Introduction au Domaine de Recherche: K-théorie algébrique

Maxime Ramzi

1 Introduction historique

Dans les années 50 Grothendieck a introduit , pour tout anneau R, un groupe aujourd'hui appelé $K_0(R)$: le 0-ème groupe de K-théorie algébrique d'un anneau R ; même si initialement il était défini comme un objet à part entière, et pas le 0-ème groupe d'un objet plus complexe.

Ce groupe est défini comme suit : on considère l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules projectifs de type fini sur R, muni de l'addition suivante : $[P]+[Q] = [P \oplus Q]$, où $[P]$ désigne la classe d'isomorphisme de P. Cela en fait un monoïde commutatif ; $K_0(R)$ est obtenu en rajoutant formellement des inverses à tous ses éléments, de la même manière que $\mathbb{Z}$ est obtenu à partir de $\mathbb{N}$ (on parle de ≪ complétion en groupe ≫)– c'est donc un groupe abélien, qui contient de l'information sur les modules projectifs sur R.

En s'inspirant de cette construction, Atiyah et Hirzebruch ont défini la K-théorie topologique, une théorie qui contient de l'information sur les fibrés vectoriels sur un espace. Cette théorie se comporte un peu comme la cohomologie singulière, au sens où il y a des groupes $K^i(X)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (X un espace topologique), reliés entre eux par différentes propriétés (plus précisément : c'est une théorie cohomologique extraordinaire).

Cette théorie a eu beaucoup de succès en topologie algébrique, permettant notamment une preuve du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

À la suite de ces travaux, et s'inspirant de l'analogie entre module projectifs et fibrés vectoriels (théorème de Serre-Swan), de nombreuses personnes ont voulu étendre le $K_0(R)$ de Grothendieck en une K-théorie graduées, avec des groupes K_1, K_2, etc. Les groupes $K_1(R), K_2(R)$ ont été définis ≪ à la main ≫ avant les autres, avec des propriétés intéressantes ; mais c'est Quillen qui a donné le premier une définition de $K_n(R), n \geq 0$, faisant intervenir de la théorie de l'homotopie dans sa définition. Celle-ci a rapidement été acceptée comme ≪ la bonne ≫ définition, et depuis, beaucoup de travaux à son sujet ont été effectués – avec notamment de nouveaux points de vue apportés à son sujet.

Nous commençons par présenter un de ces points de vue, celui où la K-théorie algébrique est définie dans l'esprit de Grothendieck, mais d'un point de vue homotopique – nous introduirons pour cela la notion d'E_∞-espace et de complétion en groupe homotopique. Puis nous présentons quelques constructions et résultats importants dans le développement de la K-théorie algébrique et dans son lien avec d'autres domaines des mathématiques ; nous concluons finalement avec quelques exemples de pistes encore à explorer de cette théorie riche.

2 Définition de la K-théorie algébrique

Le point de vue que nous allons adopter pour définir la K-théorie algébrique supérieure est le suivant : on va mimer la définition de $K_0(R)$ en termes de complétion de groupes, mais cette fois-ci en prenant en compte le fait que $P \oplus Q$ n'est, en principe, défini qu'à isomorphisme près. Ainsi on a en fait une addition qui n'est définie qu'à isomorphisme près, et n'est de même associative et commutative qu'à isomorphisme près. Pour formaliser cette idée, nous allons passer par la théorie de l'homotopie, où on sait définir la notion d'addition « définie à homotopie près ».

Nous définissons dans un premier temps ce que nous entendons par là, puis nous décrivons la notion de complétion en groupe dans ce cadre ; et finalement nous expliquons comment appliquer ça au cas des modules projectifs de type fini sur un anneau, pour donner $K(R)$, la K-théorie algébrique de R ; dont les groupes d'homotopie seront les $K_n(R)$.

Le concept qui va nous être utile pour cela est celui d'espace E_∞. La définition que nous allons donner n'est pas historiquement la première, mais elle est particulièrement pratique au vu de son élémentarité. On peut trouver son origine dans [Seg74] ; et c'est elle qui est exploitée dans [Lur17].

Il s'agit d'un analogue homotopique de la notion de monoïde commutatif. Rappelons qu'un monoïde commutatif est un ensemble M muni d'une opération binaire $\mu : M \times M \to M$, ainsi qu'une neutre $e : 1 \to M$ (on peut voir un élément de M comme une application d'un singleton vers M) satisfaisant un certain nombre d'axiomes : associativité, neutre, commutativité. Cette définition n'est pas adaptée pour définir une addition « à homotopie près », car ici l'addition est directement donnée. Il faut donc trouver un moyen d'encoder ces données de manière à pouvoir avoir plus de liberté.

Remarquons tout de suite que pour chaque n, par associativité et commutativité, on peut en fait définir une multiplication n-aire $M^n \to M$ uniquement déterminée. Cela suggère qu'en fait, on peut, au lieu de mettre M^n, simplement mettre M^S, pour n'importe quel ensemble fini S – puisque l'ordre n'importe pas.

En fait, plus généralement, dès lors qu'on a une application partielle $f : \{1, ..., n\} \rightharpoonup \{1, ..., m\}$, on peut définir sans ambiguïté une « multiplication » $M^n \to M^m$: sur la i-ème coordonnée, $i \in \{1, ..., m\}$, elle correspond à la multiplication non ambiguë $M^{f^{-1}(i)} \to M$.

Exemple 1. *On considère l'application partielle* $\{1, 2, 3, 4\} \rightharpoonup \{1, 2\}$ *définie par* $1 \mapsto 1, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 2$ *et non définie sur* 2.

La « multiplication » $M^4 \to M^2$ *induite est* $(x, y, z, w) \mapsto (xz, w)$

Si on se donne la donnée de toutes ces multiplications associées aux applications partielles, on peut retrouver complètement M : la multiplication μ est donnée par l'application totale $\{1,2\} \to \{1\}$, le neutre par l'application (totale) $\emptyset \to \{1\}$.

Ainsi, on a réussi à encoder la notion de monoïde commutatif avec beaucoup pus de données que les définitions classiques. Qu'a-t-on gagné ? À première vue, ce n'est pas clair, on a rajouté des données redondantes.

Seulement, avec ce point de vue, si plus généralement on considère un objet M qui associe à chaque ensemble fini S un ensemble $M(S)$ et à chaque application partielle $S \rightharpoonup T$ une application $M(S) \to M(T)$, on a le loisir d'avoir un $M(S)$ qui n'est pas forcément $M(1)^S$.

En effet, remarquons que l'application totale $S \to 1$ induit une multiplication $M(S) \to M(1)$, et qu'on a aussi, pour tout $i \in S$, une unique application partielle $S \rightharpoonup 1$ définie uniquement sur i, ce qui fournit alors S applications $M(S) \to M(1)$, soit une application $M(S) \to M(1)^S$.

Dans le cas où M est un monoïde usuel, ces applications correspondent aux applications coordonnées, donc en fait $M(S) \overset{\cong}{\to} M(1)^S$; et c'est ça qui permet de définir la multiplication $M(1)^S \to M(1)$:

$$M(1)^S \xleftarrow[\cong]{} M(S) \longrightarrow M(1)$$

Bien entendu, dans le cadre des ensembles, si on veut avoir une multiplication bien définie, on doit avoir un isomorphisme. Mais si on a des espaces au lieu d'ensembles, on peut se satisfaire d'avoir une multiplication bien définie *à homotopie près.*

Ainsi, ce que la formulation usuelle en termes de $\mu : M \times M \to M$ ne permet pas, cette nouvelle formulation le permet : si on demande à $M(S) \to M(1)^S$ de n'être plus un isomorphisme mais bien une équivalence (faible) d'homotopie, alors on se retrouve face au diagramme

$$M(1)^S \xleftarrow[\simeq]{} M(S) \longrightarrow M(1)$$

où on ne peut plus inverser la flèche qui va dans la mauvaise direction ni de manière unique, ni strictement. Cela indique qu'on a une multiplication définie à homotopie près : chaque quasi-inverse $M(1)^S \to M(S)$ fournit une multiplication. Mais puisqu'on a affaire à une équivalence, l'espace des quasi-inverses lui-même est contractile, et donc la multiplication est définie *à une ambiguïté contractile près* – c'est un grand thème en théorie de l'homotopie que d'avoir des choses qui ne sont plus définies uniquement (ou ≪ à unique isomorphisme près ≫) mais à un espace contractile de choix près.

On verra dans le cas de la K-théorie algébrique pourquoi cette ambiguïté est particulièrement pratique.

Ainsi, si on note Fin_* la catégorie des ensembles finis et des applications partielles (qui est équivalente à celle des ensembles finis pointés et applications pointées – cela revient à voir le point distingué comme une poubelle pour ce qui n'est pas défini), on peut définir :

Définition 1. *Un espace E_∞ est un foncteur $M : \mathrm{Fin}_* \to \mathbf{Top}$ tel que pour tout ensemble fini S, l'application définie plus haut $M(S) \to M(1)^S$ est une équivalence (faible) d'homotopie.*

Un morphisme d'espaces E_∞ est une transformation naturelle entre ces foncteurs.

Remarque 1. *Historiquement, on les appelle plutôt Γ-espaces. Les Γ-espaces sont un modèle pour les E_∞-espaces.*

La terminologie d'E_∞-espace est liée à la notion d'opérade E_∞.

Remarque 2. *La définition s'applique en particulier pour $S = \emptyset$, auquel cas la condition se réécrit comme disant que $M(\emptyset)$ est (faiblement) contractile. Cela capture l'idée que le neutre est unique.*

Remarque 3. *On pourrait avoir intérêt, et cela se fait souvent, à remplacer* **Top** *par* **sSet***, la catégorie des ensembles simpliciaux. Les notions deviennent ainsi plus maniable, et cela ne change rien à la théorie homotopique sous-jacente.*

Définition 2. *L'espace sous-jacent d'un E_∞-espace M est $M(1)$.*

Notons que si $M \to N$ est un morphisme d'espaces E_∞, alors $M(S) \to N(S)$ est une équivalence (faible) pour tout S si et seulement si c'en est une pour $S = 1$.

Notation 1. *On fera souvent l'abus de noter de la même manière M et son espace sous-jacent.*

Remarquons que $\pi_0(M)$ est canoniquement muni d'une structure de monoïde commutatif : on a le diagramme

$$M(1)^2 \xleftarrow[\simeq]{} M(2) \longrightarrow M(1)$$

qui devient, en prenant π_0,

$$\pi_0(M(1))^2 \xleftarrow[\cong]{} \pi_0(M(2)) \longrightarrow \pi_0(M(1))$$

Plus généralement, $\pi_0 \circ M : \mathrm{Fin}_* \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur qui correspond à un monoïde commutatif, au sens de la construction précédente.

Définition 3. *On dit que M est groupesque (en anglais, grouplike) si $\pi_0(M)$ est un groupe.*

Un résultat très intéressant nous dit que ce nom est bien choisi :

Proposition 1. *Si M est groupesque, et si pour tout S, $M(S)$ est un CW-complexe, alors il existe $i : M(1) \to M(1)$ telle que pour tout quasi-inverse $M(1)^2 \to M(2)$, i est un inverse à homotopie près pour la multiplication $M(1)^2 \to M(2) \to M(1)$.*

Il y a un procédé qui permet de passer d'un espace E_∞ quelconque à un espace E_∞ groupesque, et ceci « de la meilleure manière possible ». Formellement, il s'agirait d'une adjonction au sens ∞-catégorique, mais nous n'avons pas présenté ce langage, nous devons donc le définir de manière vague.

Proposition 2. *Soit M un E_∞-espace. Alors il existe un espace E_∞ groupesque, noté M^{gp}, et un morphisme d'E_∞-espaces $M \to M^{gp}$ tel que pour tout E_∞-espace groupesque N, et tout morphisme $M \to N$, il existe un morphisme $M^{gp} \to N$ tel que le diagramme suivant commute à homotopie près :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & M^{gp} \arrow[d] \\ & N \end{tikzcd}$$

et tel que l'espace de ces morphismes $M^{gp} \to N$ est contractile.

Remarque 4. *À nouveau, on n'a pas unicité du morphisme, mais unicité à un espace contractile de choix près.*

Remarque 5. *Énoncé comme ça, ce n'est pas tout à fait vrai, mais c'est vrai en un sens plus homotopique.*

On parle de complétion en groupes, ou *group-completion* en anglais.

Remarquons que c'est formellement analogue à la définition de complétion en groupe pour les monoïdes (commutatifs) usuels, et à ce qui permet de définir $K_0(R)$ pour un anneau R.

Plus précisément :

Proposition 3. *$\pi_0(M^{gp})$ est la complétion en groupe usuelle de $\pi_0(M)$*

Nous allons désormais décrire l'espace E_∞ auquel on appliquera notre construction pour obtenir la K-théorie algébrique. Les éléments de ce dernier (plus précisément de son espace sous-jacent) devraient être les modules porjectifs de type fini ; et moralement $M(S)$ devrait être quelque chose comme « les familles $(P_s)_{s\in S}$ de modules projectifs, avec un choix de somme directe $\bigoplus_{s\in S} P_s$ ».

Il faut un petit peu plus que ça, notamment pour permettre la fonctorialité : on choisit une somme directe $\bigoplus_{t\in T} P_t$ pour chaque $T \subset S$. Décrivons désormais cela plus précisément :

Pour tout S, soit $P(S)$ l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion des sous-ensembles de S, vu comme une catégorie.

Soit C une petite catégorie dans laquelle des sommes directes $\oplus$ existent, mais sans qu'on ait de modèle spécifique pour ces sommes directes. Pour tout S, soit $C(S)$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F : P(S) \to C$ qui envoient les unions disjointes sur des sommes directes (plus précisément : si F est un tel foncteur, on demande que les morphismes $F(A) \to F(A \sqcup B)$ et $F(B) \to F(A \sqcup B)$ induisent un isomorphisme $F(A) \oplus F(B) \to F(A \sqcup B)$ dès que $A, B \subset S$ sont disjoints – et aussi on demande que $F(\emptyset)$ soit un objet initial), et dont les morphismes sont les *iso*morphismes naturels entre eux.

Alors $S \mapsto C(S)$ peut être vu comme un foncteur $\mathrm{Fin}_* \to \mathbf{Cat}$ qui vérifie une propriété analogue à celle qu'on a mentionnée plus tôt pour les E_∞-espaces :

Proposition 4. *Pour tout S, le foncteur $C(S) \to C(1)^S$ défini comme dans le cas des espaces est une équivalence de catégories.*

Cela revient essentiellement à dire que la somme directe $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ est entièrement déterminée par $A_1, ..., A_n$.

Or il existe un foncteur $|-|$ qui associe un espace à toute petite catégorie, qui respecte les produits et envoie une équivalence de catégories sur une équivalence d'homotopie. En particulier :

Corollaire 1. *$S \mapsto |C(S)|$ est un E_∞-espace.*

Cela permet alors de définir :

Définition 4. *Soit C une petite catégorie telle que plus haut. Alors $K(C) := (S \mapsto |C(S)|)^{gp}$.*

Remarque 6. *Cette construction est beaucoup plus générale : elle peut s'appliquer à n'importe quelle catégorie symétrique monoïdale, c'est-à-dire une catégorie munie d'un produit tensoriel associatif et symétrique à isomorphisme près ; en fait n'importe quelle ∞-catégorie symétrique monoïdale.*

Exemple 2. *Soit C la catégorie des R-modules projectifs de type fini. Alors on vérifie facilement que $C(1)$ (avec les notations de ci-dessus) est équivalente à la catégorie des modules projectifs de type fini et des isomorphismes entre eux, donc $\pi_0 K(C)$, étant la complétion en groupe de $\pi_0|C(1)|$ d'après la proposition 3, n'est autre que $K_0(R)$.*

On peut démontrer que $\pi_1 K(C)$ correspond à la définition usuelle de $K_1(R)$, de même pour K_2 et π_2. Ainsi, $K(C)$ mérite de s'appeler $K(R)$.

Notons qu'ici, en tant qu'espace, $|C(1)|$ est homotopiquement équivalent à une réunion disjointe de $B\mathrm{Aut}(P)$, où P décrit une famille de représentants des classes d'isomorphismes de modules projectifs de type fini sur R.

En fait, plus précisément, il faudrait noter $\Omega^\infty K(C)$ plutôt que $K(C)$.

En effet, les E_∞-espaces correspondent à la partie « concentrée en degrés positifs » d'une histoire plus grande. Il y a une notion de *spectres*, qu'on ne définira pas ici, mais qui vient avec un foncteur $\Omega^\infty : \mathbf{Sp} \to E_\infty -$ espaces qui induit une équivalence entre les spectres dits connectifs et les E_∞-espaces groupesques.

Il y a une analogie formelle très forte et fructueuse entre spectres et complexes de chaînes, et les spectres connectifs correspondent, dans cette analogie, aux complexes de chaînes concentrés en degrés positifs (en notation homologique).

Ainsi, ce qu'on a noté plus haut $K(C)$, qui est un E_∞-espace groupesque par définition, correspond à un spectre connectif, qui est celui qu'on appelle en général $K(C)$.

Notation 2. *À partir de maintenant, nous notons $\Omega^\infty K(C)$ l'E_∞-espace groupesque défini plus tôt, et $K(C)$ le spectre connectif correspondant.*

La raison de ce choix, malgré l'équivalence mentionnée plus tôt, est que le monde des spectres est plus vaste, et que certaines opérations s'y comportent mieux que dans les monde des E_∞-espaces.

Nous donnons un autre exemple, fondamental, de la construction précédente :

Exemple 3. *Soit* Fin *la catégorie des ensembles finis. Elle a bien des sommes directes (les unions disjointes), donc on peut lui appliquer la construction précédente et construire* $K(\mathrm{Fin})$.

Ce spectre est, d'après le théorème de Barratt-Priddy-Quillen ([BP72]), reprouvé plus simplement par Segal dans [Seg74], le spectre sphère $\mathbb{S}$*, un objet fondamental (les groupes d'homotopie de l'espace associé sont les groupes d'homotopie stables des sphères).*

Le langage ∞*-catégorique permet de faire de cette preuve une évidence (tout le travail étant principalement formel, dans la construction de la théorie des* ∞*-catégories)*

Remarque 7. *L'auteur connait pas grand chose aux histoires de « corps à* 1 *élément », mais ce résultat est souvent interprété comme disant que* $K(\mathbb{F}_1) \simeq \mathbb{S}$.

Exemple 4. *Soit* $M = \coprod_{n\in\mathbb{N}} BGL_n(\mathbb{C})$*. Il est possible de voir* M *comme un* E_∞*-espace, où la « multiplication » correspond essentiellement à l'addition de blocs de matrices* $BGL_n(\mathbb{C}) \times BGL_m(\mathbb{C}) \to BGL_{n+m}(\mathbb{C})$ *; ou pareil avec* $BU(n)$ *au lieu de* $BGL_n(\mathbb{C})$.

Si on prend sa complétion en groupe, et le spectre connectif associé, on obtient ku *qui est, à l'inversion de l'élément de Bott près,* KU.

Chaque spectre « représente une théorie cohomologique » : KU *représente la* K*-théorie topologique (complexe – voir [Kar08] pour une introduction à la* K*-théorie topologique)*

3 Grands résultats, lien avec d'autres mathématiques

Nous allons ici décrire quelques résultats historiques en K-théorie algébrique, ainsi que quelques liens entre la K-théorie et d'autres domaines des mathématiques.

3.1 K-théorie topologique et K-théorie algébrique de $\mathbb{C}$

Le premier résultat que nous voulons mentionner relie la K-théorie de $\mathbb{C}$ et la K-théorie topologique. En effet, nous avons vaguement expliqué comment voir la K-théorie topologique comme une sorte de K-théorie algébrique : ku (le spectre connectif de la K-théorie topologique) est la complétion en groupe d'un certain E_∞-espace, qui est en réalité obtenu à partir d'une certaine « catégorie topologique ».

La K-théorie de $\mathbb{C}$ est, elle, obtenue, à partir de la même catégorie, mais où on oublie la topologie des espaces de morphismes (on voit $GL_n(\mathbb{C})$ comme le groupe discret des automorphismes de $\mathbb{C}^n$, alors que pour ku, on le voit avec sa topologie usuelle).

On a alors le résultat suivant :

Proposition 5 (Suslin). *Pour tout premier ℓ, les ℓ-complétions $K(\mathbb{C})^\wedge_\ell$ et $ku^\wedge_\ell$ sont équivalentes.*

Les ℓ-complétion qui apparaissent ici sont un analogue de la notion usuelle de ℓ-complétion (dérivée, plus exactement). Cela signifie essentiellement que ces deux spectres sont équivalents « avec des coefficients $\mathbb{Z}/\ell$ ».

Ce théorème se démontre plus facilement aujourd'hui à l'aide du langage ∞-catégorique, qui permet notamment de donner une preuve rapide d'un résultat qui calcule l'homologie de M^{gp} en fonction de celle de M (le *group completion theorem*, dû originellement à Segal-McDuff [MS76], réinterprété notamment par Nikolaus [Nik17]). Il faut tout de même l'accompagner d'un calcul de cohomologie de groupes.

Le théorème en question est le suivant (nous le donnons dans le cas E_∞, et pour l'homologie singulière, mais il y a une version plus générale) :

Théorème 1 (Group completion theorem). *Soit M un espace E_∞ et R un anneau. Soit π_R l'image dans $H_0(M;R)$ du morphisme de Hurewicz $\pi_0(M) \to H_0(M;R)$.*

Alors le morphisme canonique $M \to M^{gp}$ induit un isomorphisme $H_*(M;R)[\pi_R^{-1}] \to H_*(M^{gp};R)$

3.2 $K(\mathbb{Z})$ et théorie algébrique des nombres

De nombreux travaux ont pour but de mieux comprendre $K(\mathbb{Z})$ ou $K_*(\mathbb{Z})$.

Remarque 8. *Lorsque E est un spectre, E_* représente ses groupes d'homotopie, donc ici, $K_*(\mathbb{Z})$ représente les groupes d'homotopie de $K(\mathbb{Z})$.*

Comme $K(\mathbb{Z})$ est connectif (par définition), cela revient aux groupes d'homotopie au sens usuel de $\Omega^\infty K(\mathbb{Z})$.

La raison est que la K-théorie de $\mathbb{Z}$ (et plus généralement des anneaux d'entiers algébriques) contient beaucoup d'information arithmétique.

Par exemple, si A est un anneau de Dedekind, $K_0(A) \cong \mathbb{Z} \oplus Cl(A)$, où $Cl(A)$ est le *ideal class group* de A.

Un énoncé que nous voulions mentionner pour $K(\mathbb{Z})$ est la conjecture de Vandiver (ou de Kummer-Vandiver) :

Conjecture 1. *Soit p un nombre premier ; soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)^+$, le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (le p-ème corps cyclotomique).*

Alors $p \nmid h_K$, où $h_K = |Cl(\mathcal{O}_K)|$ est le class number de K.

Cette conjecture est notamment liée au grand théorème de Fermat ; c'est une conjecture purement arithmétique. Elle a une reformulation en termes de K-théorie algébrique qui motive en partie le calcul de $K_*(\mathbb{Z})$:

Proposition 6 ([Kur92]). *La conjecture de Kummer-Vandiver est équivalente à l'énoncé suivant : $K_{4n}(\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $n \geq 0$.*

Il y a d'autres travaux (et conjectures) qui relient la K-théorie algébrique et la théorie algébrique des nombres, celui-ci donne simplement un aperçu de l'information arithmétique pouvant être contenue dans la K-théorie algébrique.

3.3 K-théorie algébrique et topologie des variétés

De manière peut-être surprenante, la K-théorie algébrique est aussi liée à la topologie des variétés, et pas uniquement du fait de son lien avec la K-théorie topologique.

Un lien est établi notamment via l'anneau $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ pour un espace X : sa K-théorie algébrique contient des informations sur la topologie de X.

Remarque 9. *En réalité, c'est souvent la A-théorie de Waldhausen de X qui joue ce rôle : cette dernière est la K-théorie algébrique de $\mathbb{S}[\Omega X]$, mais nous n'avons introduit ni les anneaux en spectres, ni leur K-théorie algébrique, et ni les « algèbres de monoïdes » dans les spectres.*

Mais un théorème qui se prouve relativement facilement avec le langage ∞-catégorique assure que $K_i(\mathbb{S}[\Omega X]) \cong K_i(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ pour $i = 0, 1$; et cela suffit pour ce que nous allons présenter.

Le résultat que nous voulons présenter est le théorème du s-cobordisme, une généralisation du théorème du h-cobordisme qui implique de la K-théorie algébrique.

Définition 5. *Soit M, N deux variétés sans bord orientées (de même dimension). Un cobordisme de M vers N est une variété orientée compacte W munie d'un difféomorphisme orienté $\partial W \cong M \coprod \overline{N}$ (où $\overline{N}$ est N avec l'orientation inverse)*

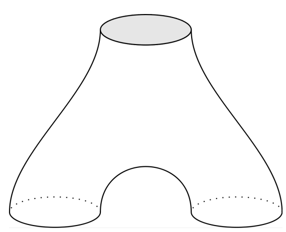

Figure 1: Un cobordisme d'un cercle vers deux cercles

Exemple 5. *L'exemple trivial d'un cobordisme est le cylindre $M \times [0, 1]$, qui est un cobordisme de M vers elle-même.*

Exemple 6. *Toute variété orientée W peut-être vue comme un cobordisme de ∂W vers $\emptyset$; par exemple D^2 est un cobordisme de S^1 vers $\emptyset$.*

Définition 6. *Un h-cobordisme est un cobordisme W de M vers N tel que les deux inclusions $M \to W$, $N \to W$ soient des équivalences d'homotopie.*

Exemple 7. *Le cylindre $M \times [0, 1]$ est un h-cobordisme de M vers elle-même.*

Exemple 8. *La figure ci-dessus ne représente pas un h-cobordisme.*

Le théorème du h-cobordisme peut s'énoncer ainsi :

Théorème 2 (h-cobordism theorem, [Sma62])**.** *Soit M, N deux variétés simplement connexes ; et W un h-cobordisme de M vers N ; on suppose* $\dim(W) \geq 6$. *Alors il existe un difféomorphisme entre W et $M \times [0,1]$ dont la restriction à M est l'identification canonique $M \to M \times \{0\}$.*

Remarque 10. *Ce théorème permet de prouver la conjecture de Poincaré en dimensions ≥ 5 ; et permet d'étudier les structures différentielles sur les sphères de dimension ≥ 5.*

Le théorème du s-cobordisme précise la situation dans le cas où M (et donc W, N) n'est pas simplement connexe.

Définissons tout d'abord le groupe de Whitehead. On a besoin pour cela de :

Proposition 7. *Soit R un anneau. Alors $K_1(R) \cong GL(R)/E(R)$; où $GL(R) = \operatorname{colim}_n GL_n(R)$ est le groupe linéaire infini, et $E(R)$ est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires $I_n + \alpha E_{i,j}, i \neq j$.*

En conséquence, lorsque G est un groupe, pour $R = \mathbb{Z}[G]$, on a un morphisme canonique $\mathbb{Z}/2 \times G \to GL_1(\mathbb{Z}[G]) \to K_1(\mathbb{Z}[G])$, où la première flèche envoie $(1, g)$ sur $-g$ et $(0, g)$ sur g.

Définition 7. *Soit G un groupe. Le groupe de Whitehead de G, $Wh(G)$, est défini comme étant le conoyau de ce morphisme canonique, c'est-à-dire $K_1(\mathbb{Z}[G])/\{\pm g, g \in G\}$.*

Il y a alors, pour toute équivalence d'homotopie $f : X \to Y$, un élément $\tau(f) \in Wh(\pi_1(X))$ que l'on ne définira pas, qui s'appelle la torsion de Whitehead de f. Alors le théorème du s-cobordisme s'énonce :

Théorème 3 (s-cobordism theorem, [Ker67])**.** *Soit M, N deux variétés orientées de dimension ≥ 5 ; et W un h-cobordisme de M vers N. Alors W est difféomorphe à $M \times [0,1]$ (comme plus haut) si et seulement si la torsion de Whitehead $\tau(i) \in Wh(\pi_1(M))$ de l'inclusion $M \to W$ est nulle.*

Plus généralement, M étant fixé, la torsion de Whitehead établit une bijection entre les classes de difféomorphisme (relativement à M) de h-cobordismes partant de M et $Wh(\pi_1(M))$.

Remarque 11. *Ce théorème remarquable indique que l'obstruction à ce qu'un h-cobordisme soit trivial se trouve plus généralement dans un quotient de $K_1(\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$.*

Il généralise le théorème du h-cobordisme, car $Wh(1) = 0$ (de manière équivalente, $K_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\times$)

Cet exemple n'en est qu'un parmi de nombreux qui concernent l'interaction entre K-théorie algébrique et la topologie des variétés (ou la topologie, plus généralement).

On pourra par exemple citer la conjecture de Farrel-Jones, qui concerne aussi la K-théorie d'anneaux de la forme $R[G]$ et qui, avec des G de la forme $\pi_1(X)$, implique la conjecture Borel :

Conjecture 2 (Conjecture de Borel)**.** *Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie entre variétés compactes sans bord asphériques. Alors f est homotope à un homéomorphisme.*

Remarque 12. *Une variété asphérique est une variété dont le seul groupe d'homotopie non trivial est π_1.*

(voir par exemple [LR04] pour un tour d'horizon sur la conjecture de Farrel-Jones)

On mentionnera finalement l'obstruction de Wall ([Wal65]), qui est une obstruction dans $K_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ à ce qu'un CW-complexe finiment dominé soit équivalent à un CW-complexe fini. Ce qui est notamment remarquable à son sujet, c'est qu'il s'agit d'une obstruction purement algébrique, mais qui est exacte : elle est nulle si et seulement si le CW-complexe en question est fini (à homotopie près).

3.4 K-théorie de $\mathbb{F}_p$

Ici nous voulons mentionner un point de vue moderne sur le calcul par Quillen de $K_*(\mathbb{F}_p)$ ([Qui72]).

Pour ce faire, nous avons besoin d'un résultat dû à Gabber :

Proposition 8 ([Gab92])**.** *Soit (R, I) une paire henselienne, et ℓ un premier inversible dans R. Alors $K(R)^\wedge_\ell \to K(R/I)^\wedge_\ell$ est une équivalence.*

Remarque 13. *Une paire henselienne est un anneau commutatif R muni d'un idéal $I \subset \mathrm{rad}(R)$ (le radical de Jacobson) qui vérifie le lemme de Hensel : si $f \in R[T]$ a une racine $\overline{a}$ modulo I telle que $f'(\overline{a})$ est inversible modulo I, alors f a une racine a dans R dont la classe modulo I est $\overline{a}$.*

C'est le cas par exemple lorsque R est I-adiquement complet, ou lorsque I est nilpotent. Nous utiliserons l'exemple $(\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p)$

Remarque 14. *Comme dans le cas de $K(\mathbb{C})$ et ku, on voit apparaître une ℓ-complétion : c'est un thème récurrent en théorie de l'homotopie ; souvent des résultats ne sont pas vrais globalement, ou plus difficiles à montrer, donc on les montre « en chaque premier ℓ » (ou en un certain sous-ensemble de nombres premiers), et peut-être rationnellement (c'est-à-dire en « inversant tous les premiers »), et on essaie de recoller pour avoir des informations globales.*

Corollaire 2. *Pour tout premier $\ell \neq p$, $K(\mathbb{Z}_p)^\wedge_\ell \to K(\mathbb{F}_p)^\wedge_\ell$ est une équivalence.*

En particulier, $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}$, on obtient donc un morphisme

$$K(\mathbb{F}_p)^\wedge_\ell \to K(\mathbb{C})^\wedge_\ell \simeq ku^\wedge_\ell$$

.

Le résultat de Quillen qui nous intéresse peut alors s'interpréter de la manière suivante :

Théorème 4. *Soit $\psi_p : ku^\wedge_\ell \to ku^\wedge_\ell$ la p-ème opération d'Adams. Alors le morphisme ci-dessus induit une équivalence :*

$$K(\mathbb{F}_p)^\wedge_\ell \to \tau_{\geq 0}((ku^\wedge_\ell)^{h\psi_p})$$

où $(ku_\ell^\wedge)^{h\psi_p}$ *désigne le spectre des points fixes à homotopie près de* $ku_\ell^\wedge$ *; et où* $\tau_{\geq 0}$ *prend un spectre et le rend connectif en enlevant toute la partie en degrés négatifs.*

Cela fournit une analyse de $K(\mathbb{F}_p)$ avec des coefficients inversibles dans $\mathbb{F}_p$; on peut aussi facilement, avec un petit peu d'homologie de groupes et le group-completion theorem, déterminer la partie rationnelle de $K(\mathbb{F}_p)$.

Évidemment, il faut prouver cela, et prouver que ça suffit ; mais nous ne le faisons pas ici.

La preuve (moderne) utilise par exemple de la descente galoisienne, qui est un aspect encore très vivant aujourd'hui – Rognes a par exemple introduit dans [Rog08] une notion d'extension galoisienne d'anneaux en spectres, et cette notion est encore étudiée, notamment par Mathew ([CMNN16],[Mat15])

Pour conclure, on obtient la description suivante de $K_*(\mathbb{F}_p)$:

Théorème 5 ([Qui72])**.** $K_{2i-1}(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/(p^i - 1); K_{2i}(\mathbb{F}_p) = 0$ *pour* $i > 0$*, et bien sûr* $K_0(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}$*.*

Remarque 15. *Cela reste vrai en remplaçant* p *par une puissance de* p*.*

4 Aspects à étudier

De nombreuses méthodes existent pour étudier la K-théorie algébrique.

Les « trace methods » sont une famille de méthodes étudiées de nos jours afin d'avoir des informations sur la K-théorie algébrique. Elles consistent essentiellement à trouver des invariants $F(R)$ (comme $K(R)$) munis de morphismes naturels de comparaison $K(R) \to F(R)$ qui vérifient :

1. $F(R)$ est plus simple à calculer que $K(R)$
2. On contrôle plutôt bien la « différence » entre $K(R)$ et $F(R)$ (le long du morphisme de comparaison)

Il y a évidemment une tension entre ces deux critères (l'invariant optimal pour 1. étant simplement 0, et pour 2. simplement $K(R)$), mais certains choix de F permettent des avancées très intéressantes dans notre compréhension de K.

Un exemple d'un tel invariant est l'homologie de Hochschild topologique, THH, munie de la « Dennis trace map » $K \to THH$.

Dans mon mémoire, j'ai étudié THH, et un autre invariant similaire, l'homologie de MacLane HML. Le but était de relever un théorème de comparaison de Pirashvili et Waldhausen à propos de leurs groupes d'homotopie en un théorème à propos des spectres eux-mêmes.

Un autre exemple de tel invariant, lié à THH, est TC^-, l'homologie cyclique topologique négative. Cet invariant est meilleur que THH au sens du critère 2. ; en fait il est défini comme les points fixes (homotopiques) d'une certaine action de S^1 sur THH. C'est un aspect par lequel la théorie de l'homotopie (stable) équivariante se mêle à l'étude de la K-théorie algébrique.

Il y a bien entendu bien plus à dire sur l'homotopie équivariante que son lien avec la K-théorie algébrique, mais une autre connexion vient de questions galoisiennes : par exemple, la théorie de Galois définie par Rognes [Rog08] permet de se poser des questions de descente galoisienne – par exemple, dans quelle mesure est-ce que la K-théorie algébrique satisfait une forme de descente galoisienne ?

Une autre classe d'aspects intéressants de la K-théorie algébrique vient de ce que la K-théorie algébrique peut être vue en un sens comme le réceptacle d'une caractéristique d'Euler universelle ([Ste17]).

Ainsi, étudier des objets qui peuvent se voir comme des caractéristiques d'Euler peut se faire en passant par la K-théorie – c'est par exemple une idée qui se développe pour prouver certaines conjectures numériques en théorie des représentations modulaires : ces conjectures prévoient l'égalité de certains invariants, et l'idée serait alors d'obtenir une preuve conceptuelle de ces égalités en voyant leurs termes comme des caractéristiques d'Euler d'objets comparables. Je n'en sais pas plus, mais mon ex-maître de stage m'a dit qu'il travaillait dessus actuellement et nous allons en discuter – cela pourrait être une partie de ce sur quoi je vais travailler cette année.

Références

[BP72] Michael Barratt and Stewart Priddy. On the homology of non-connected monoids and their associated groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 47(1) :1–14, 1972.

[CMNN16] Dustin Clausen, Akhil Mathew, Niko Naumann, and Justin Noel. Descent in algebraic K-theory and a conjecture of ausoni-rognes. *arXiv preprint arXiv :1606.03328*, 2016.

[Gab92] O. Gabber. K-theory of henselian local rings and henselian pairs. 1992.

[Kar08] Max Karoubi. *K-theory : An introduction*, volume 226. Springer Science & Business Media, 2008.

[Ker67] Michel Kervaire. Le théoreme de Barden-Mazur-Stallings. In *Torsion et Type Simple d'Homotopie*, pages 83–95. Springer, 1967.

[Kur92] Masato Kurihara. Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of $\mathbb{Z}$. *Compositio Mathematica*, 81(2) :223–236, 1992.

[LR04] Wolfgang Lück and Holger Reich. The Baum-Connes and the Farrell-Jones conjectures in K-and L-theory. *arXiv preprint math/0402405*, 2004.

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. 2017.

[Mat15] Akhil Mathew. Torus actions on stable module categories, picard groups, and localizing subcategories. *arXiv preprint arXiv :1512.01716*, 2015.

[MS76] Dusa McDuff and Graeme Segal. Homology fibrations and the "group-completion" theorem. *Inventiones mathematicae*, 31(3) :279–284, 1976.

[Nik17] Thomas Nikolaus. The group completion theorem via localizations of ring spectra, 2017.

[Qui72] Daniel Quillen. On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field. *Annals of Mathematics*, pages 552–586, 1972.

[Rog08] John Rognes. Galois extensions of structured ring spectra. *Mem. Amer. Math. Soc*, 192(898) :1–98, 2008.

[Seg74] Graeme Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13(3) :293–312, 1974.

[Sma62] Stephen Smale. On the structure of manifolds. *American Journal of Mathematics*, 84(3) :387–399, 1962.

[Ste17] Wolfgang Steimle. On the universal property of waldhausen's k-theory. *arXiv preprint arXiv :1703.01865*, 2017.

[Wal65] Charles Terence Clegg Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Annals of Mathematics*, pages 56–69, 1965.