LES FORMES MODULAIRES, LES VARIÉTÉS DE SHIMURA ET LE RELÈVEMENT DE NIVEAU

HAO FU

Contents

Le relèvement de niveau de formes modulaires est un sujet classique inauguré par Ribet. Ce résultat est fondamental pour beaucoup des applications arithmétiques. Dans cette introduction au domaine de recherche, on rappelle tout d'abord les bases sur les formes modulaires, les représentations Galoisenne, et les variétés de Shimura. Le question de relèvement de niveau peut se traduire comme le comparison entre une localisation en un idéal maximal de l'algèbre de Hecke et de la cohomologie étale de certain type de variété de Shimura. Mon projet se propose de montrer une généralisation géométrique du relèvement de niveau pour les formes automorphes sur des groupes réductifs. Ceci pourrait avoir des applications arithmétique à la théorie d'Iwasawa et à la conjecture de Beilinson-Bloch-Kato.

1. La forme modulaire

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré $\{z | \operatorname{Im} z > 0\}$.

1.1. Groupes de congruence.

Définition 1.1. Soit N un entier positif. Le **sous-groupe de congruence principal du niveau** N est

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

On défini aussi

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} (\bmod N) \right\}$$

et

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} (\bmod N) \right\}$$

qui satisfait

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Définition 1.2. Un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un **sous-groupe de congruence** si $\Gamma(N) \subset \Gamma$ pour certains $N \in \mathbb{Z}^+$, auquel cas Γ est un sous-groupe de congruence de **niveau** N.

Définition 1.3. Pour $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout entier k on défini l'opérateur de poids-k noté$[\gamma]_k$ sur les fonctions $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$(f[\gamma]_k)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma(\tau)), \quad \tau \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.4. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et soit k un entier. Une fonction $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire de poids** k par rapport à Γ si

(1) f est holomorphe,
(2) f est le poids-k invariant sous Γ,
(3) $f[\alpha]_k$ est holomorphe à ∞ pour tout $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Les formes modulaires de poids k par rapport à Γ sont notées $\mathcal{M}_k(\Gamma)$.

$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ forme un espace vectorial sur $\mathbb{C}$. Quand $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, une forme modulaire s' écrit comme une sèrie de Fourier:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n, \quad a_n(f) \in \mathbb{C} \text{ for all } n,$$

où $q = 2\pi i \tau$.

Définition 1.5. Si une forme modulaire de poids k a $a_0 = 0$ dans le développement de Fourier de $f[\alpha]_k$ pour tout $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors f est une **forme cuspidal** de poids k par rapport à Γ.

Remarque 1.6. Le produit d'une forme modulaire de poids k avec une forme modulaire de poids l est une forme modulaire de poids $k + l$. Ainsi la somme

$$\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

forme un anneau, un anneau dit gradué en raison de sa structure en somme.

1.2. **La courbe modulaire.**

Définition 1.7. Pour tout sous-groupe de congruence Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, qui agit sur $\mathcal{H}$ à gauche, la courbe modulaire $Y(\Gamma)$ est défini comme l'espace quotient des orbites sous Γ,

$$Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H} = \{\Gamma\tau : \tau \in \mathcal{H}\}.$$

Les courbes modulaires pour $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$, et $\Gamma(N)$ sont notées

$$Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, \quad Y_1(N) = \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}, \quad Y(N) = \Gamma(N)\backslash\mathcal{H}$$

La courbe modulaire est une surface de Riemann qui peut etre compactifié. On note $\mathcal{H}^*$ la courbe compact de $\mathcal{H}$, les courbes modularies compactes correspondantes sont

$$X_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}^*, \quad X_1(N) = \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}^*, \quad X(N) = \Gamma(N)\backslash\mathcal{H}^*.$$

Théorème 1.8. Soit N un entier positif.

(1) L'espace des modules pour $\Gamma_0(N)$ est

$$\mathrm{S}_0(N) = \{[E_\tau, \langle 1/N + \Lambda_\tau\rangle] : \tau \in \mathcal{H}\}$$

Deux points $[E_\tau, \langle 1/N + \Lambda_\tau\rangle]$ et $[E_{\tau'}, \langle 1/N + \Lambda_{\tau'}\rangle]$ sont égaux si et seulement si $\Gamma_0(N)\tau = \Gamma_0(N)\tau'$. Il y a donc une bijection

$$\psi_0 : \mathrm{S}_0(N) \xrightarrow{\sim} Y_0(N)$$

$[\mathbb{C}/\Lambda_\tau, \langle 1/N + \Lambda_\tau\rangle] \mapsto \Gamma_0(N)\tau$

(2) L'espace des modules pour $\Gamma_1(N)$ est

$$\mathrm{S}_1(N) = \{[E_\tau, 1/N + \Lambda_\tau] : \tau \in \mathcal{H}\}$$

Deux points $[E_\tau, 1/N + \Lambda_\tau]$ et $[E_{\tau'}, 1/N + \Lambda_{\tau'}]$ sont égaux si et seulement si $\Gamma_1(N)\tau = \Gamma_1(N)\tau'$. Il y a donc une bijection

$$\psi_1 : \mathrm{S}_1(N) \xrightarrow{\sim} Y_1(N)$$

$[\mathbb{C}/\Lambda_\tau, 1/N + \Lambda_\tau] \mapsto \Gamma_1(N)\tau$

(3) L'espace des modules pour $\Gamma(N)$ est

$$\mathrm{S}(N) = \{[\mathbb{C}/\Lambda_\tau, (\tau/N + \Lambda_\tau, 1/N + \Lambda_\tau)] : \tau \in \mathcal{H}\}$$

Deux points $[\mathbb{C}/\Lambda_\tau, (\tau/N + \Lambda_\tau, 1/N + \Lambda_\tau)], [\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}, (\tau'/N + \Lambda_{\tau'}, 1/N + \Lambda_{\tau'})]$ sont égaux si et seulement si $\Gamma(N)\tau = \Gamma(N)\tau'$. Il y a donc une bijection

$$\psi : \mathrm{S}(N) \xrightarrow{\sim} O(N)$$

$[\mathbb{C}/\Lambda_\tau, (\tau/N + \Lambda_\tau, 1/N + \Lambda_\tau)] \mapsto \Gamma(N)\tau$

1.3. **Opérateurs de Hecke.**

1.3.1. *L'opérateur de coset double.*

Définition 1.9. Pour les sous-groupes de congruence Γ_1 et Γ_2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, l'**opérateur de coset double** $\Gamma_1\alpha\Gamma_2$ de **poid-**k est l'application $[\Gamma_1\alpha\Gamma_2]_k : \mathcal{M}_k(\Gamma_1) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_2)$

$$f \mapsto f\,[\Gamma_1\alpha\Gamma_2]_k = \sum_j f\,[\beta_j]_k$$

où $\{\beta_j\}$ sont des représentants de l'orbite, c'est-à-dire $\Gamma_1\alpha\Gamma_2 = \bigcup_j \Gamma_1\beta_j$ est une union disjointe.

L'opérateur de coset double est bien défini, c'est-à-dire qu'il est indépendant de la manière dont les β_j sont choisis.

Remarque 1.10. L'opérateur de quotient double admet une interprétation géométrique: il induit un morphisme entre groupes de Picard

$$[\Gamma_1 \alpha \Gamma_2]_k : \mathrm{Div}(X_2) \longrightarrow \mathrm{Div}\,(X_1)\,, \quad \Gamma_2 \tau \mapsto \sum_j \Gamma_1 \beta_j(\tau)$$

où $X_1 = \mathcal{H}^*/\Gamma_1, X_2 = \mathcal{H}^*/\Gamma_2$ sont les courbes modulaires correspondante.

Définition 1.11. Soient $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_1(N)$, $\alpha \in \Gamma_0(N)$, l'operateur de poid-k

$$[\Gamma_1 \alpha \Gamma_2]_k : \mathcal{M}_k\,(\Gamma_1(N)) \longrightarrow \mathcal{M}_k\,(\Gamma_1(N))$$

prend la forme

$$f \mapsto f\,[\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N)]_k = f[\alpha]_k, \quad \alpha \in \Gamma_0(N).$$

Ca nous donne une action de $\Gamma_0(N)$ sur $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ qui factorise par $\Gamma_1(N)$, noté $\langle d \rangle$:

$$\langle d \rangle f = f[\alpha]_k \quad \text{pour tout } \alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \delta \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ avec } \delta \equiv d (\mathrm{mod} N).$$

C'est le prémier type des opérateurs de Hecke, également appelé *l'opérateur diamant*.

Remarque 1.12. L'operateur diamant a une version géométrique qui s'appelle **la correspondence de Hecke**: Soit $N|M$, on a la correspondence

$$\begin{tikzcd} & X_1(M) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_1(N) & & X_1(N) \end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche est l'injection trivial, et la flèche de droite est induite par l'opérateur diamant.

Définition 1.13. Le deuxième type d'opérateurs de Hecke

$$T_p : \mathcal{M}_k\,(\Gamma_1(N)) \longrightarrow \mathcal{M}_k\,(\Gamma_1(N))\,, \quad p \text{ premier}$$

est donné par

$$T_p f = f \left[\Gamma_1(N) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Gamma_1(N) \right]_k$$

Les opérateurs de Hecke commutes.

Proposition 1.14. Soient d and e des élèments de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, et soient p et q premiers. Alors

(1) $\langle d \rangle T_p = T_p \langle d \rangle$,
(2) $\langle d \rangle \langle e \rangle = \langle e \rangle \langle d \rangle = \langle de \rangle$,
(3) $T_p T_q = T_q T_p$.

1.4. **La forme ancienne et la forme nouvelle.** On fixe un niveau N et soit $M|N$. On voit facilement que $S_k(\Gamma_1(M)) \subset S_k(\Gamma_1(N))$. D'ailleurs l'application linéaire $[\alpha_d]_k : \tau \mapsto d^{k-1}f(d\tau)$ nous donne une autre injection de $S_1(\Gamma_1(M))$ à $S_1(\Gamma_1(N))$. C'est un exemple simple du relévement du niveau.

Définition 1.15. Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe de congruence. Le produit intérieur de Petersson,

$$\langle , \rangle_\Gamma : S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est donné par

$$\langle f, g\rangle_\Gamma = \frac{1}{V_\Gamma} \int_{X(\Gamma)} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\mathrm{Im}(\tau))^k d\mu(\tau)$$

où V_Γ est le volume de $X(\Gamma)$. C'est un produit linéaire en f, sesqui-linéaire en g, symetrique Hermitien, et défini positif.

Définition 1.16. Pout tout diviseur d de N, soit i_d le morphisme

$$i_d : (S_k(\Gamma_1(Nd^{-1})))^2 \longrightarrow S_k(\Gamma_1(N))$$

donnée par

$$(f, g) \mapsto f + g[\alpha_d]_k$$

L'espace de *la forme ancienne au niveau* N est

$$S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}} = \sum_{\substack{p|N \\ \mathrm{prime}}} i_p((S_k(\Gamma_1(Np^{-1})))^2)$$

et le sous-espace des nouvelles formes au niveau N est le complément orthogonal par rapport au produit intérieur de Petersson,

$$S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{new}} = (S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}})^\perp.$$

Les opérateurs de Hecke respectent la décomposition de $S_k(\Gamma_1(N))$ en ancienne et nouvelle forme:

Proposition 1.17. Les sous-espaces $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}}$ et $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{new}}$ sont stables sous les opérateurs de Hecke T_n et $\langle n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$.

2. Les représentations Galoisiennes

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le groupe absolu de Galois de $\mathbb{Q}$. C'est un groupe topologique muni d'une base de topologie donnée par les sous-groupes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ où K est un extension fini de $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Q}_p$ la complétion p-adique de $\mathbb{Q}$ pour un nombre premier p.

Définition 2.1. Soit d un entier positif. Une représentation galoisienne ℓ-adique de dimension d est un homomorphisme continu

$$\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_d(L)$$

où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$.

2.1. **Répresentation Galoisenne et la courbe elliptique.**

Définition 2.2. Soit F un corps de nombres qui soit Galoisien et soit p un nombre premier. Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{p}$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ de F en p le **groupe de décomposition en** $\mathfrak{p}$ est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ qui fixe $\mathfrak{p}$

$$D_{\mathfrak{p}} = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{Q}) : \mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{p}\}.$$

Il agit sur le corps résiduel $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ par

$$(x+\mathfrak{p})^\sigma = x^\sigma + \mathfrak{p}, \quad x \in \mathcal{O}_F, \sigma \in D_{\mathfrak{p}}.$$

Le groupe d'inertie est le sous-groupe de $D_{\mathfrak{p}}$ qui a l'action triviale sur $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$, noté $I_{\mathfrak{p}}$.

Définition 2.3. Soit ρ une représentation Galoisienne et soit p un nombre premier. On dit ρ est **non ramifié à** p si $I_{\mathfrak{p}} \subset \ker \rho$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p} \subset \overline{\mathbb{Z}}$ sur p.

Dans ce qui suit on associe à une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ une représentation Galoisienne. Soit E un courbe ellitpique sur $\mathbb{Q}$ et soit ℓ un nombre premier. La multiplication par ℓ sur le groupe de la puissance de ℓ-torsion de E nous donne les morphismes

$$E[\ell] \longleftarrow E[\ell^2] \leftarrow E[\ell^3] \longleftarrow \cdots$$

On peut d éfinir le **module de Tate ℓ-adique** en prenant la limite projective

$$\mathrm{Ta}_\ell\left(\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)\right) = \varprojlim_n \left\{\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)[\ell^n]\right\}$$

grâce a l'isomorphisme de groupe $E \cong \mathrm{Pic}^0(X_1(N))$. En choisissant une base de $\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)[\ell^n]$ compatible pour tout n on a

$$\mathrm{Ta}_\ell\left(\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)\right) \cong \mathbb{Z}_\ell^2$$

Un automorphisme $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ nous donne une action sur $\mathrm{Div}^0\left(X_1(N)\right)$ par

$$\sigma : \left(\sum n_P(P)\right) \mapsto \sum n_P\left(P^\sigma\right) \tag{2.1}$$

qui induit une action sur $\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)$ puisque $\mathrm{div}(f)^\sigma = \mathrm{div}\left(f^\sigma\right)$ pour tout $f^\sigma \in \overline{\mathbb{Q}}\left(X_1(N)\right)$, le corps des fonctions de $X_1(N)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$. L'action de Galois commute avec l'action de la multiplication par ℓ^n, donc se factorise par le groupe de ℓ^n-torsion $\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)[\ell^n]$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & G_{\mathbb{Q}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Aut}\left(\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)[\ell^n]\right) & & \mathrm{Aut}\left(\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)\left[\ell^{n+1}\right]\right) \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

induit une représentation Galoisienne continu

$$\rho_{X_1(N),\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{2g}\left(\mathbb{Z}_\ell\right) \subset \mathrm{GL}_{2g}\left(\mathbb{Q}_\ell\right)$$

Théorème 2.4. Soit ℓ premier et soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ de conducteur N. Soit $a_p(E) = p - \#$(les solutions de l'equation de E modulo p), et la représentation de Galois $\rho_{E,\ell}$ est non ramifiée à chaque premier $p \nmid \ell N$. Pour tout p let $\mathfrak{p} \subset \overline{\mathbb{Z}}$ être tout idéal maximal sur p. Alors l'équation caractéristique de $\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})$ est

$$x^2 - a_p(E)x + p = 0.$$

La représentation galoisienne $\rho_{E,\ell}$ est irréductible.

Le demonstration utilise la relation de Eichler-Shimura

Théorème 2.5 (Eichler-Shimura)**.** Soit $p \nmid N$. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}^0(X_1(N)) \arrow[r, "T_p"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^0(X_1(N)) \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}^0(\widetilde{X}_1(N)) \arrow[r, "\sigma_{p,*}+\widetilde{\langle p\rangle}_*\sigma_p^*"] & \mathrm{Pic}^0(\widetilde{X}_1(N))
\end{tikzcd}$$

où $X_1(N)$ a une bonne reduction sur le premier p qu'on noté $\widetilde{X}_1(N)$ et σ_p est le morphisme de Frobenius.

2.2. **Représentation Galoisienne et la forme modulaire.** Etant donnée une forme de propre de Hecke normaliseée

$$f \in S_2(N, \chi)$$

On a un idéal maximal associe à f:

$$I_f = \{T \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}} : Tf = 0\}$$

où $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ est l'algèbre de Hecke. On defini une variètè abelienne de f

$$A_f = \mathrm{J}_1(N)/I_f\mathrm{J}_1(N)$$

où $J_1(N) = \mathrm{Jac}(X_1(N))$ est le Jacobienne de $X_1(N)$ qui est isomorphe à $\mathrm{Pic}^0(X_1(N))$. On a le lemme suivant

Lemmé 2.6. Le morphisme $\mathrm{Pic}^0\left(X_1(N)\right)[\ell^n] \longrightarrow A_f[\ell^n]$ est une surjection. Son noyau est stable par $G_{\mathbb{Q}}$.

Par le lemme $G_{\mathbb{Q}}$ agit sur $A_f[\ell^n]$, alors sur $\mathrm{Ta}_\ell\left(A_f\right)$. Le produit tensoriel avec $\mathbb{Q}_\ell$ nous donne une représentation Galoisenne

$$\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Q}_\ell\right).$$

3. Les variétés de Shimura

Soit $\mathbb{A}_f$ l'adèle fini de $\mathbb{Q}$. Soit $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ le restriction du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.1. Une **donnée de Shimura** est une paire (G, X) où G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ et X une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ vérifiant des conditions

SV1 Pour tout $h \in \mathcal{X}$, l'action de $\mathbb{S}$ sur $\mathrm{Lie}\, G_{\mathbb{R}}$ est de type {(-1,1), 0,(1,-1)}.
SV2 Pour tout $h \in \mathcal{X}, \mathrm{Int}\left(C_h^{ad}\right)$ est une involution de Cartan de $G_{\mathbb{R}}^{ad}$.
SV3 $h_j^{ad} \neq 1$ pour tout j, i.e. aucun des $G_j(\mathbb{R})$ n'est compact.

On va expliquer les notations dans les remarques.

Remarque 3.2. Pour SV1, on note les représentations $\mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V)$ pour V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel correspondent bijectivement aux bigraduations de $V \otimes \mathbb{C} = \oplus V^{p,q}$ telles que $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$ - ce sont les structures de Hodge sur V. Le type d'une telle bigraduation est l'ensemble des couples $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $V^{p,q} \neq 0$. Par convention, $z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ agit sur $V^{p,q}$ par $z^{-p} \cdot \bar{z}^{-q}$.

Remarque 3.3. Pour SV2, on note G^{ad} le quotient de G par son centre. On défini $h^{ad} = \mathrm{ad} \circ h$, et $C_h^{ad} = h^{ad}(i)$, et $\mathrm{Int}(g)$ le morphisme $x \to g^{-1}xg$. Soit G un groupe algébrique (affine, connexe) sur $\mathbb{R}$. Une **involution de Cartan** est une involution $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}} G$ telle que

$$G^{(\theta)}(\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{C}) : g = \theta(\bar{g})\} \quad \text{est compact.}$$

Remarque 3.4. Pour SV3, décomposons $G^{ad} = \prod G_j$ en produit de facteurs $\mathbb{Q}$ simples et soient $h_j^{ad} = \mathbb{S} \to G_{j,\mathbb{R}}$ les projections correspondantes de $h^{ad} : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}^{ad}$.

Quand K est assez petit, $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ a une structure de variété analytique complex, si cette variété est projective, on peut obtenir une *variété algébrique projective lisse* sur $\mathbb{C}$ dont $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points complexes.

La varieté de Shimura associée á (G,X) est le système projectif

$$\mathrm{Sh}(G,X) = \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$$

indexé par les sous-groupes ouverts et compacts K de $G(\mathbb{A}_f)$, et munis de l'action a droite du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ definie par

$$\sigma : \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sh}_{K^\sigma}(G,X)(\mathbb{C}) \quad [g,h] \mapsto [g\sigma, h]$$

où $K^\sigma = \sigma^{-1}K\sigma$ et $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ sont des ensembles

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Définition 3.5. Un morphisme de donnée de Shimura $\phi : (G,X) \to (G',X')$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas en groupes $\phi : G \to G'$ qui envoie X dans X'. Ce morphisme induit un morphisme entre les variétés de Shimura

$$\phi : (\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}))_K \to (\mathrm{Sh}_{K'}(G',X')(\mathbb{C}))_{K'}$$

où pour $\phi(K) \subset K'$ on a

$$\phi_{K,K'} : \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sh}_{K'}(G',X')(\mathbb{C}) \quad [g,h] \mapsto [\phi(g), \phi(h)]$$

Lemmé 3.6. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de représentants du quotient double

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

et soit X^+ une composant connexe de X. Alors

$$G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K \simeq \bigsqcup_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g \backslash X^+$$

où Γ_g est le sous-groupe $gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$ de $G(\mathbb{Q})_+$.

Ce lemme avec le théorème de Baily-Borel [Mil05] nous permet de donner une structure de variété algébrique quasi-projective canonique sur $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ quand K est assez petit.

3.1. **Exemple: La courbe modulaire.** On prend $G = \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ et pour X la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison du morphisme $h : \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ défini par

$$h(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{pour } z = a + ib \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$$

3.2. **Exemple: Variétés de Shimura de type PEL.** Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple, $\star$ une involution positive sur $B, (V, \psi) \in \mathcal{H}_{\mathrm{Q}}(B, \star, -1)$ un $(B, \star)$ -module symplectique. On prend pour G le groupe des similitudes B-linéaires de (V, ψ) et pour X la classe de conjugaison d'un morphisme $h_I : \mathbb{S} \rightarrow G(\mathbb{R})$ provenant d'une structure complexe $(B, \star)$ linéaire I sur $V_{\mathbb{R}}$ telle que $\psi_{\mathbb{R}, I} > 0$, i.e. $h_I : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ envoie $a + bi \in \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{S}(\mathbb{R})$ sur la multiplication par $a + bI$ dans $V_{\mathbb{R}}$.

Les variétés de Shimura de type PEL sont les espaces de modules des variétés abéliennes munis d'une polarisation, d'un endomorphisme et d'une structure de niveau.

3.3. **Le modèle canonique et le modèle intègre.** Chaque variété de Shimura admet un modéle canonique qui est une variété algebrique sur un corps du nombre, dont la variété de Shimura est l'ensemble des points complexes. Pour une variété de Shimura de type PEL on a un résultat plus fort: il admet un modéle intègre qui est une variété algebrique sur un anneau de valuation discret, dont la variété de Shimura de type PEL est l'ensemble des points complexes.

4. Le relèvement de niveau

Avec le préparation précédente on peut enoncer le théorème de Ribet [Rib90]

Définition 4.1. Soit F un corps fini avec la caractéristique $l \geq 3$. Une représentation Galoisienne

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}(2, F)$$

est modulaire de niveau N s'il vient d'une forme nouvelle de poids 2 de niveau N.

Théorème 4.2. Supposons que ρ est fini à p (avec $p|N$). Alors ρ, a priori modulaire de niveau N, est modulaire de niveau N/p chaque fois qu'une des conditions suivantes ou les deux sont satisfaites:

(1) $p \neq 1 \pmod{l}$
(2) N est premier à l.

Diamond Taylor [DT94] generalise le resultat

Théorème 4.3. Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{F}}_l\right)$ soit une représentation irréductible qui est modulaire de poids $k \geqq 2$ et de niveau N où N est le conducteur de ρ. Supposons que $l > k + 1$ et que M satisfait quelques conditions. Alors ρ est modulaire de poids k et de niveau M.

Théorème 4.4. Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{F}}_l\right)$ une représentation irréductible qui est modulaire de poids $k \geqq 2$ et de niveau M premier à l. Supposons que r est sans carré et premier à Ml, et que $l > k + 1$. Si

$$p\left(\operatorname{tr} \rho\left(\mathrm{Frob}_p\right)\right)^2 = (1 + p)^2 \det \rho\left(\mathrm{Frob}_p\right)$$

pour tous nombres premiers p divisant r, alors ρ provient d'une nouvelle forme de niveau divisible par r dans $S_k\left(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(r)\right)$.

Théorème 4.5. Soit $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{GL}_2\left(\overline{\mathbb{F}}_l\right)$ soit une représentation irréductible qui provient d'une nouvelle forme de niveau divisible par rs dans $S_k(\Gamma_1(M) \cap \Gamma_0(rs))$ avec $k \geqq 2$ Supposons que rst est sans carré et premier à Ml et que $l > 3$. Si $p \equiv 1$ mod l pour tous les nombres premiers p en divisant t et $q^2 \equiv 1 \pmod{\ell}$ pour tous les nombres premiers q divisant s, alors ρ provient d'une nouvelle forme de niveau divisible par rs^2t dans $S_k(\Gamma_1(Mrs^2t))$.

Le théorème 4.3 découle facilement de la combinaison des théorèmes 4.4 et 4.5. Le théorème 4.4 est le plus difficile. Diamond et Taylor posent une question équivalente: ils construisent un idéal maximal $\mathfrak{m}$ dans l'algèbre de Hecke, et deux modules de Hecke M,N en utilisant la cohomologie de la variété de Shimura. La question est de démonter si $\mathfrak{m}$ est dans le support de M alors est-ce qu'il est dans le support de N? Grosso modo ces deux modules se construisent comme les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_2(A)$, qui s'injecte à l'espace de la forme nouvelle. En utilisant la correspondence Jacquet-Langlands il suffit de faire l'induction dans les espaces des représentations automorphes cuspidales d'une algèbre de quaternions. Pour le cas du quaternion indéfini, Le lemme d'Ihara pour la surface de Shimura joue un rôle vitale.

Zhou [Zho19], à demonter un resultat sur le relevement du niveau de la form modulaire de Hilbert en étudiant le fibre spéciale de modèle integre de certaines variétés de Shimura. Liu et Tian [LT20] utilise des réalisations géométriques du relèvement de niveau dans la demonstration de certain cas de la conjecture de Bloch-Kato. Notre objectif à présent est d'essayer de démonter le résultat similaire dans le cas de la surface de Picard modulaire. Sachant qu'il existe une stratification et quelques résultats sur la cohomologie, on essaie de démonter le lemme d'ihara de manière similaire pour finalement arriver au relèvement de niveau.

References

[DT94] Fred Diamond and Richard Taylor. Non-optimal levels of mod ℓ modular representations. *Inventiones mathematicae*, 115(1):435–462, 1994.

[LT20] Yifeng Liu and Yichao Tian. Supersingular locus of hilbert modular varieties, arithmetic level raising and selmer groups. *Algebra and Number Theory*, 14(8):2059–2119, Sep 2020.

[Mil05] James Milne. *Introduction to Shimura Varieties*. 2005.

[Rib90] Kenneth A. Ribet. *Raising the Levels of Modular Representations*, pages 259–271. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Zho19] Rong Zhou. Motivic cohomology of quaternionic shimura varieties and level raising, 2019.