Introduction à un domaine de recherche

—

La géométrie tropicale : la combinatoire au service de la géométrie algébrique

Lucas Gierczak-Galle

1er octobre 2020

Résumé

Les mathématiques tropicales, développées depuis une cinquantaine d'années, offrent un point de vue nouveau sur des questions importantes dans de nombreux domaines des mathématiques. En particulier, elles permettent d'étudier plus simplement des objets algébro-géométriques en leur associant des objets de nature combinatoire. En retraçant cette aventure mathématique dans ses grandes lignes, on donnera ici des exemples de recherches que la géométrie tropicale suscite actuellement.

Table des matières

1 Introduction.

Le domaine que nous allons présenter, les mathématiques tropicales ou « géométrie tropicale », n'est considéré comme un domaine de recherche à part entière que depuis une vingtaine d'années, mais les recherches et les résultats qui lui ont donné naissance remontent au début des années 1970. Notamment, en 1971, George M. Bergman publie un article intitulé *The Logarithmic Limit-Set of an Algebraic Variety* [Ber71] dans lequel il étudie les *ensembles limites logarithmiques* associés à des variétés algébriques. Ce concept est précurseur de celui, plus général, de *tropicalisation* d'une variété algébrique.

La géométrie tropicale est aujourd'hui intimement liée à des problèmes en géométrie algébrique (l'étude des lieux de zéros de polynômes), en géométrie symplectique (un sous--domaine de la géométrie différentielle lié historiquement à la mécanique hamiltonienne), en combinatoire géométrique (l'étude combinatoire de certains objets géométriques), ou encore en physique statistique.

Ici, nous nous intéresserons aux liens entre la géométrie tropicale et la géométrie algébrique : la géométrie tropicale aide à l'étude des variétés algébriques au moyen d'outils combinatoires. En effet, elle permet notamment de transformer des variétés algébriques, qui sont des objets complexes à étudier, en des objets affines par morceaux dont on peut étudier la combinatoire. Ceci résulte d'une sorte de « passage limite au logarithme » dans les coordonnées des points des variétés algébriques. En résumé, la géométrie tropicale est une « ombre combinatoire » de la géométrie algébrique.

2 Des ensembles algébriques aux schémas.

Partons de la préoccupation de base de la géométrie algébrique : trouver et étudier des solutions à des systèmes d'équations polynomiales. Les solutions de ces systèmes peuvent par exemple être cherchées dans K^n ou dans $\mathbb{P}^n(K)$, pour K un corps, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lieux de zéros des polynômes correspondent à des objets géométriques connus et décrits de longue date : ellipses, hyperboles, lemniscates (∞), etc. Néanmoins, les mathématiciens se sont heurtés à des obstacles théoriques rendant difficile l'étude de ces ensembles algébriques, par exemple au voisinage de points de croisement ou dans le cas de corps autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sans notion de distance.

C'est notamment pour résoudre ces problèmes que le cadre théorique de la géométrie algébrique a été refondé à partir des années 1920 en des termes beaucoup plus algébriques. L'idée de base est de remplacer la donnée d'un certain nombre d'équations polynomiales à n variables à coefficients dans un corps K par celle d'un idéal I de $K[X_1, \ldots, X_n]$: l'idéal engendré par ces polynômes. L'ensemble algébrique (le lieu des zéros communs des polynômes de I) est alors noté $Z(I)$. Le cadré algébrique permet alors de « rendre compte » de façon complète de la réalité géométrique de $Z(I)$: $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ s'identifie à l'anneau des fonctions polynomiales sur $Z(I)$, les idéaux maximaux de $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ aux points de $Z(I)$, les idéaux premiers de $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ aux sous-variétés de $Z(I)$, etc.

Ce nouveau cadre algébrique pour décrire des objets géométriques s'est révélé puissant et adapté pour décrire des ensembles algébriques définis sur d'autres corps. Il donne aussi naissance naturellement à une topologie intéressante sur $Z(I)$: celle obtenue en prenant comme fermés tous les $Z(J) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K[X_1, \ldots, X_n]/I), J \subset \mathfrak{p}\}$ où, pour A un anneau commutatif, $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de A. Cette topologie s'appelle *topologie de* Zariski.

Ces objets peuvent ensuite être recollés pour former des objets plus généraux, les variétés algébriques. Cependant, ce formalisme ne permettait pas de décrire de façon satisfaisante tous les types de variétés algébriques, notamment celles ayant des singularités. C'est notamment pour aider à la description de ces particularités que la notion de *schéma* a été définie dans les 1940 et 1950, grâce à un formalisme largement développé par Alexander GROTHENDIECK.

Sans détailler la définition, un schéma est un espace topologique X ressemblant localement à une variété affine (de la forme $\mathrm{Spec}(A)$), et dont chaque ouvert $\mathcal{U}$ est muni d'un anneau $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ représentant l'ensemble des fonctions *régulières*, c'est-à-dire polynomiales, sur $\mathcal{U}$. Des conditions de compatibilité entre les différents $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ sont bien sûr requises. Dans le cadre de cet exposé, le lecteur pourra imaginer des ensembles algébriques simples (courbes, surfaces) à la place des schémas utilisés en toute généralité. De bonnes références pour la théorie des schémas sont [L$^+$02] et [Har13].

Avant de voir comment la géométrie tropicale transforme des variétés algébriques et des objets affines plus simples à étudier, commençons par présenter ses fondements théoriques.

3 Fondements de la géométrie tropicale.

3.1 Le semi-corps tropical.

On dit souvent que « La géométrie tropicale, c'est la géométrie algébrique où l'on a remplacé l'opération $\times$ par l'opération $+$ et l'opération $+$ par l'opération max ». En effet, nous allons beaucoup utiliser le *semi-corps tropical.* Il s'agit de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni des opération tropicales $a \odot b = a + b$ et $a \oplus b = \max(a, b)$ (avec des résultats définis intuitivement lorsque ∞ apparaît dans les opérandes), qu'on appelle respectivement la *multiplication tropicale* et l'*addition tropicale.* Ces lois tropicales sont associatives et commutatives, et $\odot$ est distributive sur $\oplus$. $\odot$ a pour élément neutre 0 et possède des inverses ; $\oplus$ a pour élément neutre ∞, mais n'a pas d'inverse. C'est en cela que $\left(\overline{\mathbb{R}}, \odot, \oplus\right)$ est un *semi-corps.*

C'est à partir de $\overline{\mathbb{R}}$, analogue tropical de $\mathbb{R}$, que l'on va définir les polynômes tropicaux, analogues tropicaux des polynômes classiques qui sont en fait des fonctions affines par morceaux.

3.2 Polynômes tropicaux et tropicalisation des polynômes.

Définition 1 (Polynômes tropicaux) On appelle *polynôme tropical* un élément de $\overline{\mathbb{R}}[X_1, \ldots, X_n]$, c'est-à-dire une somme formelle finie du type

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \bigoplus_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1, \ldots, i_n} \odot {X_1}^{\odot i_1} \odot \cdots \odot {X_n}^{\odot i_n},$$

où $X^{\odot i}$ désigne $\underbrace{X \odot \cdots \odot X}_{i \text{ facteurs}} = iX$. On omet souvent le symbole $\odot$ dans les exposants.

Voici deux polynômes tropicaux à un seule variable à titre d'exemple.

$$X^2 \oplus 0 = \max(2X, 0)$$
$$5 \odot X^3 \oplus 2 \odot X \oplus 4 = \max(3X + 5, X + 2, 4)$$

Attention : les polynômes tropicaux sont des objets formels, non réductibles à leur évaluation en tout point du corps des coefficients, de même que pour les polynômes classiques. Ainsi, de même que $X^{p-1} - X \neq 0 \in \mathbb{F}_p[X]$ bien que $x^{p-1} = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, on a :

$$X^2 \oplus 0 \neq X^2 \oplus 1 \odot X \oplus 0 \in \overline{\mathbb{R}}[X],$$

bien que $\min(2x, 0) = \min(2x, 1 + x, 0)$, $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Revenons à nos polynômes classique sur le corps K quelconque. On peut tropicaliser un polynôme classique appartenant à $K[X_1, \ldots, X_n]$, c'est-à-dire définir un polynôme tropical associé. Cela nécessite que K soit muni d'une *valuation*, c'est-à-dire une application $v : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ telle que $v(a) = \infty \Longleftrightarrow a = 0$, $v(ab) = v(a) + v(b)$ et $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Donnons quelques exemples de valuations.

– Tout corps K est doté d'une valuation naturelle appelée *valuation triviale* : $v(x) = 0$ pour tout $x \in K^*$ et $v(0) = \infty$.
– Pour tout nombre premier p, on peut munir $\mathbb{Q}$ de la *valuation p-adique* : $v_p\left(p^n \frac{b}{c}\right) = n$ pour b et c premiers avec p, et $v(0) = \infty$.
– On peut munir $\mathbb{C}$ de $v(z) = -\log |z|$.

Dans ces trois exemples, le lien entre la valuation et la valeur absolue qui lui est associée (voir ci-dessous) est bien visible.

Étant donné une telle valuation, on associe à tout polynôme

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1,\ldots,i_n} {X_1}^{i_1} \cdots {X_n}^{i_n} \in K[X_1, \ldots, X_n]$$

le polynôme tropical

$$\mathrm{trop}(P)(X_1, \ldots, X_n) = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}} v(a_{i_1,\ldots,i_n}) \odot {X_1}^{i_1} \odot \cdots \odot {X_n}^{i_n} \in \overline{\mathbb{R}}[X_1, \ldots, X_n].$$

L'intérêt de la valuation v est à la fois d'envoyer les coefficients de P sur des éléments du semi-corps tropical $\overline{\mathbb{R}}$ d'une façon compatible avec les opérations, et d'agir de façon similaire à un logarithme (une valuation v se comporte comme $v = -\log |\cdot|$ où $|\cdot|$ est une valeur absolue) : il s'agit donc bien d'une opération de tropicalisation.

3.3 Variétés tropicales.

Maintenant que nous avons l'analogue tropical des polynômes classiques (les polynômes tropicaux), montrons que l'on peut définir des variétés tropicales à l'aide des polynômes tropicaux, comme dans le cas classique.

Si $f \in \overline{\mathbb{R}}[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme tropical, on note $V(f)$ l'hypersurface correspondante, définie comme suit :

$$V(f) = \{w \in \overline{\mathbb{R}}^n, f(w) = \infty \text{ ou le minimum dans } f(w) \text{ est atteint au moins deux fois}\}.$$

Il s'agit en fait de l'ensemble des points de $\overline{\mathbb{R}}^n$ autour desquels f – fonction affine par morceaux – n'est pas localement affine, c'est-à-dire où f a une rupture de pente. Comme on va le voir, $V(f)$ est un objet affine par morceaux qui est l'analogue d'une hypersurface (elle est de codimension 1), mais pour un polynôme tropical. On peut de même définir la variété tropicale associée à un idéal tropical : pour I un idéal de $\overline{\mathbb{R}}[X_1, \ldots, X_n]$, on note

$$V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f).$$

Cet objet sera alors un objet affine par morceaux dont la codimension dans l'espace ambiant $\overline{\mathbb{R}}^n$ pourra être plus grande que 1.

4 Tropicalisation de variétés et graphes duaux.

4.1 Différentes manières de tropicaliser une variété algébrique.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour tropicaliser des variétés algébriques, ce qui était notre objectif initial : on veut transformer une variété algébrique en un objet simple à étudier, affine par morceaux. Prenons donc, dans un cadre simple, une variété algébrique $X = Z(I) \subset K^n$ définie par l'idéal $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$. On supposera dans toute la suite que K est muni d'une valuation dense – c'est-à-dire dont l'image est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$ –, et que son corps résiduel (le quotient de son anneau de valuation par son unique idéal maximal) est algébriquement clos. Pour tropicaliser la variété X, il y a plusieurs manières naturelles de procéder. Voici déjà deux d'entre elles.

Premièrement, on peut penser à utiliser la valuation dont est muni le corps K est à l'appliquer, coordonnée par coordonnée, à chaque point de la variété algébrique. On définit ainsi

$$v(X) = \{(v(x_1), \dots, v(x_n)), (x_1, \dots, x_n) \in X\}.$$

Alternativement, on peut définir directement la variété tropicale définie par les tropicalisations des polynômes définissant X. On commence donc par tropicaliser l'idéal I définissant X en définissant $\mathrm{trop}(I) = \langle \mathrm{trop}(f), f \in I \rangle$ (on ne peut pas se passer de prendre l'idéal engendré), puis on construit la variété tropicale

$$\mathrm{trop}(X) = V(\mathrm{trop}(I)).$$

Il se trouve que ces deux constructions, de façon remarquable, coïncident presque : c'est le *théorème fondamental de la géométrie tropicale*, qui implique seulement un passage à l'adhérence dans la première construction.

$$\mathrm{trop}(X) = \overline{v(X)}$$

Les mathématiciens s'intéressant à la géométrie tropicale ont rapidement remarqué que la tropicalisation d'une variété algébrique, bien qu'étant un objet plus simple que la variété de départ, encodait un certain nombre d'invariants de la variété de départ : même dimension, même genre (nombre de « trous »). De plus, le nombre de directions différentes des demi-droites (infinies) de la tropicalisation d'une variété est le degré de cette variété. La tropicalisation d'une cubique (penser, par exemple, à une courbe elliptique ; voir la figure 1), aura des demi-droites pointant dans trois directions distinctes. De nombreuses informations sur les variétés se retrouvent donc dans leur tropicalisation, et la tropicalisation a d'ores et déjà trouvé des nombreuses applications, comme en géométrie énumérative (compter le nombre d'objets géométriques qui passent par un certain nombre de points fixés – voir en particulier [Mum83]).

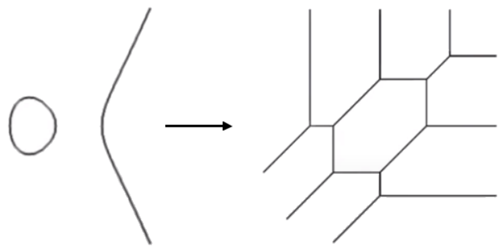

FIGURE 1: Plusieurs invariants sont conservés lors de la tropicalisation : dimension, genre, et degré (qui correspond au nombre de directions de la tropicalisation).

En fait, il y a encore d'autres manières de tropicaliser une variété, qui rejoignent les constructions précédentes et ont chacune leur intérêt dans ce qu'elles donnent comme résultats sur les variétés algébriques. De plus, on peut remarquer que les deux tropicalisations présentées ci-avant dépendent de la description de la variété de départ : en changeant le système de coordonnées dans lequel est décrite la variété $X = V(I) \subset K^n$, on change la tropicalisation de la variété.

Pour remédier à ce problème, ou plutôt à ce manque d'universalité, on peut définir une « tropicalisation universelle », qui, au sens des limites projectives, contient toutes les tropicalisations dans tous les systèmes de coordonnées. On l'appelle l'*analytification de* BERKOVICH de X, et on la note X^{an}. D'un point de vue ensembliste, elle est définie comme l'ensemble des semi-valuations sur l'anneau des polynômes $K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

qui étendent la valuation v déjà présente sur $K \subset K[X_1, \dots X_n]$ (une semi-valuation doit satisfaire les mêmes propriétés qu'une valuation, sauf l'équivalence $v(a) = \infty \iff a = 0$ qui n'est plus requise).

Cette définition n'a de sens que si X est effectivement une variété affine, c'est-à-dire définie par un idéal de polynômes I sur K^n ($X = V(I) \subset K^n$). Dans le cas plus général d'une variété algébrique ou même d'un schéma, il existe par définition un recouvrement de ce schéma par des ouverts qui sont des variétés affines. X^{an} est alors obtenu en recollant de façon pertinente les analytifications de Berkovich de ces ouverts.

Une topologie naturelle dont on peut munir X^{an} est la topologie initiale associée aux évaluations $v \mapsto v(f)$ pour tout $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. On peut alors montrer que l'analytification de Berkovich de X est un objet de même dimension que X, qui contient toutes ses tropicalisations, sous forme d'une injection continue. De plus, X s'y inclut naturellement sous la forme d'une partie dense. Enfin, cet espace est « simple » : si X est une courbe (dimension 1), X^{an} a une structure de graphe, éventuellement infini.

En plus d'être la tropicalisation universelle de X, X^{an} est le « graphe dual universel » de X. Voyons sans tarder ce qu'est un graphe dual.

4.2 Graphes duaux.

Prenons une variété algébrique X de dimension 1 assez simple, par exemple définie par une unique équation. Penser à $xy - 1 = 0$ définie sur $\mathbb{R}^2$, une hyperbole (une courbe, donc de dimension 1). Il est parfois intéressant d'introduire un paramètre dans l'équation pour « mettre en famille » des variétés semblables et voir apparaître des cas « dégénérés ». Dans notre exemple, on pourrait introduire un paramètre réel t et étudier l'équation $xy - t = 0$.

On a alors une famille d'hyperboles, qui dégénère en $t = 0$ pour donner, avec l'équation $xy = 0$, une union de deux droites se croisant transversalement (les deux axes). La variété totale $\mathfrak{X}$ définie sur le corps des séries de Laurent $\mathbb{R}((t))$ par $xy - t = 0$, de dimension 2, est appelée *modèle* pour la variété X, et la variété dégénérée en $t = 0$, de dimension 1, notée $\mathfrak{X}_0$, s'appelle la *fibre spéciale* de $\mathfrak{X}$. On peut alors associer à $\mathfrak{X}_0$, qui est de dimension 1, son *graphe dual*.

L'existence, pour des variétés, de tels modèles satisfaisant de bonnes propriétés est l'objet du *théorème de réduction semi-stable*, dont on trouvera une démonstration dans l'ouvrage *Toroidal embeddings* ([KKMSD06]).

Définition 2 (Graphe dual) Le graphe dual $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ associé à une variété $\mathfrak{X}$ de dimension 1 a pour ensemble de sommets l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_0$, et deux de ses sommets sont reliés par une arête dans $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ si, et seulement si, les deux composantes irréductibles qu'ils représentent s'intersectent.

On a alors le résultat d'inclusion suivant.

Théorème 3 (Inclusion des graphes duaux dans l'analytification de Berkovich) Il existe une inclusion canonique

$$\iota : \Gamma_{\mathfrak{X}} \hookrightarrow X^{\mathrm{an}}$$

et l'image de $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ par ι est un rétracte par déformation forte de X^{an}.

En particulier, X^{an} et $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ ont les mêmes groupes d'homotopie. De même que pour les tropicalisations, X^{an} contient ainsi tous les graphes $\Gamma_{\mathfrak{X}}$ (qui dépendent du modèle $\mathfrak{X}$).

Lors de mon stage de M2, mon travail à consisté à étudier une généralisation de la construction des graphes duaux, en dimension supérieure : les complexes tropicaux. Deux articles de référence pour ces questions sont de Dustin Cartwright : [Car19] et [Car15]. Le cadre théorique dans lequel est effectuée toute la suite ne sera pas entièrement précisé. Il s'agit d'un cadre assez général utilisant des schémas, avec le concept de modèle développé ci-dessus, et nécessite de supposer quelques propriétés sur ces schémas.

On utilisera, sans l'expliquer plus avant, la notion de *diviseur* sur une variété algébrique lisse : on peut à la fois la définir comme somme formelle de sous-variétés de codimension 1, ou comme section méromorphe non identiquement nulle d'un fibré en droites sur la variété. Un *diviseur principal* est un diviseur obtenu comme lieu des zéros et pôles – avec multiplicité – d'une fonction méromorphe (possédant des zéros et des pôles) sur la variété. On dira qu'un diviseur, vu comme somme formelle, est *effectif* lorsqu'il est à coefficients positifs.

L'ambition de la suite de ce document est donc de donner une image intuitive de la construction des complexes tropicaux associés aux variétés, et de la définition d'analogues tropicaux, sur ces complexes simpliciaux « améliorés », d'objets définis sur les variétés algébriques (diviseurs, fonctions linéaires, équivalence linéaire entre diviseurs). Après avoir montré comment on peut « spécialiser » un diviseur sur la variété en un diviseur sur son complexe dual, il s'agira enfin de présenter une « inégalité de spécialisation » comparant la valeur d'un invariant algébrique défini sur les variétés à celle d'un invariant combinatoire défini sur leurs complexes tropicaux.

5 Complexes tropicaux.

5.1 Construction des complexes tropicaux.

Sur le modèle du graphe dual, on va construire, à partir d'un schéma $\mathfrak{X}$ un complexe simplicial (un objet constitué de simplexes collés ensemble, munis de fonctions d'identification aux simplexes standard dans les espaces $\mathbb{R}^k$), qui encode des informations sur l'intersection des composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_0$. On suppose ici que $\mathfrak{X}$ est un schéma régulier satisfaisant aussi d'autres propriétés raisonnables (plat, propre), défini sur un anneau R muni d'une valuation discrète (à valeurs dans $\mathbb{Z}$) et tel que le corps résiduel est algébriquement clos ; on suppose de plus que $\mathfrak{X}_0$ est lisse et à croisements normaux, c'est-à-dire que ses composantes irréductibles s'intersectent transversalement.

Définition 4 (Construction du complexe dual d'une variété) Pour chaque composante irréductible de $\mathfrak{X}_0$, on place un sommet dans Δ. Ensuite, pour chaque sous-ensemble de $k+1$ composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_0$, leur intersection est une union disjointe de variétés lisses de dimension $n-k$ (grâce à l'intersection transverse) ; on place alors un k-simplexe dans Δ pour chacune de ces variétés (ces k-simplexes auront pour $k+1$ sommets les points de Δ correspondant aux $k+1$ composantes irréductibles intersectées). On note C_s la variété correspondant à un simplexe s de Δ, et on attache les simplexes de manière que C_s est une sous-variété de $C_{s'}$ si et seulement si s' est une face de s.

Si les simplexes maximaux dans Δ sont de dimension n, on appellera *crêtes* les simplexes de Δ de dimension $n-1$; ces simplexes joueront un particulier analogue aux sous-variétés de codimension 1 des variétés algébriques, qu'on peut réaliser comme lieux des zéros de fonctions méromorphes.

On munit ensuite Δ d'une fonction α sur les couples (v, r) constitués d'un sommet v et d'une crête r de S tels que $v \in r$. Vu les dimensions, C_r est une courbe algébrique contenue dans la composante irréductible C_v de $\mathfrak{X}_0$, qui est aussi un diviseur sur $\mathfrak{X}$. On pose alors :

$$\alpha(v, r) = -\deg(C_v \cdot C_r),$$

où $C_v \cdot C_r$ désigne le produit d'intersection de C_v et C_r. Le produit d'intersection est une généralisation du décompte du nombre de points d'intersection entre deux variétés de dimensions complémentaires. Pour plus de détails, voir l'excellent ouvrage de FULTON, [Ful84].

Les entiers $\alpha(v,r)$ s'appellent « constantes de structure » et vérifient une relation fondamentale, l'*équation des constantes de structure.*

Théorème 5 (Équation des constantes de structure) Pour toute crête r du complexe dual Δ, les constantes de structure vérifient

$$\sum_{v\in r_0} \alpha(v,r) = \deg r, \tag{1}$$

où r_0 désigne l'ensemble des sommets de r et $\deg r$ le nombre de n-simplexes contenant r.

On démontre cette relation en utilisant le fait que le degré d'intersection d'un diviseur principal avec une courbe est toujours nul.

5.2 Diviseurs sur un complexe tropical.

On va créer l'analogue tropical des diviseurs sur les variétés algébriques en définissant les diviseurs sur un complexe dual. Il s'agit des sommes formelles sur $\mathbb{Z}$ de $(n-1)$-polytopes rationnels (définis par des équations affines à coefficients rationnels) vérifiant une relation d'« équilibre » qui sera passée sous silence, sous la relation d'équivalence suivante : deux sommes formelles sont équivalentes lorsque leur différence appartient au sous-groupe engendré par les sommes formelles du type

$$[P] - [Q_1] - \cdots - [Q_r],$$

où P et les Q_i sont des polytopes tels que

$$P = \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$$

et, pour tous i et j, $Q_i \cap Q_j$ est soit vide, soit une face propre commune à Q_i et Q_j.

Cette relation d'équivalence induite par le découpage donne un sens réellement géométrique aux diviseurs ; par exemple, la somme de deux cubes partageant une face est le pavé droit constitué de l'union des deux cubes.

On montre assez facilement qu'on peut mettre une somme formelle de polytopes sous une forme dite *normale*, dans laquelle les termes de la somme forment les cellules maximales d'un complexe polyédral. Cela permet de définir proprement ce qu'est un *diviseur effectif* – une classe d'équivalence de sommes formelles contenant un représentant dont tous les coefficients sont positifs – et le *support* d'un diviseur effectif – l'union des polytopes apparaissant dans un représentant à coefficients positifs.

5.3 Fonctions linéaires sur un complexe tropical.

On va maintenant définir les fonctions linéaires, qui sont l'analogue sur les complexes tropicaux des fonctions méromorphe sur les variétés algébriques.

Commençons déjà par la notion de *fonction linéaire par morceaux* : il s'agit d'une fonction continue $\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, restreinte à chaque simplexe de Δ identifié avec Δ^k (le simplexe standard de dimension k), est une fonction affine par morceaux à pentes entières.

Une fonction linéaire est une fonction linéaire par morceaux qui est en fait linéaire – tout court – sur chaque simplexe et qui vérifie de plus une condition d'« harmonicité » autour de chaque crête (simplexe de codimension 1) de Δ. Soit φ une fonction linéaire par morceaux. En notant $v_1, \ldots, v_n$ les sommets de r, et $w_1, \ldots, w_d$ les sommets restants des n-simplexes dont r est une facette, puis en notant $a_i = \varphi(v_i)$ et $b_j = \varphi(w_j)$, on demande que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\sum_j b_j - \sum_i \alpha(v_i, r) a_i = 0.$$

Cette relation s'interprète comme une relation d'harmonicité pondérée par les constantes de structure et généralisée en dimension supérieure. En effet, dans le où $n = 1$ (Δ est un graphe et ses crêtes sont les sommets), la relation devient, autour d'un sommet v_1 :

$$\frac{1}{\deg v_1} \sum_j \varphi(w_j) = \varphi(v_1).$$

De même qu'on peut associer à une fonction méromorphe sur une variété algébrique un diviseur en comptant ses zéros et pôles avec multiplicité, on peut associer à une fonction linéaire par morceaux sur un complexe tropical un diviseur. Cette construction peut être définie localement (sur tout ouvert U) par une propriété universelle :

Définition 6 (Diviseur d'une fonction linéaire par morceaux) Sur un complexe tropical, il existe une unique fonction div qui associe à une fonction linéaire par morceaux φ sur un ouvert $U \subset \Delta$ une classe d'équivalence équilibrée de polytopes sur U telle que :

(i) div est linéaire : $\operatorname{div}(\varphi + \varphi') = \operatorname{div}(\varphi) + \operatorname{div}(\varphi')$.

(ii) div est locale : si $V \subset U$ sont deux ouverts, et φ une fonction linéaire par morceaux sur U, alors $\operatorname{div}\left(\varphi_{|V}\right) = \operatorname{div}(\varphi)_{|V}$.

(iii) $\operatorname{div}(\varphi) = 0$ si, et seulement si, φ est linéaire.

(iv) Normalisation. Soit r une crête de Δ, φ une fonction linéaire par morceaux définie au voisinage de r, identiquement nulle en dehors d'une unique facette f parmi les facettes contenant r, et définie sur f par :

$$\varphi(x) = \max\{\lambda \cdot x, 0\},$$

avec λ un vecteur entier primitif (dont les PGCD des coefficients est 1). Alors $\operatorname{div}(\varphi) = [H]$, où

$$H = \{x \in f \cap U,\ \lambda \cdot x = 0\}.$$

Au-delà de cette définition par propriété universelle, le diviseur d'une fonction linéaire par morceaux se calcule en fait de façon tout à fait effective, comme somme des pentes locales de la fonction en direction des différents sommets de Δ pondérées par les constantes de structure. Nous ne donnerons pas de formule explicite ici, mais un exemple pour la compréhension, en figure 2.

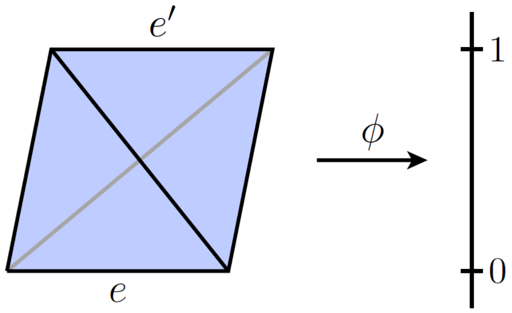

FIGURE 2: Sur le complexe tropical ci-dessus, constitué d'un unique tétraèdre avec toutes les constantes de structure $\alpha(v, r)$ égales à 1, et ϕ la fonction « hauteur » naturelle, qui est linéaire par morceaux et d'ailleurs linéaire sur chaque facette, on a $\operatorname{div}\phi = 2[e] - 2[e']$. La figure est tirée de [Car15].

Maintenant que l'on sait associer un diviseur à une fonction linéaire par morceaux, on peut définir la relation d'équivalence linéaire sur les diviseurs : D et D' sont dits *linéairement équivalents* lorsqu'il existe une fonction linéaire par morceaux φ telle que

$D - D' = \mathrm{div}\varphi$. Cette relation d'équivalence est l'analogue tropical de la relation d'équivalence entre les diviseurs sur une variété algébrique, qui définit le groupe de PICARD $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Prin}(X)$, où $\mathrm{Div}(X)$ est l'ensemble des diviseurs sur X et $\mathrm{Prin}(X)$ est l'ensemble des diviseurs principaux (issus d'une fonction méromorphe) sur X.

5.4 Spécialisation de diviseurs.

Il nous faut maintenant un moyen d'associer à un diviseur sur la variété algébrique X un diviseur sur son complexe dual Δ (une opération baptisée « spécialisation »). C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 7 (Tropicalisation des diviseurs) Soit $\mathfrak{X}$ un modèle pour X et soit Δ son complexe tropical. Si D est un diviseur sur X, on pose

$$\rho(D) = \sum_{r \in \Delta_{n-1}} \deg\left(\overline{D} \cdot C_r\right)[r],$$

où Δ_{n-1} est l'ensemble des simplexes de dimension $n-1$ (crêtes) de Δ.

On montre que l'opération de spécialisation préserve l'équivalence linéaire : si D et D' sont deux diviseurs sur X linéairement équivalents, alors leurs spécialisations $\rho(D)$ et $\rho(D')$ sont linéairement équivalentes sur Δ.

5.5 Un nouvel invariant.

Fixons maintenant un diviseur D sur X. L'inégalité de spécialisation que l'on va présenter et dont on donnera une idée de la preuve permet de comparer un invariant de nature algébrique dépendant de la variété de départ et du diviseur D, avec un invariant de nature combinatoire sur son complexe dual muni des constantes de structure et du diviseur $\rho(D)$.

Sur la variété, la grandeur qui va nous intéresser est $\dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$, la dimension de l'espace des sections régulières du fibré vectoriel associé au diviseur D. Pour mieux comprendre cet espace, rappelons la bijection suivante :

$$H^0(X, \mathcal{O}(D)) = \{0\} \cup \{f \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\},\ \mathrm{div}f + D \geqslant 0\}.$$

De plus,

$$\{f \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\},\ \mathrm{div}f + D \geqslant 0\}/K^*$$

est en bijection avec l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.

Du côté tropical, définissons un nouvel invariant combinatoire comme suit.

Définition 8 (Invariant h^0) On note $h^0(\Delta, D)$ le plus petit entier m tel qu'il existe des points rationnels distincts $p_1, \ldots, p_m$ tels qu'il n'existe pas de diviseur effectif D' linéairement équivalent à D et contenant $p_1, \ldots, p_m$. S'il n'existe pas de tel entier, alors on pose $h^0(\Delta, D) = \infty$.

En dimension 1, sur un graphe donc, on a $h^0(\Gamma, D) = r(D) + 1$, où r est le *rang* des diviseurs comme défini par BAKER et NORINE dans [BN07] : le rang $r(D)$ d'un diviseur est le nombre maximal de points $p_1, \ldots, p_r$ – pas forcément distincts – tels que

$$D - [p_1] - \cdots - [p_r]$$

soit linéairement équivalent à un diviseur effectif. h^0 est donc une généralisation, en dimension supérieure, de la notion de rang des diviseurs.

Nous avons maintenant tous les outils en main pour énoncer l'inégalité de spécialisation.

6 Une inégalité de spécialisation.

6.1 Énoncé du théorème et quelques idées pour la preuve.

Soit quelques hypothèses raisonnables sur le schéma $\mathfrak{X}$, qui ne seront pas détaillées, on a le théorème suivant.

Théorème 9 (Inégalité de spécialisation) Soit D un diviseur sur la fibre générique X de $\mathfrak{X}$, et soit Δ le complexe dual associé à $\mathfrak{X}$. On a alors l'inégalité :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}(D)) \leqslant h^0(\Delta, \rho(D)). \tag{2}$$

Ce genre de théorème est important en ce qu'il permet de garder le plus d'informations possibles en passant de la variété à son complexe tropical. En effet, avoir des informations sur les valeurs de h^0 grâce aux informations qu'on avait sur H^0 permet de démontrer des résultats sur Δ et d'en déduire des résultats sur $\mathfrak{X}$.

Une autre conséquence intéressante de cette inégalité est qu'il existe des complexes tropicaux qui ne se relèvent pas, c'est-à-dire qui ne proviennent pas d'une variété algébrique. En voici un exemple.

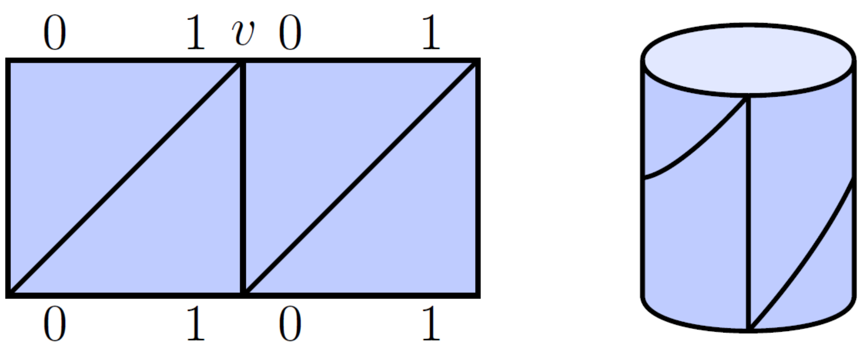

FIGURE 3: Un complexe tropical qui ne se relève pas (qui n'est pas le complexe dual d'une dégénérescence). Les arêtes gauche et droite sont identifiées, le complexe formant alors un cylindre. Toutes les constantes de structures non indiquées sont égales à 1. La figure est tirée de [Car15].

Sur le complexe tropical Δ représenté par la figure 3, en notant D le diviseur égal à la somme des deux arêtes supérieures, on peut montrer que pour tout entier m, on a

$$h^0(\Delta, mD) = m + 1.$$

D'autre part, on montre que, si Δ provenait d'une variété algébrique, alors la quantité $h^0(\Delta, mD)$ varierait quadratiquement en m, ce qui n'est manifestement pas le cas. Ainsi, le complexe Δ représente en figure 3 ne se relève pas.

Donnons maintenant le cheminement général, avec moult détails balayés sous le tapis, de la preuve de l'inégalité de spécialisation.

Soit r un entier $< \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$ et soit $p_1, \ldots, p_r$ des points rationnels distincts de Δ. On veut montrer qu'il existe un diviseur effectif D'', linéairement équivalent à $\rho(D)$, contenant ces points. Soit m le PPCM des dénominateurs des coordonnées des p_i. On admet qu'on peut s'arranger pour subdiviser les simplexes de Δ de façon régulière en simplexes plus petits de telle sorte que les p_i deviennent des sommets du complexe subdivisé, de façon compatible avec toutes les constructions sur Δ (diviseurs, fonctions linéaires, équivalence linéaire de diviseurs) et que cette subdivision sur Δ correspond à des opérations algébriques connues sur $\mathfrak{X}$ qui préservent également les propriétés et constructions sur $\mathfrak{X}$.

Un lemme, qui concentre la difficulté de la preuve, donne la « contenance de points » et nécessite que les p_i soient des sommets de Δ – d'où la subdivision effectuée. Il s'énonce comme suit : on peut trouver des points $x_1, \ldots, x_r$ de X tels que pour tout diviseur effectif E sur X contenant les x_i, sa spécialisation $\rho(E)$ contient les p_i. Il suffit donc, pour conclure, de trouver un diviseur effectif D' sur X linéairement équivalent à D et contenant les x_i.

Or, le fait pour un diviseur D' effectif linéairement équivalent à D de contenir un x_i est équivalent à ce que la section de $\mathcal{O}(D)$ correspondante s'annule en ce point x_i, ce qui impose une condition linéaire à chaque fois. Au total, puisque $r < \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$, il existe une section non nulle appartenant à $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ définissant un diviseur D' effectif, linéairement équivalent à D, et contenant tous les x_i. En prenant $D'' = \rho(D')$, D'' est effectif, et contient les points p_i. D'' est aussi linéairement équivalent à $\rho(D)$ par compatibilité des constructions. Cela termine la preuve de l'inégalité de spécialisation.

6.2 Perspectives de recherche.

Quelques perspectives de recherche nous sont apparues comme intéressantes. Par exemple, il serait intéressant de généraliser le travail de Cartwright en essayant de définir une notion de linéarité des fonctions sur les complexes tropicaux autour de simplexes de dimension inférieure à $n-1$, c'est-à-dire pour les simplexes autres que les crêtes. D'autre part, du point de vue algébrique, on peut définir des groupes, dits de Chow, qui généralisent la notion de diviseur à des sous-variétés de codimension supérieure à 1. Ces deux constructions pourraient mener à une opération de spécialisation généralisée vers des espaces « hybrides », tropicaux et algébriques à la fois, où les simplexes relient des copies des composantes irréductibles de la variété algébrique.

Un autre espoir est de pouvoir généraliser, en dimension supérieure, le théorème de Riemann-Roch qui, en dimension 1, donne un lien entre le rang d'un diviseur (voir la sous-section 5.5), son degré, le genre g de la variété et le diviseur dit « canonique » $\mathcal{K}$:

$$r(D) - r(\mathcal{K} - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Références

[Ber71] George M. Bergman. The logarithmic limit-set of an algebraic variety. *Transactions of the American Mathematical Society*, 157 :459–469, 1971.

[BN07] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann–roch and abel–jacobi theory on a finite graph. *Advances in Mathematics*, 215(2) :766–788, 2007.

[Car15] Dustin Cartwright. A specialization inequality for tropical complexes. *arXiv preprint arXiv :1511.00650*, 2015.

[Car19] Dustin Cartwright. Tropical complexes. *manuscripta mathematica*, pages 1–35, 2019.

[Ful84] William Fulton. *Intersection theory.* Springer, 1984.

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[KKMSD06] George Kempf, Finn Knudsen, David Mumford, and Bernard Saint-Donat. *Toroidal embeddings 1*, volume 339. Springer, 2006.

[L+02] Qing Liu et al. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6. Oxford University Press on Demand, 2002.

[Mum83] David Mumford. *Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves*, pages 271–328. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.