Introduction à la géométrie G_2

Thibault Langlais

21 septembre 2020

Introduction

Un concept central en géométrie riemannienne est la notion d'holonomie. Si M est une variété différentielle réelle, et g une métrique riemannienne sur M, il existe une unique connexion ∇ sur TM telle que $\nabla g = 0$ et ∇ est sans torsion, c'est-à-dire satisfait l'égalité $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. On l'appelle la *connexion de Levi-Civita*. Grace à cette connexion, on peut définir le transport parallèle de vecteurs le long d'un chemin dans M. Le transport parallèle le long d'un boucle basée en $p \in M$ définit une isométrie de l'espace tangent T_pM, et le groupe de toutes les isométries obtenues de cette manière s'appelle le groupe d'holonomie de g. Il se trouve que les propriétés géométriques d'une variété riemannienne sont essentiellement déterminées par son holonomie, ce qui permet de classifier les variétés riemanniennes. Les espaces symétriques sont des variétés riemanniennes telles que l'involution géodésique en tout point peut être étendue en une isométrie globale. De tels espaces sont des espaces homogènes et admettent une action transitive d'un groupe de Lie par isométries. Ils ont été classifiés par Cartan [4, 5], en utilisant la théorie des algèbres de Lie. En 1955, Berger [1] classifia les groupes d'holonomie possibles pour les variétés complètes, simplement connexes et non-symétriques, prouvant qu'il existait au plus sept possibilités. Dans le cas général, le groupe d'holonomie d'une variété de dimension n est le groupe $SO(n)$ tout entier. Viennent ensuite quatre familles infinies de groupes d'holonomie, $U(m)$ et $SU(m)$ pour $n = 2m$, et $Sp(m)$ et $Sp(1).Sp(m)$ pour $n = 4m$. Ces groupes d'holonomie correspondent respectivement aux variétés kähleriennes, hyperkähler, quaternioniques et quaternionique-kähler, et l'existence de telles variétés peut être démontrée grace à des techniques de géométrie algébrique. Les deux dernières possibilités sont appelées les groupes d'holonomie exceptionnels, et sont $G_2 \subset SO(7)$ et $\mathrm{Spin}(7) \subset SO(8)$. Néanmoins, à l'époque de Berger, l'existence de variétés d'holonomie exceptionnelle n'était pas établie, et il faut attendre 1989 pour la première construction par Bryant [3] de variétés riemanniennes complètes d'holonomie G_2 et $SO(8)$. Les premiers exemples de variétés G_2 et $SO(8)$ compactes furent exhibés en par Joyce [13, 14] en 1996. Dans les deux dernières décennies, un grand nombres de variétés à holonomie exceptionnelle ont été construites, utilisant souvent les mêmes techniques de base, mais très peu de choses sont connues sur la théorie générale des variétés d'holonomie exceptionnelle.

1 Holonomie

1.1 Transport parallèle

Les notions de transport parallèle et d'holonomie peuvent être formulées pour n'importe quelle connexion, et pas seulement pour la connexion de Levi-Civita, c'est pourquoi nous allons commencer par quelques rappels généraux au sujet des connexions. Il existe plusieurs points de vue sur cette notion, celui des fibrés vectoriels et celui des fibrés principaux, qui s'avère plus puissant et général.

Fibrés principaux et vectoriels. Si G est un groupe de Lie et M une variété différentielle, un *G-fibré principal* $\pi : P \to M$ est une variété P munie d'une action à droite de G, telle que cette action est libre, l'application $P \to M$ identifie M à l'espace quotient P/G, et telle que l'action de G sur P admet des trivialisations locales. Une trivialisation locale est par définition un difféomorphisme G-equivariant $U \times G \to \pi^{-1}(U)$, où $U \subset M$ est un ouvert et G agit à droite sur $U \times G$ par $(x, g) \cdot h = (x, gh)$. Un exemple important de fibré principal est le suivant. Si E est un fibré vectoriel de rang k au-dessus de M, on note, pour $x \in M$, P_x l'ensemble des isomorphismes $\mathbf{R}^k \to E_x$. Alors l'ensemble $P = \cup P_x$ est un $GL(k, \mathbf{R})$-fibré principal, appelé *fibré des repères* de E.

Le lien suivant entre fibrés principaux et fibrés vectoriels est fondamental, et explique l'importance du point de vue des fibrés principaux dans toute la discussion qui suit. Soit $P \to M$ un G-fibré principal et (V, ρ) une représentation linéaire de G. Alors le produit $P \times V$ est muni d'une action à droite de G par $(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$. On vérifie sans mal que le quotient $P \times_\rho V = (P \times V)/G$ admet une structure de fibré vectoriel au-dessus de M. Si P est trivial au-dessus d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M et on note g_{ij} les fonctions de transition associées, alors on peut décrire $P \times_\rho V$ comme le recollement des $U_i \times V$ le long des fonctions de transition $\rho(g_{ij})$. Par exemple, si P est le est le fibré des repères d'un fibré vectoriel E, et ρ désigne la représentation usuelle de $GL(k, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^k$, alors E est isomorphe à $P \times_\rho \mathbf{R}^k$. Un autre exemple particulièrement important est le fibré $\mathrm{Ad}\, P = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ associé à la représentation adjointe de G sur son algèbre de Lie.

Connexions. Si E est un fibré vectoriel sur M, une *connexion* sur E est une application linéaire $\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ qui satisfait, pour toute fonction f sur M et toute section u de E, la règle de Leibniz suivante :

$$\nabla(fu) = df \otimes u + f\nabla u \tag{1}$$

Si $\gamma : [0, 1] \to M$ est un chemin C^1 dans M et $u(t)$ une section de E au-dessus de γ, on peut définir à partir de ∇ la *dérivée covariante* $\frac{D}{dt}u(t)$, qui est une section de E au-dessus de γ. On dit qu'une section est *parallèle* au-dessus de γ si elle est de dérivée covariante identiquement nulle. Par la théorie générale des équations différentielles ordinaires (EDO), pour tout vecteur $v \in E_{\gamma(0)}$, il existe une unique section u parallèle au-dessus de γ et telle que $u(0) = v$. On appelle alors $v' = u(1) \in E_{\gamma(1)}$ le *transport parallèle* de v le long de γ. Si γ est une boucle, le transport parallèle le long de γ définit un automorphisme de la fibre $E_{\gamma(0)}$.

Si P un G-fibré principal au-dessus de M, on appelle connexion une distribution $\mathcal{H} \subset TP$, telle que en tout point $p \in P$ on a $T_pP = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p$, où $\mathcal{V}_p$ désigne l'espace tangent à l'action de G en p, et $\mathcal{H}$ est G-équivariante au sens où $(R_g)_*\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{p\cdot g}$. On appelle $\mathcal{H}_p$ l'*espace horizontal* de la connexion en p. Une *forme de connexion* A sur P est une 1-forme $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, telle que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, on ait $A(\frac{d}{dt}p \cdot e^{t\xi}) = \xi$, et A vérifie la condition d'équivariance suivante : $R_g^*A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A$. Le noyau de A définit alors l'espace horizontal d'une connexion, et inversement étant donnée une connexion définie via son espace horizontal, on peut associer une unique forme de connexion. Par une construction classique, une connexion sur P induit une connexion sur tous les fibrés vectoriels $P \times_\rho V$ associés à une représentation ρ de G.

La notion de transport parallèle a aussi du sens sur un fibré principal P muni d'une connexion A. Si γ est une courbe C^1 sur la base M et $p \in P_{\gamma(0)}$, il existe une unique courbe $\tilde{\gamma}$ sur P telle que $\tilde{\gamma}$ est horizontale, i.e. $A(\dot{\gamma}) \equiv 0$, et $\tilde{\gamma}(0) = p$. Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, il existe alors un unique élément de $g \in G$ tel que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) \cdot g$, et on note cet élément $\mathrm{Hol}_p(\gamma)$. Si $E = P \times_\rho V$ est un fibré vectoriel associé, et ∇ est la connexion sur E induite par A, le transport parallèle sur E le long de γ n'est autre que l'automorphisme de $E_{\gamma(0)}$ induit par $\mathrm{Hol}_p(\gamma)$.

Holonomie. Le *groupe d'holonomie* d'une connexion ∇ sur un fibré vectoriel E est le groupe des automorphismes d'une fibre E_x obtenus par transport parallèle le long des boucles basées en x. Via le choix d'une base de E_x, on l'identifie à un sous-groupe de $GL(k, \mathbf{R})$, où k est le rang de E. Il est défini indépendamment du point base à conjugaison près dans $GL(k, \mathbf{R})$, et on le note souvent $\mathrm{Hol}(E, \nabla)$. De la même manière, si A est une connexion sur un G-fibré principal $P \to M$, on définit aussi l'holonomie par transport parallèle le long des boucles sur un point base fixé. L'holonomie est un sous-groupe de G, défini à conjugaison près, et noté $\mathrm{Hol}(P, A)$. Si (V, ρ) est une représentation de G et $E = P \times_\rho V$ est le fibré vectoriel associé, muni de la connexion induite par A, il est alors clair que $\mathrm{Hol}(E, \nabla) = \rho(\mathrm{Hol}(P, A))$.

Si (M, g) est une variété riemannienne de dimension n sur $\mathbf{R}^n$, le groupe d'holonomie de la connexion de Levi-Civita est tout simplement appelé groupe d'holonomie de g, noté $\mathrm{Hol}(g)$. C'est un sous-groupe de $O(n, \mathbf{R})$. On dit que M est *irréductible* si $\mathrm{Hol}(g)$ agit de manière irréductible sur $\mathbf{R}^n$, et *réductible* autrement. On peut montrer qu'une variété réductible est localement isométrique au produit de deux variétés riemanniennes [15, §3.2], et donc on s'intéresse en générale aux variétés irréductibles. Nous allons voir que le groupe d'holonomie d'une variété détermine largement sa structure.

1.2 G-structures et torsion intrinsèque

G-structures. Soit M une variété différentielle de dimension n. Le *fibré en repères tangents* F de M est par définition le fibré en repères de TM. C'est un $GL(n, \mathbf{R})$-fibré principal, et si V désigne la la représentation usuelle de $GL(n, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$, TM est isomorphe à $F \times_{GL(n,\mathbf{R})} V$. F encode naturellement la structure de tous les fibrés associés à TM : ainsi, $T^*M \simeq F \times_{GL(n,\mathbf{R})} V^*$, $\Lambda^k T^*M \simeq F \times_{GL(n,\mathbf{R})} \Lambda^k V^*$, $\mathrm{End}(TM) \simeq F \times_{GL(n,\mathbf{R})} V^* \otimes V$, etc.

Si G est un sous-groupe de $GL(n, \mathbf{R})$, une *G-structure* sur M est un sous-G-fibré principal de F. Une telle G-structure est déterminée par une collection de section locales de F, qui recouvrent M et telles que les transitions sont dans $G \subset GL(n, \mathbf{R})$. L'inclusion $P \subset F$ induit un isomorphisme $P \times_G V \simeq TM$, et de même pour tous les autres fibrés vectoriels associés. On dit qu'une connexion sur ∇ sur TM, ou de manière équivalente, une connexion sur F, peut être réduite à P si il existe une connexion A sur P telle que, sous l'isomorphisme $TM = P \times_G V$, ∇ est la connexion induite par A. L'holonomie d'une connexion ∇ s'interprète alors comme le plus petit groupe de structure auquel on peut réduire ∇ [15, Th. 2.4.5].

Tenseurs parallèles. Considérons une représentation W de $GL(n, \mathbf{R})$, et Ψ_0 un élément non nul de W. On note G le stabilisateur de Ψ_0 ; c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbf{R})$, et donc un sous-groupe de Lie. Notons que le stabilisateur d'un élément dans l'orbite de Ψ_0 est conjugué à G, et donc on pourrait choisir n'importe quel élément dans cette orbite pour définir G. Si M admet une G-structure P, alors le fibré vectoriel $E = P \times_{GL(n,\mathbf{R})} W$ admet un système de trivialisations dont les transitions sont dans G, donc laissent invariant Ψ_0. Ainsi, il existe une section ψ de E qui s'écrit localement comme la fonction constante égale à Ψ_0 dans de bonnes trivialisations de E. Inversement, étant donnée une telle section

ψ de E, l'ensemble des trivialisations dans lequel ψ est constante égale à Ψ_0 détermine une G-structure sur M. La proposition suivante est facile à démontrer dans de bonnes trivialisations locales :

Proposition 1.1. *Avec les notations ci-dessus, soit P une G-structure sur M correspondant à une section ψ de E. Soit A une connexion sur F, induisant la connexion ∇ sur E. Alors A se réduit à P si et seulement si ψ est parallèle, i.e. $\nabla\psi \equiv 0$.*

Torsion. Soit M une variété et ∇ une connexion sur TM. On appelle *torsion* de ∇ le tenseur $T(\nabla) \in \Lambda^2 T^*M \otimes TM$ défini par

$$T(\nabla)(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2}$$

On dit que ∇ est sans torsion si $T(\nabla) \equiv 0$. Par exemple, la connexion de Levi-Civita est sans torsion ; c'est même par définition l'unique connexion sans torsion et compatible avec g, i.e. $\nabla g = 0$. Si P est une G-structure sur M et ∇, ∇' sont deux connexions induites par P, on montre facilement que $\alpha = \nabla' - \nabla$ est une 1-forme à valeurs dans $\mathrm{Ad}\, P \subset \mathrm{End}(TM)$. De plus les torsions associées satisfont :

$$T(\nabla') - T(\nabla) = \alpha(X)Y - \alpha(Y)X \tag{3}$$

Si E désigne le fibré obtenu comme le quotient de $\Lambda^2 T^*M \otimes TM$ par l'image du morphisme

$$\alpha \in T^*M \otimes \mathrm{Ad}\, P \longmapsto ((X,Y) \mapsto \alpha(X)Y - \alpha(Y)X) \in \Lambda^2 T^*M \otimes TM \tag{4}$$

alors l'image de $T(\nabla)$ dans $C^\infty(E)$ ne dépend pas du choix de la connexion sur P. On l'appelle *torsion intrinsèque* de P, parfois noté $\tau(P)$. On dit que $\tau(P)$ est sans torsion si $\tau(P) \equiv 0$, ce qui équivaut au fait que P admet une connexion sans torsion.

Exemples. Une $GL(n, \mathbf{C})$-structure sur une variété différentielle de dimension $2n$ est équivalente à la donnée d'une *structure presque complexe*, c'est-à-dire un endomorphisme $J \in \mathrm{End}(TM)$ tel que $J^2 = -1$. J est dite *intégrable* s'il existe une structure de variété complexe sur M qui induit la structure J. On peut montrer que la condition d'être sans torsion pour J équivaut à la condition d'être intégrable.

De manière similaire, on peut montrer qu'une forme *symplectique* sur M, c'est-à-dire une 2-forme fermée non-dégénérée en tout point, est équivalente à la donnée d'une structure symplectique sans torsion, où le groupe de structure est le groupe préservant la forme symplectique canonique de $\mathbf{R}^{2n}$.

Sous-groupes de $SO(n)$. Dans ce paragraphe, on veut interpréter la condition sans torsion pour un groupe de structure contenu dans $SO(n)$, ce qui couvre la plupart des cas intéressants que nous n'avons pas traités en exemple juste au-dessus. Soit W une représentation de $GL(n, \mathbf{R})$ et $\Psi_0 \in W$ non nul. On note G le stabilisateur de Ψ_0. On suppose que G peut être identifié à un sous-groupe de $SO(n)$, c'est-à-dire que Ψ_0 détermine un produit scalaire g_0 sur $V = \mathbf{R}^n$. Alors une G-structure ψ sur M détermine une métrique riemannienne g_ψ. On peut alors montrer que ψ est sans torsion si et seulement si $\nabla\psi \equiv 0$, où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g_ψ. En général, $V^* \otimes W$ n'est pas une représentation irréductible de G, et la torsion intrinsèque de ψ s'identifie à la projection de $\nabla\psi$ sur certaines de ses composantes irréductibles.

Par exemple, si $W = \Lambda^2 V^* \oplus V^* \otimes V$ et $\psi_0 = (\omega_0, J_0)$ est un couple ou ω_0 est non-dégénérée, J_0 est une structure complexe sur V et le couple vérifie la condition de compatibilité, i.e. $\omega_0(\cdot, J_0 \cdot)$ est symétrique et définie positive, alors on prend $g_0 = \omega_0(\cdot, J_0 \cdot)$. Le stabilisateur d'un tel couple s'identifie au groupe unitaire $U(m)$ où $n = 2m$. Une $U(m)$-structure sur M donne un triplet compatible (g, ω, J), et cette structure est sans torsion si et seulement si $\nabla\omega \equiv 0$ (ou de manière équivalente $\nabla J \equiv 0$). Il est bien connu que cette structure fait de M une variété kählerienne (en particulier, J est donc intégrable).

2 Géométrie des variétés G_2

Après ces préliminaires importants, il est temps d'introduire le groupe $G_2 \subset SO(7)$ qui va nous intéresser dans la suite. Comme mentionné en introduction, G_2 est l'un des deux groupes exceptionnels (avec $\mathrm{Spin}(7) \subset SO(8)$) qui peuvent être l'holonomie d'une variété complète, irréductible, simplement connexe et non-symétrique. Une variété riemannienne dont l'holonomie est contenue dans G_2, ou de manière équivalente qui possède une structure G_2 de torsion nulle, est appelée *variété G_2*.

2.1 Le groupe G_2

Formes positives. Soit V un espace vectoriel réel orienté, muni d'une base directe $(e_1, ..., e_7)$, et d'une base duale $(e^1, ..., e^7)$. On définit la 3-forme $\varphi_0 \in \Lambda^3 V^*$ par

$$\varphi_0 = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{245} - e^{236} \tag{5}$$

G_2 est par définition le sous-groupe de $GL(7, \mathbf{R})$ qui stabilise φ_0. Le groupe G_2 préserve aussi le produit scalaire euclidien $g_0 = \sum (e^j)^2$, ainsi que la 4-forme duale de φ_0 :

$$* \varphi_0 = e^{1367} + e^{1457} + e^{2357} - e^{2467} + e^{1234} + e^{1256} + e^{3456} \tag{6}$$

On montre que G_2 est un groupe de Lie compact, simplement connexe et de dimension 14 [18]. Une première remarque importante est exprimée dans le lemme suivant :

Lemme 2.1. *L'orbite sous $GL_+(V)$ de φ_0 dans $\Lambda^3 V^*$ est ouverte.*

Cela découle d'un simple calcul de dimensions, puisque $GL(V)$ est de dimension 49 et $\Lambda^3 V^*$ de dimension $35 = 49 - 14$. Une 3-forme dans l'orbite de φ_0 est appelée *forme positive*.

Structures G_2. Soit M une variété orientée de dimension 7. Une structure G_2 sur M est déterminée par la donnée d'une forme positive $\varphi \in \Omega^3(M)$, c'est-à-dire une 3-forme telle que pour tout $x \in M$, φ_x est une forme positive sur l'espace vectoriel orienté $T_x M$. Notons que l'ensemble des structures G_2 sur M forme un ouvert de $\Omega^3(M)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Une G_2-structure φ détermine une métrique g_φ sur M, et le dual $*_\varphi \varphi$ de φ par rapport à cette métrique est souvent noté $\Theta(\varphi)$. Il est important de remarquer que l'application Θ est *non-linéaire*, puisque l'on prend le dual par rapport à une métrique qui dépend de φ. Le résultat suivant caractérise les structure G_2 de torsion nulle [10] :

Proposition 2.2. *Une structure G_2 φ est sans torsion si et seulement si*

$$d\varphi = 0 = d\Theta(\varphi) \tag{7}$$

Ainsi, la condition d'être sans torsion s'exprime comme une EDP non-linéaire du premier ordre. C'est le caractère non-linéaire qui explique en grande partie la difficulté pour construire et étudier les variétés G_2.

2.2 Formes différentielles sur une variété G_2

Formes harmoniques. On s'intéresse ici à la topologie des variétés G_2 compactes. La compacité permet d'utiliser des techniques d'analyse harmoniques. Rappelons que si (M^n, g) est une variété riemannienne, l'espace vectoriel des formes différentielles est naturellement muni d'un produit L^2. L'opérateur $d^* = (-1)^{kn+n+1} * d* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ est l'adjoint formel de d par rapport au produit L^2, au sens où

$$\langle d\eta, \nu \rangle_{L^2} = \langle \eta, d^*\nu \rangle_{L^2} \tag{8}$$

pour tous $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ et $\nu \in \Omega^k(M)$, à support compact si M n'est pas supposée compacte. Le l'opérateur laplacien est défini par $\Delta = dd^* + d^*d$. Δ préserve le degré des formes, et est formellement auto-adjoint, i.e. $\langle \Delta\eta, \nu \rangle_{L^2} = \langle \eta, \Delta\nu \rangle_{L^2}$ pour tous $\eta, \nu \in \Omega^k(M)$ à support compact. Une forme η telle que $\Delta\eta = 0$ est appelée *forme harmonique*, et une forme telle que $d^*\eta = 0$ est dite *co-fermée*. Sur une variété compacte, il découle directement des définitions qu'une forme est harmonique si et seulement si elle est fermée et co-fermée.

On suppose maintenant que M est compacte. Le Laplacien $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ est un opérateur *elliptique*, c'est-à-dire que son symbole principal et un isomorphisme en chaque point de M (c.f. l'appendice du livre de Besse [2]). Cela a plusieurs conséquences importante. En premier lieu, on dispose de la *régularité elliptique*, qui stipule que les solutions d'une équation elliptique à coefficients C^∞ sont C^∞. Par ailleurs, tout opérateur différentiel elliptique linéaire sur une variété compacte est Fredholm, correctement interprété comme un opérateur entre espaces de Hölder ou de Sobolev de sections, c'est-à-dire que son noyau et son co-noyau sont de dimension finie.

En appliquant ces résultats à l'opérateur $d + d^*$ qui est lui aussi elliptique, on obtient la décomposition de Hodge $\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k \oplus d\Omega^{k-1}(M) \oplus d^*\Omega^{k+1}(M)$, la somme directe étant orthogonale. Cela implique le résultat suivant sur la représentabilité des classes de cohomologie réelles sur une variété compacte :

Théorème 2.3 (Hodge) *Toute classe de cohomologie réelle admet un unique représentant harmonique, c'est-à-dire $\mathcal{H}^k \simeq H^k(M, \mathbf{R})$.*

Décomposition des formes différentielles. Soit P une G_2-structure sur une variété M, et φ la forme positive associée. Comme on l'a signalé, l'espace tangent s'identifie à $P \times_{G_2} V$, où V est la représentation usuelle de G_2 sur $\mathbf{R}^7$. Cette représentation est irréductible, tout comme la représentation duale V^*. La représentation $\Lambda^2 V^*$ n'est pas irréductible, mais se décompose comme $\Lambda^2 V^* = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$, où $\Lambda^2_7 \simeq V^*$ et Λ^2_{14} s'identifie à la représentation adjointe de G_2. De même on a une décomposition $\Lambda^3 V^* \simeq \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$, où $\Lambda^1_7 \simeq \mathbf{R}$ est la droite engendrée par φ_0, $\Lambda^3_7 \simeq V^*$ et Λ^3_{27} est de dimension 27. Par dualité, on a des isomorphismes $\Lambda^k V^* \simeq \Lambda^{7-k} V^*$, ce qui donne une décomposition en représentations irréductibles de ΛV^*.

Il découle de ces décompositions linéaires une décomposition de l'espace des formes différentielles $\Omega^2(M) = \Omega^2_7 \oplus \Omega^2_{14}$ et $\Omega^3(M) = \Omega^3_1 \oplus \Omega^3_7 \oplus \Omega^3_{27}$, où $\Omega^3_1 \simeq \Omega^0(M)$ est engendré par la forme positive φ. Cette décomposition est analogue à la decomposition en formes de type (p, q) pour une variété complexe. Si φ est sans torsion, on peut alors montrer que le laplacien préserve le type de forme (c'est une conséquence de la formule de Weitzenböck, c.f. [2, 1.I]). Combiné avec le théorème de Hodge, on a donc une décomposition de la cohomologie réelle $H^2(M, \mathbf{R}) \simeq H^2_7 \oplus H^2_{14}$ et $H^3(M, \mathbf{R}) \simeq H^3_1 \oplus H^3_7 \oplus H^2_{27}$, où H^k_l s'identifie à l'espace des formes harmoniques de Ω^k_l. On définit alors les nombres de Betti raffinés $b^2 = b^2_7 + b^2_{14}$ et $b^3 = b^3_1 + b^3_7 + b^3_{27}$. On a alors $b^1 = b^2_7 = b^3_7$ et que $b^3_1 = 1$ puisque $H^3_1 = \mathbf{R}\varphi$. Pour une variété simplement connexe, $b^1 = 0$ et donc les deux seuls nombres de Betti inconnus sont b^2_{14} et b^3_{27}. C'est le même genre de situation que l'on rencontre pour les variétés kähleriennes, où l'on peut décomposer la cohomologie complexe en termes de formes harmoniques de type (p, q) et on où a les égalités naturelles $b^{p,q} = b^{q,p}$.

3 Problèmes plus avancés en géométrie G_2

On peut formuler plusieurs questions intéressantes au sujet des variétés G_2. Premièrement, comment déterminer si une variété différentielle donnée, de dimension 7, admet une métrique G_2 ? Si certaines obstructions sont connues, elles sont loin d'apporter une réponse complète à la question, en dehors des exemples pour lesquels des constructions explicites sont connues. Une seconde question consiste à construire des invariants pour distinguer deux structures G_2 différentes. Comme souvent en géométrie, la construction de ces invariants nécessite une bonne compréhension de l'espace de module. S'il est connu, par un résultat de Joyce [15, §10.4], que l'espace de module des structures G_2 sur une variété compacte est une variété de dimension finie, ce résultat est purement local et ne fournit aucune information globale sur la topologie de l'espace de module.

3.1 Espace de module des structures G_2 sans torsion

Espace de module. Un objet d'étude important en géométrie G_2 est l'*espace de module* des structures G_2 sur une variété orientée M, que l'on suppose compacte pour simplifier. Formellement, on note $\mathcal{P}^3M$ l'ensemble des formes positives sur M, et $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}^3M$ l'ensemble des structures sans torsions ; ce sont les solutions de l'équation $d\varphi = 0 = d\Theta(\varphi)$. Soit $\mathcal{G}$ le groupe des difféomorphismes de M isotopes à l'identité. $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie de dimension infinie, qui agit sur $\mathcal{P}^3M$ par tiré en arrière. L'action par tiré en arrière commute avec l'opérateur d et l'application Θ, et donc cette action se réduit en une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{S}$. L'espace de module des structures G_2 est le quotient $\mathcal{M} = \mathcal{S}/\mathcal{G}$. Cet espace est naturellement muni de la topologie quotient. En fait, $\mathcal{M}$ admet une structure de variété différentielle :

Théorème 3.1 (Joyce) *Soit M une variété compacte, qui admet une structure G_2 sans torsion. Alors l'espace de module $\mathcal{M}$ des structures G_2 sur M est une variété lisse de dimension $b^3(M)$.*

Idée de preuve. La démonstration de ce résultat est très technique, mais repose sur quelques arguments classiques dans ce genre de problème, et en particulier l'application du théorème des fonctions implicites. Nous renvoyons au livre de Joyce pour une démonstration complète [15, §§10.3-10.4], et nous donnons seulement quelques idées de la preuve.

La première étape consiste briser l'invariance par difféomorphisme de l'équation $d\varphi = 0 = d\Theta(\varphi)$. Cela se fait grâce à un théorème de section, similaire au théorème de section d'Ebin [9] :

Théorème 3.2 *Soit (M, φ, g) une variété G_2, G_φ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui laisse φ invariant, et L_φ l'ensemble des 3-formes $\tilde{\varphi}$ sur M telles que $\pi_7(d^*\tilde{\varphi}) = 0$ pour la décomposition de Λ^3T^*M induite par φ. Alors il existe un voisinage de $\varphi\mathcal{G}$ dans $C^\infty(\mathcal{P}^3M)/\mathcal{G}$ homéomorphe à L_φ/G_φ.*

Géométriquement, L_φ est l'espace orthogonal à l'action infinitésimale de $\mathcal{G}$ sur φ dans $\Omega^3(M)$. La condition $\pi_7(d^*\tilde{\varphi})$ assure donc la transversalité à l'action des champs de vecteurs, et ainsi fixe l'invariance par difféomorphisme des equations, à un groupe compact de dimension fini près, G_φ, qui est souvent trivial.

Si on fixe une structure G_2 sans torsion sur M, on cherche donc à résoudre $d\Theta(\tilde{\varphi}) = 0$ pour une forme fermée $\tilde{\varphi}$, proche de φ. Par décomposition de Hodge, on cherche $\tilde{\varphi}$ sous la forme $\tilde{\varphi} = \varphi + \xi + d\eta$, où l'on ξ est harmonique, η est une 2-forme, unique si l'on impose que η soit orthogonale à $\mathcal{H}^2$ et $d^*\eta = 0$. Par ailleurs, on a la condition de jauge $\pi_7(d\tilde{\varphi}) = 0$. On peut alors réécrire la condition de torsion nulle de la manière suivante [15, Th. 10.3.6] :

Théorème 3.3 *Soit (M, φ, g) une variété G_2 compacte, $\eta \in \Omega^2(M)$, et $\xi \in \mathcal{H}^3$. On peut écrire $\Theta(\tilde{\varphi}) = *\varphi + L(\xi + d\eta) + F(\xi + d\eta)$, où L est la linéarisation de Θ en φ, et F la partie non-linéaire. Alors, si $\xi + d\eta$ est suffisamment proche de 0, $\Delta\eta = *dF(\xi + d\eta)$ si et seulement si $d^*\eta = 0$, $\pi_7(d^*\tilde{\varphi}) = 0$ et $d\Theta(\tilde{\varphi}) = 0$.*

Ce théorème est purement technique et n'éclaire pas vraiment la situation. Le point important ici et que la condition de jauge choisie permet de réduire au voisinage de φ l'équation $d\Theta(\varphi + \xi + d\eta) = 0$ à une équation qui est *quasilinéaire elliptique* en η.

Étant donnés ces préliminaires, la régularité de l'espace de module découle du théorème des fonctions implicites. On fixe un exposant de Hölder $\alpha \in (0, 1)$ et on note $V^{k,\alpha}$ un voisinage de 0 dans l'ensemble des sections de $\Lambda^3 T^*M$ de classe $C^{k,\alpha}$ et orthogonales à $\mathcal{H}^2$, et $U^{k,\alpha}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}^3 \times V^{k,\alpha}$. Ce sont des ouverts d'espaces de Banach. On définit une application $G(\xi, \eta) = \Delta\eta - *dF(\xi + d\eta)$ de $U^{2,\alpha}$ dans $V^{0,\alpha}$. Puisque F est quadratique au voisinage de 0, la linéarisation de G en $(0, 0)$ le long de $V^{2,\alpha}$ n'est autre que le Laplacien $\Delta : T_0V^{2,\alpha} \to T_0V^{0,\alpha}$, qui est un isomorphisme. Par le théorème de fonctions implicites, pour tout $\xi \in \mathcal{H}^3$ assez proche de 0, il existe un unique $\eta \in V^{2,\alpha}$ tel que $d\Theta(\varphi + \xi + d\eta) = 0$. Par régularité elliptique, η est C^∞. Ainsi, $\mathcal{M}$ est une variété différentielle de dimension $b^3(M)$, et l'application qui associe à la classe de φ dans $\mathcal{M}$ sa classe de cohomologie dans $H^3(M, \mathbf{R})$ est un difféomorphisme local.

Remarque. Pour le lecteur qui connaît la théorie des surfaces K3, ce théorème est analogue au théorème de Torelli, du moins dans sa version locale. Néanmoins, contrairement au cas des surfaces K3, l'application $\varphi \mapsto [\varphi] \in H^3$ n'est pas injective. À notre connaissance, aucune description globale satisfaisante de l'espace de module des structures G_2 de torsion nulle n'est connue.

3.2 Constructions

Exemples réductibles Comme nous l'avons mentionné plus haut, la non-linéarité de l'équation $d\Theta(\varphi) = 0$ qui définit les structures G_2 sans torsion (avec la condition $d\varphi = 0$) explique la difficulté à construire des variétés à dont l'holonomie est le groupe G_2 tout entier. Bien entendu, puisque l'on a une suite d'inclusions $1 \subset SU(2) \subset SU(3) \subset G_2$, on peut facilement construire des variétés dont l'holonomie est contenue dans G_2 en prenant des produits $B \times \mathbf{R}^k$ ou $B \times S^k$, où B est une variété d'holonomie $SU(2)$ ou $SU(3)$ et $\mathbf{R}^k$ est équipé de la métrique euclidienne, ou S^k dans le cas compact. Néanmoins, ces variétés sont trivialement réductibles. Pour autant, un grand nombre de constructions connues exploitent d'une manière ou d'une autre certaines inclusions entre groupes d'holonomie, mais de manière moins naïve.

Cohomogénéité 1. On dit l'action d'un groupe de Lie G sur une variété M est de *cohomogénéité* 1 si l'orbite d'un point générique est une sous-variété de codimension 1. Par exemple, l'action de $SO(3)$ sur S^2 induit une action de $SO(3)$ sur T^*S^2, qui est libre en-dehors de la sphère S^2 (identifiée à la section nulle). Ainsi, toutes les orbites sont de codimension 1, en-dehors de l'orbite exceptionnelle correspondant à la section triviale.

On dit qu'une variété G_2 est de cohomogénéité 1 si elle admet une action de cohomogénéité 1 d'un groupe de Lie qui préserve la structure G_2. Le premier exemple de variété G_2 complète construit par Bryant est une variété de cohomogénéité 1. Du point de vue topologique, M est l'espace total du fibré spin au-dessus de S^3. Il admet une action de cohomogénéité 1 par le groupe $\mathrm{Spin}(4) \simeq S^3 \times S^3$, libre en dehors de l'orbite exceptionnelle correspondant à la section triviale. Ainsi, topologiquement, $M \simeq S^3 \cup (S^3 \times S^3 \times \mathbf{R}_+^*)$. Les structure G_2 invariantes sous l'action de $\mathrm{Spin}(4)$ sont alors de la forme $\varphi = f(r)\alpha + g(r)dr \wedge \beta$, où $\alpha \in \Omega^3(S^3 \times S^3)$ et $\beta \in \Omega^2(S^3 \times S^3)$ sont des formes différentielles que l'on peut décrire explicitement. Ainsi, la condition pour φ d'être sans torsion s'exprime comme une EDO non-linéaire d'ordre 1 d'inconnues (f, g), qui ne dépendent que du paramètre r. La dimension du problème est donc réduite d'un problème en dimension 7 à un problème en dimension 1, qui est beaucoup plus simple à résoudre. En prenant en compte les conditions de bord sur (f, g) pour que φ puisse s'étendre sur l'orbite exceptionnelle, on peut résoudre cette équation et ainsi trouver une métrique d'holonomie G_2. Notons que ni le fait que l'holonomie soit G_2 tout entier, ni le fait que la variété obtenue soit complète ne sont évidentes a priori, nous référons à [3] pour une preuve de ces faits.

A noter que beaucoup d'autres exemples de variétés G_2 de cohomogénéité 1 ont été construits. Ils sont très étudiés par la communauté des physiciens et de la théorie M, ou ces espaces jouent un rôle important.

Résolution d'orbifolds G_2. Les premiers exemples de variétés G_2 compactes ont été construits en considérant des résolutions du tore euclidien T^7/Γ, quotienté par un sous-groupe fini d'isométries. Un tel espace est un orbifold (i.e. il est muni de cartes homéomorphes au quotient d'un ouvert euclidien par un groupe fini) et admet une structure G_2 plate. Une *résolution* de T^7/Γ est une variété non-singulière M muni d'une application $M \to T^7/\Gamma$ qui est surjective et un difféomorphisme en-dehors des points singuliers.

La construction de Joyce considère de telles résolutions $\pi : M \to T^7/\Gamma$. Sous certaines conditions sur l'action de Γ, il existe une famille $\{\varphi_t\}_{0<t<\epsilon}$ telle que φ_t converge vers la structure G_2 singulière $\pi^*\varphi_0$, et dont la torsion est en $O(t^4)$. L'étape cruciale de la construction consiste à déformer une structure G_2 de petite torsion en une structure G_2 de torsion nulle, et c'est là que réside toute la difficulté analytique du problème. Nous référons encore au livre de Joyce [15, Ch. 11] pour plus de détails.

Fibrations et limites adiabatiques. Un certains nombre de constructions utilisent les inclusions $SU(2) \subset G_2$ et $SU(3) \subset G_2$, non pas en prenant des produits $B \times S^k$, mais en considérant plutôt des fibrations. Une construction de Foscolo-Haskins-Nordström [11] considère le cas d'un fibré en cercle $M \to B$, et l'idée est de chercher à construire des structures G_2 sans torsion invariantes par l'action de S^1 au dessus d'une variété Calabi-Yau (d'holonomie $SU(3)$). Un article de Donaldson [7] traite aussi de la possibilité de construire des variétés G_2 comme des fibrations dont la fibre générique est une surface K3 (d'holonomie $SU(2)$). Dans les deux cas, l'idée est d'introduire un paramètre ϵ qui représente la taille des fibres, les équations définissant une structure G_2 sans torsion se simplifiant dans la limite où ϵ tend vers 0. Les métriques G_2 ainsi construites viennent en familles paramétrisées par ϵ, et convergent avec courbure bornée vers en une métrique g_0 sur la base. Ces exemples de métriques qui dégénèrent constitue un premier pas vers une compacification de l'espace de module. En effet, on peut interpréter la métrique limite g_0 sur la base comme un point de bord de l'espace de module des structures G_2 de torsion nulle.

3.3 Obstructions et invariants.

Obstructions Le but d'une obstruction est de donner un critère pour savoir si une variété admet des structures G_2 sans torsion. De manière générale, répondre à ce type de question est très ardu en géométrie. Ainsi, savoir si la sphère S^6 admet une structure complexe est un problème encore ouvert, et réputé très difficile. Citons comme exemple modèle dans lequel une réponse complète est connue le cas des variétés à holonomie $SU(n)$. Prouvant une conjecture de Calabi, un résultat célèbre de Yau [20] implique qu'une variété simplement connexe, compacte et kählerienne admet une métrique d'holonomie $SU(n)$ si et seulement si sa première classe de Chern est nulle. Cela réduit la recherche de variétés d'holonomie $SU(n)$ à la recherche de variétés kähleriennes qui satisfont certaines contraintes topologiques. En géométrie G_2, certaines obstructions existent, mais elles sont très loin de conner une condition nécessaire et suffisante à l'existence de métriques G_2 sur une variété.

Obstructions topologiques. Si M est une variété compacte, et φ une structure G_2 sans torsion sur M, alors φ est harmonique par rapport à la métrique induite g_φ. Par le théorème de Hodge, cela implique que $H^3(M)$ doit être non-trivial, ce qui fournit une première obstruction topologique à l'existence de métriques d'holonomie G_2 sur une variété compacte. En particulier, la sphère S^7 n'admet pas de métrique d'holonomie G_2.

Une autre obstruction topologique vient du fait que G_2 est simplement connexe. Rappelons que pour $n \geq 3$, $\pi_1(SO(n)) = \mathbf{Z}_2$, et le groupe $\mathrm{Spin}(n)$ est le revêtement universel de $SO(n)$. Puisque G_2 est simplement connexe, on peut relever l'inclusion naturelle $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(7) = \mathfrak{spin}(7)$ au niveau des groupes de Lie. Ainsi, G_2 s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\mathrm{Spin}(7)$. En particulier, une structure G_2 sur une variété orientée M induit une structure spin sur M. Cela signifie que la seconde classe de Stieffel-Whitney $w_2(M) \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$ doit être triviale, puisque c'est l'obstruction pour que M admette une structure spin. Notons qu'ici, on n'a même pas besoin de la condition de torsion nulle sur φ, il s'agit donc d'une obstruction à l'existence d'une section globale de $\mathcal{P}^3 M$.

Une autre obstruction topologique à l'existence de métriques d'holonomie G_2 sur une variété M vient de la première classe de Pontryagin $p_1(M) \in H^4(M)$. Par la théorie de Chern-Weil, cette classe caractéristique est représentée par la 4-forme fermée $\frac{1}{8\pi^2}\operatorname{tr}(R \wedge R)$, où R désigne la courbure de Riemann d'une métrique g sur M. Si g est d'holonomie G_2 et qu'on note φ la structure correspondante, on peut montrer par des manipulations algébriques que $\operatorname{tr}(R \wedge R) \wedge \varphi = -|R|^2 dV_g$, où dV_g est la forme volume associée à g. Ainsi on obtient

$$\langle p_1(M) \cup [\varphi], [M] \rangle = -\int_M |R|^2 dV_g \tag{9}$$

Si l'holonomie de M est G_2, R n'est pas identiquement nulle et donc le membre de droite est strictement négatif. Ainsi, $p_1(M) \neq 0$.

Invariants. Nous ne dirons que quelques mots au sujet de invariants. Le but d'un invariant et de pouvoir distinguer entre deux structures G_2 et déterminer si elles sont les mêmes à difféomorphisme près. La première chose que nous souhaitons mentionner et la construction d'invariants par Crowley-Nordström [6]. Ce sont des invariants topologiques, c'est-à-dire que ces invariants ne peuvent distinguer entre deux structures G_2 qui sont les mêmes à homéomorphisme près.

Un espoir pour construire des invariants différentiels de structures G_2 est d'étudier l'espace de module des structures G_2. Dans d'autre contextes géométriques (par exemple, la théorie de Donaldson pour les connexions ASD qui mène à des invariants différentiels pour les variétés de dimension 4 [8]), on peut espérer obtenir de tels invariants à partir d'invariants topologiques de l'espace de module. Un problème récurrent en géométrie pour réaliser ce programme est la non-compacité de l'espace de module, et beaucoup de travail est effectué pour en trouver une bonne compacification.

Conclusion

Nous souhaitons conclure par quelques remarques générales. Tout au long de ce mémoire, nous avons essayé de souligner les point communs entre la géométrie G_2 et d'autres types de géométries, et en particulier les variétés kähleriennes et hyperkähler. Si les deux posent des problèmes similaires, et les techniques utilisées pour tenter d'y répondre sont souvent analogues, l'étude des variétés d'holonomie exceptionnelle s'avère souvent beaucoup plus difficile. Une des raisons fondamentales qui explique cela est le fait que l'on peut étudier les variétés kähler et hyperkähler via la géométrie complexe. Ainsi, on dispose de tout un attirail de techniques fournies par la géométrie algébrique, et de tout un cadre théorique déjà construit et bien compris. À l'inverse, pour l'étude des variétés d'holonomie exceptionnelle, on ne dispose que de techniques d'analyse et de géométrie différentielle classiques, mais cette machinerie est loin d'être suffisamment puissante pour résoudre les problèmes qui se posent, et aucun cadre théorique pour même tenter d'y répondre n'existe à l'heure actuelle. On peut comparer avec un autre domaine relativement récent, la géométrie symplectique, dont l'essor a été permis par l'introduction des courbes pseudo-holomorphes par Gromov, qui ouvrant la voie pour la construction d'un grand nombres d'outils puissants (capacités symplectiques, homologie de Floer, etc.). Il n'existe pour l'instant aucun outil similaire en géométrie G_2 ou Spin(7).

Néanmoins, c'est un domaine de recherche très actif, notamment de par son intérêt pour la théorie M en physique, qui se propose d'unifier les différentes théories des cordes existantes, qui apparaitraient alors comme différentes limites d'une seule théorie plus générale. Il existe depuis 2016 une grande collaboration internationale, nommée *Simons Collaboration on Special Holonomy in Geometry, Analysis and Physics*, pour la recherche en géométrie exceptionnelle. Elle mobilise beaucoup de moyens et organise des réunions régulières (au moins trois colloques internationaux par an), et fournit beaucoup de matériel en ligne, notamment les vidéos des séminaires, qui permettent d'être à jour sur les dernières avancées dans le domaine.

Un denier mot, enfin, pour les étudiants de master qui souhaiteraient s'orienter vers ce sujet-là, ou des sujets reliés. La difficulté technique de ce domaine peut s'avérer très décourageante au début, d'autant plus qu'en dehors du livre de Joyce [15], qui couvre ce qui était connu en géométrie exceptionnelle avant les années 2000 (c'est-à-dire pas grand chose en dehors des premières constructions et la dimension de l'espace de module), il n'existe pas vraiment de référence sur le sujet, et il faut se confronter à la littérature de recherche pour en apprendre plus. Pour autant, c'est un très beau domaine de la géométrie, très actif et qui contient beaucoup de problèmes encore ouverts, et tout l'attirail théorique reste encore à construire. Pour donner quelques références qui m'ont été utiles, citons Kobayashi-Nomizu [16] pour les bases de l'holonomie et des fibrés principaux, Besse [2] pour l'analyse géométrique, Griffiths-Harris [12] et Voisin [19] en géométrie complexe, Kodaira [17] et Donaldson [8] pour des sujets plus avancés en géométrie, notamment pour ce qui concerne les espaces de module.

Références

[1] M. Berger. Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 83 :279–330, 1955.

[2] A. Besse. *Einstein manifolds.* Springer Science & Business Media, 2007.

[3] R. L. Bryant, S. M. Salamon, et al. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy. *Duke mathematical journal*, 58(3) :829–850, 1989.

[4] É. Cartan. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. *Acta mathematica*, 48(1-2) :1–42, 1926.

[5] É. Cartan. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 54 :214–264, 1926.

[6] D. Crowley and J. Nordström. New invariants of G_2-structures. *Geometry & Topology*, 19(5) :2949–2992, 2015.

[7] S. K. Donaldson. Adiabatic limits of co-associative Kovalev-Lefschetz fibrations. In *Algebra, geometry, and physics in the 21st century*, pages 1–29. Springer, 2017.

[8] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds.* Oxford University Press, 1990.

[9] D. G. Ebin. The moduli space of Riemannian metrics. In *Global analysis*, volume 15, pages 11–40. American Mathematical Society, 1968.

[10] M. Fernández and A. Gray. Riemannian manifolds with structure group G_2. *Annali di matematica pura ed applicata*, 132(1) :19–45, 1982.

[11] L. Foscolo, M. Haskins, and J. Nordström. Complete non-compact G_2-manifolds from asymptotically conical Calabi-Yau 3-folds. *arXiv preprint, arXiv :1709.04904*, 2017.

[12] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*, volume 19. Wiley Online Library, 1978.

[13] D. D. Joyce. Compact riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I. *Journal of Differential Geometry*, 43 :291–328, 1996.

[14] D. D. Joyce. Compact riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. II. *Journal of Differential Geometry*, 43 :329–375, 1996.

[15] D. D. Joyce. *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford University Press on Demand, 2000.

[16] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.

[17] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures.* Springer, 2006.

[18] S. Salamon. Self-duality and exceptional geometry. *Rendiconti del seminario matematico-università e politecnico di Torino*, 74(1) :291–298, 2016.

[19] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10. Société mathématique de France Paris, 2002.

[20] S.-T. Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5) :1798–1799, 1977.