du groupe de Veech.

Armé de ces précisions, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.10.** *Soit  $X$  une surface de translation. Dans  $SL(X)$ , il existe un élément parabolique dans la direction  $\theta$  si et seulement si  $X$  est décomposable en cylindres dans la direction  $\theta$  et que les modules de cylindres sont commensurables.*

**Corps d'holonomie :** Pour définir le corps d'holonomie d'une surface de translation, il faut plutôt voir cette surface de translation comme une surface de Riemann  $X$  de genre  $g$  équipée d'une 1-forme holomorphe  $\omega$  qui s'annule exactement en des singularités représentées par un ensemble  $\Sigma$ . Ce point de vue est complémentaire à celui par les recollement de polygones<sup>10</sup>. Il est le plus adapté pour définir le corps d'holonomie proprement. Pour cela, on considère l'application :

$$\rho : \pi_1(X, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

9. Les bords horizontaux sont des connexions de selles et n'appartiennent pas au cylindre.

10. On trouvera une preuve de l'équivalence de ces deux définitions dans [Mas00].

**Définition 2.11.** On se donne deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  linéairement indépendants dans l'image de  $\rho$ . Le *corps d'holonomie*  $K$  de la surface de translation  $(X, \Sigma)$  comme le plus petit corps tel que l'image de  $\rho$  est contenu dans  $Vect_K(e_1, e_2)$ <sup>11</sup>.

*Remarque 2.12.* On peut montrer que  $K$  ne dépend pas du choix des vecteurs linéairement indépendants.

*Remarque 2.13.* Concrètement, sur le polygone, le corps d'holonomie est le corps dans lequel s'exprime les coordonnées de tous les sommets du polygone (dès lors que l'on met un sommet en l'origine, et deux segments ayant pour vecteurs  $(1,0)$  et  $(0,1)$ ).

Le théorème suivant nous permet de comprendre en quoi cette notion nous intéresse :

**Théorème 2.14.** *Les points de connexion sont à coordonnées dans le corps d'holonomie. De plus, si le corps d'holonomie est quadratique sur  $\mathbb{Q}$ , les points de connexion sont exactement les points à coordonnées dans le corps d'holonomie.*

### 3 Points de connexion du double heptagone.

Le but de la suite va être de regarder ce qu'il se passe lorsque le corps d'holonomie est de degré supérieur. On ne connaît pas les points de connexion pour de telles surfaces (hormis les points périodiques). Ici on va s'intéresser à la surface du double heptagone, puisqu'il s'agit de l'un des exemples les plus simples de surfaces de Veech à corps d'holonomie cubique.

Pour aborder le problème, nous allons regarder un algorithme dit de "pgcd" décrit dans [DL18] pour le double pentagone. Il apparaît qu'il permet de trouver des directions hyperboliques dans le corps d'holonomie, ce qui permet en particulier d'exhiber des points qui *ne sont pas* des points de connexion, et en particulier, le *point central* du double heptagone, dont on arrive à montrer qu'il n'est pas de connexion en exhibant une direction séparatrice issue du point central dans une direction parabolique

Plus précisément, on a les résultats suivants :

**Théorème 3.1** ([DL18]). *Une direction du double  $(2n + 1)$ -gone est parabolique si et seulement si l'algorithme termine sur la direction horizontale.*

**Proposition 3.2.** *Il existe des directions pour lesquelles l'algorithme termine sur une suite périodique de directions. On a la caractérisation suivante :*

---

11. La terminologie corps d'holonomie provient du fait que l'application  $\rho$  peut être vue comme l'application d'holonomie associée à la  $(Trans(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$  structure.

*Les directions (pré-)périodiques pour l'algorithme de pgcd correspondent à des directions propres des matrices hyperboliques dont les valeurs propres sont dans le corps d'holonomie.*

**Conjecture 3.3.** : *Pour le double-heptagone, toute direction dans le corps d'holonomie de  $X$  est direction propre d'une matrice du groupe de Veech.*

**Conjecture 3.4.** *Sur le double  $(2n + 1)$ -gone, les directions hyperboliques sont exactement les directions pré-périodiques pour l'algorithme de pgcd.*

### Points centraux

. Comme on l'a dit, l'algorithme en question permet d'exhiber des points à coordonnées dans  $K$  qui ne sont pas de connexion. Notamment, on peut "tester" si des points fixés ne sont pas de connexion en prenant plein de séparatrices passant par ce point et en regardant si, après un certain nombre d'étapes fixées, l'algorithme a terminé sur une orbite périodique, auquel cas le point de départ ne peut pas être de connexion.

Un point intéressant à tester est le point central du double heptagone. L'appellation est un peu abusive, puisqu'il s'agit du centre de l'un des deux heptagones. Une question de P.Hubert et T.Schmidt était justement si ces points sont de connexion ou pas. Finalement, on obtient une réponse négative :

**Proposition 3.5.** *Les points centraux du double heptagone ne sont pas de connexion.*

## Références

- [DL18] Diana Davis and Samuel Lelièvre. Periodic paths on the pentagon, double pentagon and golden l. *Preprint*, 2018.
- [HS04] Pascal Hubert and Thomas Schmidt. Infinitely generated veech groups. *Duke mathematical journal*, 123, pages 49–69, 2004.
- [Mas00] Howard Masur. Ergodic theory of translations surfaces. 2000.
- [McM05] Curt McMullen. Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2005.
- [Vee89] W.A. Veech. Teichmüller curves in moduli spaces, eisenstein series and application to triangular billiards. *Invent. math.* 97, pages 553–583, 1989.
- [Wri14] Alex Wright. Translation surfaces and their orbit closures : an introduction for a broad audience. 2014.
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. 2006.