

Introduction au domaine de recherche : Polytopes de fibre

Eva Philippe

sous l'encadrement de Arnau Padrol, Sorbonne Université

2 octobre 2020

Je remercie les personnes grâce à qui je fais de la combinatoire des polytopes : Patrick Popescu-Pampu, Omid Amini, Arnau Padrol.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Un peu de théorie générale des polytopes	2
2.1	Définition et exemples	2
2.2	Treillis des faces	3
2.3	Géométrie algébrique et polytopes de Newton	3
3	Polytopes de fibre	4
3.1	Définition, lien avec les subdivisions	4
3.1.1	Définition des polytopes de fibre	5
3.1.2	Subdivisions π -cohérentes	5
3.1.3	Problème de Baues généralisé	7
3.2	Polytopes secondaires et triangulations	10
3.2.1	Définition des polytopes secondaires	10
3.2.2	Exemple de l'associaèdre	11
3.2.3	Lien avec la théorie des déterminants	11
3.3	Polytopes des chemins monotones cohérents	12
3.3.1	Chemins monotones	12
3.3.2	Exemple du permutoèdre	12
3.4	Pavages zonotopaux	13
3.5	Sweepotopes	13

1 Introduction

Pour présenter mon domaine de recherche, la combinatoire des polytopes, je choisis de me concentrer sur les polytopes de fibre car ils sont un excellent exemple des liens féconds entre polytopes, objets géométriques à la définition extrêmement simple, et de multiples autres domaines mathématiques. De plus, mes premiers travaux de recherches rentrent dans ce cadre puisque pendant mon stage de Master 2 j'ai étudié des structures dont la réalisation polytopale est un cas particulier de polytope de fibre : les sweepotopes, présentés en Section 3.5.

Au cœur de cet exposé se trouve le Théorème 16, qui fait le lien entre polytope de fibre et structure de certaines subdivisions d'une configuration de points. Les polytopes de fibre offrent grâce à cela un cadre unifié à de nombreuses thématiques qui ont elles-mêmes leurs motivations propres :

- les triangulations, objets importants en topologie, en optimisation, en simulation numérique,
- les polytopes secondaires, introduits avec des motivations en géométrie algébrique pour l'étude des discriminants de systèmes d'équations polynomiales,
- des structures combinatoires importantes comme le groupe symétrique (permutoèdre) et le treillis de Tamari (associaèdre),
- les chemins monotones, utilisés en optimisation linéaire,
- les pavages zonotopaux, intimement liés à la théorie des matroïdes orientés.

Ce voyage dans le monde des polytopes permettra quelques escapades vers des théorèmes fameux (théorème d'universalité de Mnëv, théorèmes de Kouchnirenko et de Bernstein) et de grands problèmes ouverts activement étudiés :

- le problème de Baues généralisé, qui porte sur la structure topologique des posets de subdivisions,
- l'espace de réalisation des associaèdres,
- l'algorithme du simplexe, crucial en optimisation linéaire mais dont la complexité dans le pire des cas reste à borner.

2 Un peu de théorie générale des polytopes

2.1 Définition et exemples

Dans ce mémoire on ne parlera que de polytopes convexes, cette précision sera donc sous-entendue dans la suite.

Un polytope est défini très basiquement comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans un espace euclidien de dimension finie.

Donnons dès à présent deux exemples de familles bien connues de polytopes, que l'on retrouvera par la suite.

Exemple 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On note e_1, \dots, e_n les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . Le $(n-1)$ -simplexe Δ_{n-1} est l'enveloppe convexe des e_i . Il est inclus dans l'hyperplan affine $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, donc de dimension $n-1$.

Plus généralement, on parlera d'un simplexe de dimension $n-1$ pour l'enveloppe convexe de n points affinement indépendants.

Exemple 2. L'hypercube \square_n est défini comme l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^n de l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

2.2 Treillis des faces

Bien entendu, une définition aussi simple masque la richesse de ces objets, qui apparaît notamment avec la structure de *faces* d'un polytope :

Définition 3. Soit $P \subset \mathbb{R}^d$ un polytope. Soit $\phi \in (\mathbb{R}^d)^*$ une forme linéaire. On dit que l'ensemble des points de P qui maximisent ϕ ,

$$P^\phi = \{x \in P \mid \phi(x) = \max_{y \in P} \phi(y)\}$$

est une *face* de P .

Par convention, on considère que l'ensemble vide \emptyset est également une face de P , de dimension -1 .

Les faces de dimension 0 sont les *sommets* de P , et les faces de dimension $\dim(P) - 1$ sont les *facettes* de P .

Remarque 4. Un polytope peut alternativement être défini comme l'intersection des demi-espaces dont les hyperplans supportent les facettes. C'est plutôt ce point de vue qui est adopté en optimisation linéaire, lorsqu'on étudie un ensemble vérifiant une famille d'inéquations linéaires.

Théorème 5. *L'ensemble des faces d'un polytope P muni de la relation d'inclusion forme un treillis, noté $\mathcal{L}(P)$, qui est gradué par la dimension des faces, atomique, coatomique.*

C'est ce treillis de faces qui encode la structure combinatoire des polytopes :

Définition 6. Deux polytopes P et Q sont dits *combinatoirement équivalents* si leurs treillis de faces sont isomorphes en tant que posets.

Remarquons que dans le cas général, on ne connaît pas de caractérisation des treillis polytopaux. De plus, le théorème d'universalité de Mnëv (1988, [Mn8]) implique que si on se donne un treillis polytopal, le problème de trouver un polytope dont c'est le treillis des faces est de même complexité que trouver une solution réelle à un système d'équations et inéquations en plusieurs variables (complexité $\exists\mathbb{R}$).

La théorie des polytopes de fibre nous donne justement des constructions explicites de polytopes dont la combinatoire est prescrite. De plus, elle généralise des objets initialement étudiés pour répondre à des questions de géométrie algébrique.

2.3 Géométrie algébrique et polytopes de Newton

Finissons cette introduction aux polytopes en faisant le lien avec un peu de géométrie algébrique, via les *polytopes de Newton*.

Soit $d \geq 1$ un entier. On se fixe \mathcal{A} une famille finie de points dans \mathbb{Z}^d et on étudie les polynômes de Laurent dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ de la forme $f(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a x_1^{a_1} \dots x_d^{a_d}$, c'est-à-dire dont les monômes sont exactement donnés par les vecteurs a de \mathcal{A} , et les coefficients c_a sont des paramètres. On dira qu'un tel polynôme f est à *support inclus dans \mathcal{A}* .

Définition 7. Le *polytope de Newton* de la famille \mathcal{A} , noté $N_{\mathcal{A}}$, est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^d des vecteurs de \mathcal{A} .

On pourra aussi parler du polytope de Newton d'un polynôme f , N_f , pour le polytope de Newton de son support.

Le spectaculaire théorème suivant (théorème 1.18 de l'article [Kou76]) relie le volume de ce polytope de Newton au nombre de racines communes d'une famille de polynômes de Laurent. C'est une généralisation d'un théorème de Bézout, qui traite le cas d'un système de deux équations polynomiales à deux inconnues.

Théorème 8 (Kouchnirenko, 1976). *Soient f_1, \dots, f_d des polynômes de Laurent dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ à support dans \mathcal{A} .*

Alors, le nombre de racines communes isolées de f_1, \dots, f_d est borné par $d! \text{Vol}(N_{\mathcal{A}})$, où $\text{Vol}(N_{\mathcal{A}})$ est le volume euclidien dans \mathbb{R}^d du polytope de Newton de \mathcal{A} .

De plus, si f_1, \dots, f_d forment une famille générique, c'est-à-dire que leurs coefficients appartiennent à un ouvert dense de $(\mathbb{C}^{\mathcal{A}})^d$ où le nombre de racines dans $(\mathbb{C}^)^d$ communes aux f_i est constant, alors ce nombre de racines communes est exactement $d! \text{Vol}(N_{\mathcal{A}})$.*

Ce théorème a été généralisé par Bernstein pour le cas où l'on prescrit différents supports \mathcal{A}_i pour les polynômes f_i .

L'opération produit entre des polynômes f, g se traduit pour leurs polytopes de Newton par l'opération *somme de Minkowski* : $N_{fg} = N_f + N_g$.

Définition 9. Soient P, Q deux polytopes dans \mathbb{R}^d . La *somme de Minkowski* de P et Q est définie comme :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

C'est un polytope dans \mathbb{R}^d , dont les sommets sont donnés par des sommes d'un sommet de P et un sommet de Q .

Un *zonotope* est un polytope obtenu comme somme de Minkowski de segments, ou de manière équivalente comme projection linéaire d'un hypercube.

3 Polytopes de fibre

Les *polytopes de fibre* ont été introduits par Billera et Sturmfels en 1992 ([BS92]), à la suite de la définition des *polytopes secondaires* par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky en 1989, motivée par leur étude des \mathcal{A} -discriminants.

Un polytope de fibre $\Sigma(P, \pi)$ est construit à partir d'une projection $\pi : P \rightarrow Q$ entre deux polytopes P, Q , et son treillis de faces encode une certaine famille de subdivisions de Q .

3.1 Définition, lien avec les subdivisions

Dans toute cette section, on considère P un polytope dans \mathbb{R}^p , $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ une projection linéaire et $Q = \pi(P)$ l'image de P , qui est aussi un polytope.

3.1.1 Définition des polytopes de fibre

Définition 10. Pour tout $y \in Q$, on note $P_y = \{x \in P \mid \pi(x) = y\} = \pi^{-1}(\{y\}) \cap P$.

Le *polytope de fibre* $\Sigma(P, \pi)$ est défini par l'intégrale de Minkowski :

$$\Sigma(P, \pi) = \frac{1}{\text{Vol}(Q)} \int_Q P_y dy.$$

D'après la linéarité de l'intégrale, il peut également être décrit par la somme de Minkowski finie :

$$\Sigma(P, \pi) = \frac{1}{\text{Vol}(Q)} \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma(P, \pi) \\ \dim(\sigma) = q}} \text{Vol}(\sigma) P_{b_\sigma},$$

où $\Gamma(P, \pi)$ est le *complexe de chambres* : les sous-ensembles de Q de la forme

$$\sigma_y = \bigcap_{\substack{F \text{ face de } P \\ y \in \pi(F)}} \pi(F)$$

pour $y \in Q$; et b_σ est le barycentre de la chambre σ .

La Figure 6 montre la construction du polytope de fibre $\Sigma(\square_3, s)$, où s est la forme linéaire qui somme les coordonnées.

Remarque 11. Au lieu de considérer un polytope P , toute la théorie est valide pour une configuration de points \mathcal{A} où on autorise les points intérieurs et les points multiples.

Remarque 12. Le fait que $\Sigma(P, \pi)$ soit bien un polytope vient du fait que la fonction $y \in Q \mapsto P_y \subseteq P$ est un fibré polytopal linéaire par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une subdivision de Q telle que sur chaque morceau les fibres aient entre elles leurs faces parallèles. Ce polytope est défini par son plongement dans \mathbb{R}^p mais sa dimension est $\dim(P) - \dim(Q)$.

3.1.2 Subdivisions π -cohérentes

Cette construction peut paraître bien abstraite à ce stade, tout son intérêt réside dans son lien avec les subdivisions π -cohérentes de Q .

Définition 13. Une *subdivision* de Q est une collection \mathcal{S} de polytopes dans \mathbb{R}^q telle que :

- si $F \in \mathcal{S}$ et C est une face de F , alors $C \in \mathcal{S}$,
- si $F_1 \in \mathcal{S}$ et $F_2 \in \mathcal{S}$, alors $F_1 \cap F_2$ est à la fois une face de F_1 et une face de F_2 ,
- $Q = \cup_{F \in \mathcal{S}} F$.

Une subdivision est une *triangulation* si tous les éléments de \mathcal{S} sont des simplexes.

Définition 14. On appelle subdivision π -compatible de Q une famille \mathcal{F} de faces de P telle que :

- l'ensemble $\{\pi(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ est une subdivision de Q ,
- si F et F' sont deux éléments de \mathcal{F} tels que $\pi(F') \subseteq \pi(F)$, alors $F' = F \cap \pi^{-1}(\pi(F'))$.

L'ensemble des subdivisions π -compatibles de Q est partiellement ordonné par la relation : $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ si et seulement si $\cup_{F \in \mathcal{F}_1} F \subseteq \cup_{F \in \mathcal{F}_2} F$ (la subdivision de Q induite par \mathcal{F}_1 est un raffinement de celle induite par \mathcal{F}_2).

Définition 15. Une subdivision π -compatible \mathcal{F} est de plus π -cohérente s'il existe une forme linéaire $\alpha \in (\mathbb{R}^p)^*$ telle que les $F \in \mathcal{F}$ se projettent sur des "faces supérieures" de la projection $Q^\alpha = \pi^\alpha(P)$, où

$$\pi^\alpha : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \begin{pmatrix} \pi(x) \\ \alpha(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R},$$

et une face est dite supérieure si elle est maximisée par une forme linéaire $(\psi, \psi_{d+1}) \in (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R})^*$ avec $\psi_{d+1} > 0$.

La Figure 1 donne un exemple de subdivision π -compatible mais pas π -cohérente.

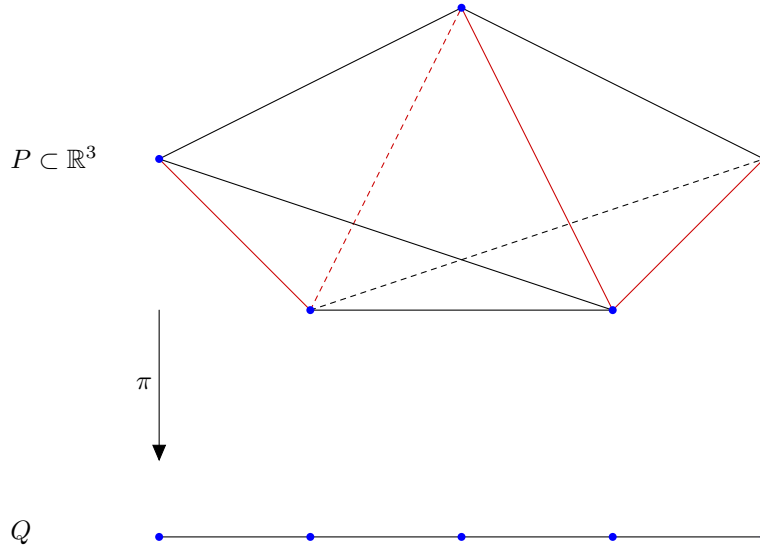


FIGURE 1 – Les arêtes rouges de la bipyramide P forment une subdivision π -compatible mais pas π -cohérente.

La figure 2 montre les trois subdivisions induites par la projection du cube de dimension 3 sur un hexagone de dimension 2. Elles sont toutes cohérentes puisqu'elles correspondent à "ce qu'on peut voir" en regardant le cube d'un côté ou de l'autre.

Théorème 16. *Le treillis de faces du polytope de fibre $\Sigma(P, \pi)$ est isomorphe comme ensemble partiellement ordonné à l'ensemble des subdivisions π -cohérentes de Q .*

Démonstration. Une face de $\Sigma(P, \pi)$ est de la forme $\Sigma(P, \pi)^\alpha$ pour α une forme linéaire de $(\mathbb{R}^p)^*$.

On a $\Sigma(P, \pi)^\alpha = \frac{1}{\text{vol}(Q)} \left(\int_Q P_y dy \right)^\alpha$. Il est clair que $\int_Q P_y^\alpha dy \subseteq \left(\int_Q P_y dy \right)^\alpha$. Montrons l'égalité. Prenons un point z de $\int_Q P_y^\alpha dy$. Il est de la forme $\int_Q \gamma(y) dy$ pour une certaine section γ , c'est-à-dire une fonction mesurable de Q vers \mathbb{R}^p telle que $\gamma(y) \in P_y$ pour tout $y \in Q$. Si z n'est pas dans $\int_Q P_y^\alpha dy$, alors il existe un ensemble de mesure strictement positive \mathcal{U} et $\epsilon > 0$ tel que pour tout

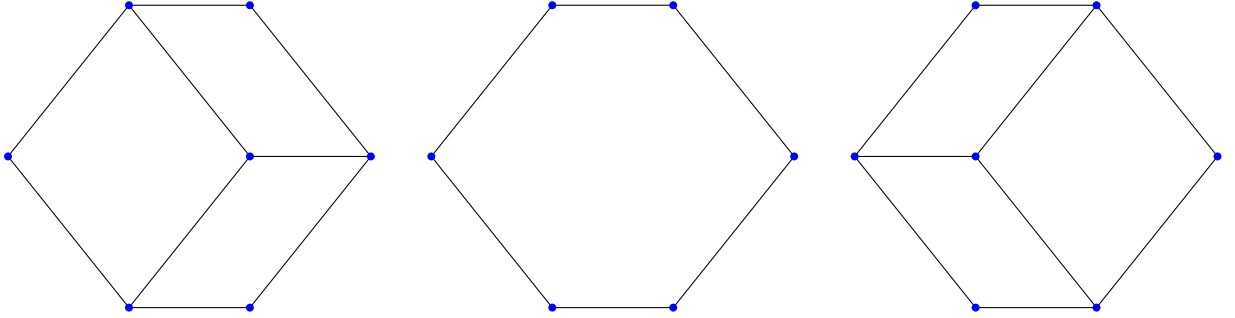


FIGURE 2 – Subdivisions induites par la projection du cube de dimension 3 sur un hexagone de dimension 2.

$y \in \mathcal{U}$, $\alpha(\gamma(y)) < \max_{P_y} \alpha - \epsilon$. Alors il existe une section γ_α telle que $\gamma_\alpha(y) \in P_y^\alpha$ pour tout $y \in Q$ et telle que $\alpha(\int_Q \gamma(y) dy) < \alpha(\int_Q \gamma_\alpha(y) dy)$. Ainsi, z n'est pas dans $\left(\int_Q P_y dy\right)^\alpha$, et on en déduit que $\int_Q P_y^\alpha dy = \left(\int_Q P_y dy\right)^\alpha$.

Regardons de plus près ce que sont les fibres P_y^α .

La forme linéaire α définit de manière unique une subdivision π -cohérente \mathcal{F} . Soit y un point de Q . Il existe une unique face $F \in \mathcal{F}$ telle que y soit dans l'intérieur relatif de $\pi(F)$. Comme \mathcal{F} est une subdivision π -cohérente, il existe une forme linéaire $\psi \in (\mathbb{R}^q)^*$ telle que $F = \{x \in P \mid \psi \circ \pi(x) + \alpha(x) = \max_P \psi \circ \pi + \alpha\}$. Alors $F \cap P_y = \{x \in P_y \mid \psi(y) + \alpha(x) = \max_P \psi \circ \pi + \alpha\} = P_y^\alpha$.

Ainsi, il y a bien une correspondance entre subdivisions π -cohérentes et faces de $\Sigma(P, \pi)$.

De plus, la relation d'ordre est préservée, car si α et β sont des formes linéaires de $(\mathbb{R}^p)^*$ telles que $\Sigma(P, \pi)^\alpha \subseteq \Sigma(P, \pi)^\beta$, alors $P_y^\alpha \subseteq P_y^\beta$ pour presque tout $y \in Q$. En effet, sinon on aurait un ouvert de mesure positive \mathcal{U} , $\epsilon > 0$ et une section γ telle que $\gamma(y) \in P_y^\alpha \cap P_y^\beta$ pour tout $y \in Q \setminus \mathcal{U}$, et $\beta(\gamma(y)) < \max_{P_y} \beta$ pour tout $y \in \mathcal{U}$, d'où $\int_Q \gamma(y) dy \in \Sigma(P, \pi)^\alpha \setminus \Sigma(P, \pi)^\beta$. Ainsi, l'union de la subdivision induite par α est incluse dans celle induite par β . \square

3.1.3 Problème de Baues généralisé

Ce théorème fait apparaître une structure très particulière pour le poset des subdivisions π -cohérentes, qui a notamment la topologie d'une sphère. La topologie du poset de toutes les subdivisions π -compatibles est étudiée activement sous le nom de Problème de Baues Généralisé (GBP) (voir l'exposition de Reiner dans l'article [Rei99]).

Définition 17. La *topologie d'un poset* désigne l'espace topologique qui réalise le complexe simplicial abstrait formé par l'ensemble des chaînes du poset.

Pour une projection $P \xrightarrow{\pi} Q$, on notera $\omega(P \xrightarrow{\pi} Q)$ la topologie du poset des subdivisions π -induites, privé de l'élément maximal qui est la subdivision triviale $\{P\}$. On notera $\omega_{coh}(P \xrightarrow{\pi} Q)$ la topologie du sous-poset formé des subdivisions π -cohérentes.

Version faible du GBP. (formulée par Billera et Sturmfels dans l'article *Fiber Polytopes* [BS92]) L'inclusion $\omega_{coh}(P \xrightarrow{\pi} Q) \hookrightarrow \omega(P \xrightarrow{\pi} Q)$ induit-elle une équivalence d'homotopie? Ceci implique que $\omega(P \xrightarrow{\pi} Q)$ est homotopiquement équivalent à une sphère de dimension $\dim(P) - \dim(Q) - 1$ d'après le Théorème 16.

Version forte du GBP. (formulée par Billera, Kapranov et Sturmfels en 1994 [BKS94]) L'inclusion $\omega_{coh}(P \xrightarrow{\pi} Q) \hookrightarrow \omega(P \xrightarrow{\pi} Q)$ est-elle une rétraction forte par déformation?

Le nom du problème vient d'une conjecture formulée par Baues au cours de son étude des espaces de lacets itérés ([Bau80]), qui correspond au GBP faible dans le cas des chemins monotones du permuttoèdre (P est le permuttoèdre, Q est de dimension 1 et π est générique).

La Figure 3 montre le graphe des triangulations cohérentes d'une configuration de points formée des sommets de deux triangles équilatéraux l'un dans l'autre. Le poset est isomorphe au complexe de faces de l'enveloppe d'un polytope de dimension 3, le polytope secondaire de cette configuration. La Figure 4 illustre comment l'ajout des subdivisions non-cohérentes, entourées en rouge, modifie la topologie. Lorsqu'on les prend en compte, c'est comme si on remplaçait la 2-face hexagonale du polytope secondaire par un cube plein en 3 dimensions. On obtient un complexe polyédral qui se rétracte sur celui obtenu pour les subdivisions cohérentes. Cette configuration vérifie donc la conjecture de Baues généralisée.

Il existe des exemples pour lesquels la réponse est négative, mais caractériser les projections $P \xrightarrow{\pi} Q$ qui vérifient la conjecture reste un problème ouvert. Plus précisément, voici quelques familles particulièrement intéressantes pour lesquelles la conjecture de Baues généralisée a été prouvée :

- $\dim(P) - \dim(Q) \leq 2$ (Rambau-Ziegler 1992, version forte [RZ94]),
- Q est de dimension 1 (Billera-Kapranov-Sturmfels 1994, version forte [BKS94]) : les subdivisions induites sont les chemins monotones pour la fonctionnelle π (voir Section 3.3.1). Ceci répond affirmativement à la conjecture initiale de Baues.
- P est l'hypersimplex $\Delta_{n-1}^{(k)}$ et $Q = C_n^{(k)}$, où C_n est un polygone à n sommets dans \mathbb{R}^2 , et pour tout polytope R à n sommets s_1, \dots, s_n et $k \in \{1, \dots, n\}$, $R^{(k)}$ désigne le polytope obtenu comme enveloppe convexe de l'ensemble de points $\{\sum_{i \in I} s_i \mid I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I| = k\}$ (Ollarte-Santos 2019, version forte [OS19]). Ce type de subdivisions, dites *hypersimpliciales*, est lié à l'étude des graphes plabiques et de la Grassmannienne positive.

Et voici quelques contre-exemples à la conjecture de Baues généralisée :

- premières constructions et contre-exemple particulier : P un polytope de dimension 5, simplicial et 2-neighborly (c'est-à-dire que son graphe est un graphe complet) à 10 sommets, projeté sur Q un hexagone dans \mathbb{R}^2 (Rambau-Ziegler 1992 [RZ94]),
- P un simplexe et Q une configuration de 17 points en position générale dans \mathbb{R}^6 qui a un graphe de triangulations non-connexe (Santos 2006 [San06]),
- P un hypercube et Q un zonotope de dimension 4 qui a un graphe de pavements zonotopaux non-connexe (Liu 2020 [Liu20]). Ce contre-exemple infirme également la conjecture que l'espace d'extension des matroïdes orientés réalisables de rang d est homotopiquement équivalent à une sphère de dimension $d - 1$.

Dans la même lignée il y a des travaux récents sur des problèmes plus faibles, par exemple la connexité des graphes de subdivisions.

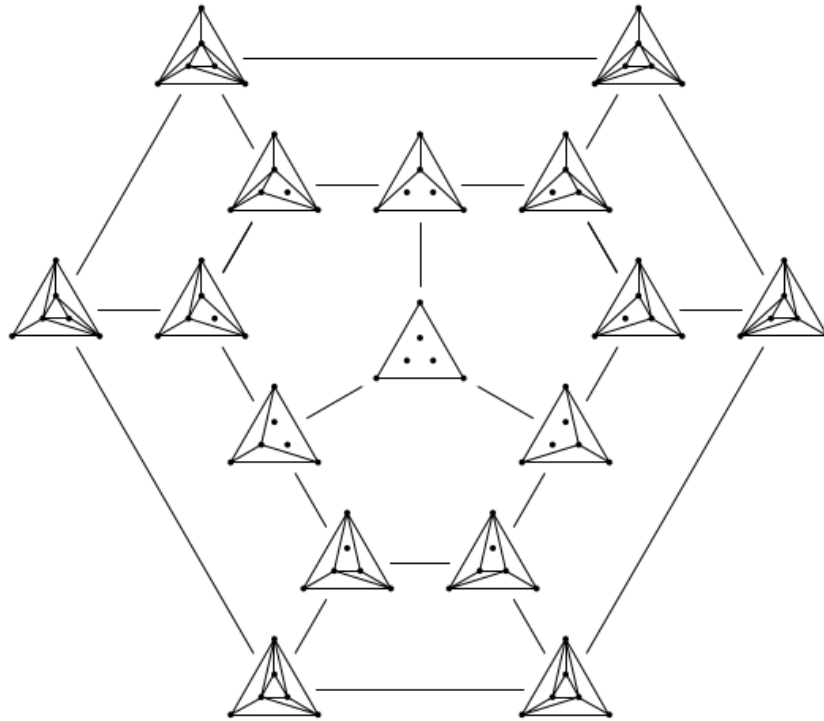


FIGURE 3 – Graphe des triangulations cohérentes d’une configuration de points formée des sommets de deux triangles équilatéraux l’un dans l’autre. (Image adaptée de l’article de Reiner [Rei99])

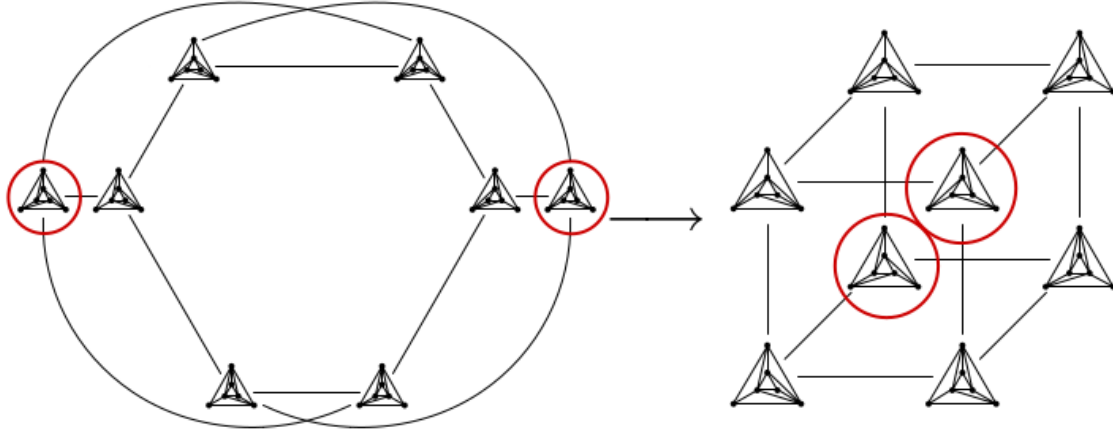


FIGURE 4 – La configuration des sommets de deux triangles l’un dans l’autre admet deux triangulations non-cohérentes, entourées en rouge. Lorsqu’on les prend en compte, c’est comme si on remplaçait la 2-face hexagonale du polytope secondaire par un cube plein en 3 dimensions. (Image adaptée de l’article de Reiner [Rei99])

3.2 Polytopes secondaires et triangulations

3.2.1 Définition des polytopes secondaires

Soit Q un polytope dans \mathbb{R}^q , dont les sommets sont étiquetés et notés a_1, \dots, a_n . On dispose d’une projection canonique du $(n - 1)$ -simplexe vers Q :

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ e_i & \mapsto a_i \end{cases}.$$

Dans ce cas, toutes les subdivisions de Q sont uniquement associées à des subdivisions π -compatibles, et les plus fines sont les triangulations.

Alors $\Sigma(P, \pi)$, également noté $\Sigma(Q)$ car l’emphase est portée sur Q , correspond à un facteur multiplicatif près au *polytope secondaire de Q* , dont la définition a été donnée par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ([GKZ94]). Ses sommets sont en bijection avec les triangulations cohérentes de Q .

Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont donné des coordonnées explicites des sommets en fonction des triangulations de Q .

Définition 18. Soit T une triangulation de Q . Ses simplexes maximaux, de dimension q , sont de la forme $\text{conv}(a_i, i \in \tau)$ pour τ un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ à $q + 1$ éléments. On notera \mathcal{S} l’ensemble des tels sous-ensembles qui correspondent à un simplexe maximal de T .

On définit le vecteur de \mathbb{R}^n :

$$\text{GKZ}(T) = \frac{1}{(d + 1)\text{Vol}(Q)} \sum_{\tau \in \mathcal{S}} \text{Vol}(\tau) \left(\sum_{i \in \tau} e_i \right).$$

Théorème 19. Les sommets de $\Sigma(Q)$ sont exactement les vecteurs $\text{GKZ}(T)$ pour les triangulations T de Q qui sont cohérentes.

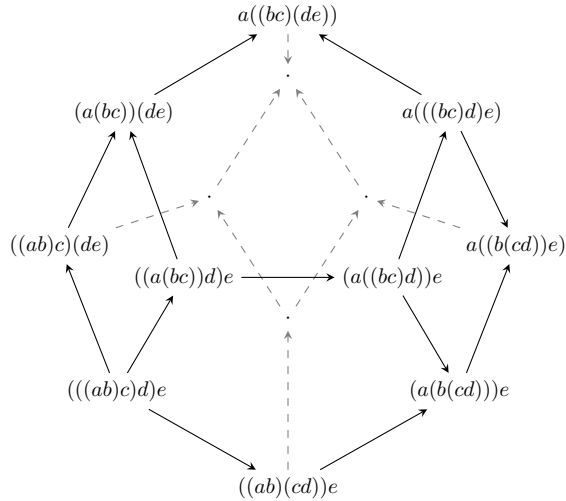


FIGURE 5 – Une réalisation de l’associaèdre de dimension 3, avec les sommets étiquetés par les mots à 5 lettres bien parenthésés.

3.2.2 Exemple de l’associaèdre

Dans le cas où Q est un polygone à n sommets (dans \mathbb{R}^2), on retrouve une construction possible pour les associaèdres, ou polytopes de Stasheff, qui sont fameux pour leurs propriétés combinatoires. Leurs nombres de sommets sont comptés par les nombres de Catalan, qui comptent de nombreuses familles combinatoires comme les mots bien parenthésés, les chemins de Dyck, les arbres binaires planaires enracinés et bien entendu les triangulations des polygones. Certaines orientations acycliques de leur graphe correspondent au diagramme de Hasse du treillis de Tamari.

Ces structures, qui proviennent du concept d’associativité, apparaissent également en topologie algébrique (espaces de lacets, algèbres à homotopie près), en algèbre (A_∞ -algèbres, algèbres amassées, groupes de Thompson, compactification d’espaces de modules), en physique théorique (algèbres dendriformes, renormalisation), en informatique théorique (fonctions parking).

En fait, une réalisation polytopale de ces structures a été un problème étudié par plusieurs chercheurs entre son apparition dans la thèse de Dov Tamari en 1951 et la première réalisation publiée, en 1989 par Lee (voir l’article [CSZ15] pour plus de détails). Il est à noter que la construction par des polytopes secondaires ne donne qu’une famille de réalisations des associaèdres. Par exemple, ces réalisations ne présentent jamais de facettes parallèles, contrairement à d’autres familles de constructions via les cluster complexes du système de racines A_n , ou des sommes de Minkowski de simplexes. L’espace de réalisation des associaèdres est encore riche de mystères.

3.2.3 Lien avec la théorie des déterminants

Initialement, les polytopes secondaires ont été étudiés pour donner un cadre combinatoire aux discriminants et résultants de variétés toriques. En effet, étant donné une configuration finie \mathcal{A} de points dans \mathbb{Z}^d , le polytope secondaire de $\text{conv}(\mathcal{A})$ coïncide avec le polytope de Newton du \mathcal{A} -déterminant principal $E_{\mathcal{A}}$.

Définition 20. Le \mathcal{A} -déterminant principal $E_{\mathcal{A}}$ est un polynôme en les variables $\{c_a, a \in \mathcal{A}\}$ qui s'annule dès que le polynôme $f = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a x^a$, à support dans \mathcal{A} , a une racine $x = (x_1, \dots, x_d)$ en commun avec les polynômes dérivés $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

Ce polynôme admet une factorisation qui permet de calculer le \mathcal{A} -discriminant $\Delta_{\mathcal{A}}$, qui s'annule lui lorsque le polynôme f a une racine commune avec les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

3.3 Polytopes des chemins monotones cohérents

3.3.1 Chemins monotones

Un autre cas particulier de polytopes de fibre est donné lorsque le polytope Q est un segment, de dimension 1. On suppose également que π , considérée comme une forme linéaire dans $(\mathbb{R}^p)^*$, est générique, c'est-à-dire qu'elle n'est constante sur aucune arête de P .

Définition 21. Notons v_m , respectivement v_M , le sommet de P qui minimise, respectivement maximise, π .

Un *chemin π -monotone* γ est un chemin de sommets de P qui relie v_m à v_M : $v_m = v_0, v_1, \dots, v_r = v_M$, tel que pour tous $k \in \{0, \dots, r-1\}$, v_k et v_{k+1} sont reliés par une arête dans P et $\phi(v_k) < \phi(v_{k+1})$.

Il induit un ensemble d'arêtes de P qui est une subdivision π -compatible.

Les chemins monotones jouent un rôle central en optimisation linéaire. En effet, on peut voir π comme une fonction objectif, que l'on cherche à maximiser sur le domaine polyédral P , défini par une famille d'inégalités. Le fameux *algorithme du simplexe*, introduit par George Dantzig en 1947, repose sur des parcours de chemins monotones. Bien que très efficace en moyenne, la complexité dans le pire des cas de cet algorithme est exponentielle. C'est un problème ouvert important de trouver une variante pour la règle de pivot qui rendrait la complexité polynomiale pour tous les problèmes linéaires, ou prouver qu'une telle règle n'existe pas. Comme articles récents sur le sujet on peut citer [BLL20] et [ALZ20].

Théorème 22. Pour chaque chemin π -monotone γ on définit le vecteur de \mathbb{R}^p :

$$MP(\gamma) = \frac{1}{\pi(v_M) - \pi(v_m)} \left(\frac{v_m + v_M}{2} + \sum_{i=1}^{r-1} v_i \right).$$

Les sommets de $\Sigma(P, \pi)$ sont exactement les vecteurs $MP(\gamma)$ pour les chemins γ qui sont π -monotones et π -cohérents sur P .

3.3.2 Exemple du permutoèdre

Le polytope de fibre $\Sigma(\square_n, s)$ de l'hypercube \square_n pour la projection $s : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ est une transformation affine du permutoèdre P_n , défini comme l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n \sigma(i) e_i \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$:

$$\Sigma(\square_n, s) = \frac{2}{n} P_n - \frac{n+1}{n} \left(\sum_{i=1}^n e_i \right).$$

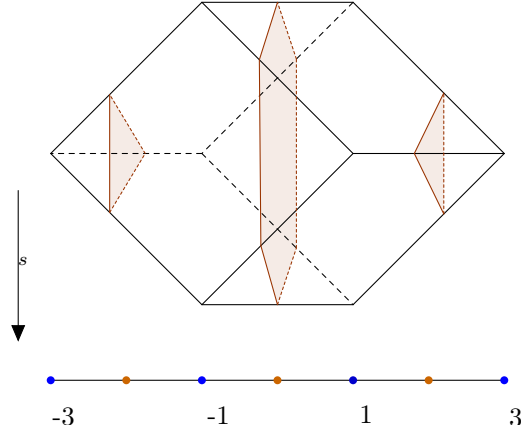


FIGURE 6 – Le polytope de fibre du cube projeté selon la somme des coordonnées est le permuttoèdre P_3 , qui est un hexagone.

3.4 Pavages zonotopaux

Lorsque P est un hypercube, sa projection Q est un zonotope et les subdivisions π -compatibles les plus fines sont des *pavages zonotopaux* de Q . La Figure 2 montre les deux pavages zonotopaux d'un hexagone, à gauche et à droite.

Un zonotope Z est naturellement associé à un *matroïde orienté réalisable* $\mathcal{M}(Z)$, structure combinatoire qui unifie différents contextes. Le théorème de Bohne-Dress établit une bijection entre les pavages zonotopaux de Z et les extensions à un élément de $\mathcal{M}(Z)$ (voir par exemple l'article [RGZ94]). Les pavages zonotopaux π -cohérents correspondent à des extensions réalisables.

3.5 Sweepotopes

Soit A une configuration de n points distincts a_1, \dots, a_n dans \mathbb{R}^d .

Définition 23. Une *sweep permutation* de A est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle qu'il existe une forme linéaire $u \in (\mathbb{R}^d)^*$ telle que $u(a_{\sigma(1)}) < u(a_{\sigma(2)}) < \dots < u(a_{\sigma(n)})$.

Plus généralement, une forme linéaire $u \in (\mathbb{R}^d)^*$ définit une partition ordonnée $I = (I_1, \dots, I_l)$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, telle que $u(a_i) = u(a_j)$ pour tout i, j dans la même part I_k , et $u(a_i) < u(a_j)$ si $i \in I_r, j \in I_s$ et $r < s$. Ces partitions ordonnées sont appelées les *sweeps* de A . L'ensemble des sweeps de A est partiellement ordonné par une relation de raffinement.

Définition 24. Le *zonotope* Z_A associé à A est la somme de Minkowski des vecteurs de A homogénéisés dans \mathbb{R}^{d+1} :

$$Z_A = \sum_{i=1}^n [-(a_i, 1), (a_i, 1)].$$

Notons $\pi_{d+1} : \begin{cases} \mathbb{R}^{d+1} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x_{d+1} \end{cases}$ la projection selon la dernière coordonnée.

Alors le polytope de fibre $\Sigma(Z_A, \pi_{d+1})$ est appelé le *sweepotope* S_A associé à A .

Cette structure généralise les suites admissibles de permutations définies par Goodman et Pollack dans le cas $d = 2$ ([GP80]).

Il existe deux autres définitions équivalentes du sweepotope S_A :

— comme somme de Minkowski des différences entre deux points de A :

$$S_A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[-\frac{a_i - a_j}{2}, \frac{a_i - a_j}{2} \right],$$

— comme projection affine du permutoèdre :

$$S_A \times \{0\} = \phi_A(P_n) - \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i, 1), \text{ dans } \mathbb{R}^{d+1},$$

$$\text{où } \phi_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ e_i & \mapsto (a_i, 1) \end{cases}.$$

Théorème 25. *Le treillis des faces du sweepotope S_A est isomorphe comme ensemble partiellement ordonné à l'ensemble des sweeps de A .*

Exemple de résultat prouvé pendant mon stage : l'ensemble des sweep permutations suffit à déterminer le treillis des faces du sweepotope.

Exemple de piste à approfondir : que peut-on dire sur les "pseudo-sweeps", c'est-à-dire les chemins monotones du zonotope Z_A qui ne sont pas nécessairement cohérents ?

Références

- [ALZ20] Christos Athanasiadis, Jesús De Loera, and Zhenyang Zhang. Enumerative problems for arborescences and monotone paths on polytopes. Preprint, [arXiv:2002.00999](#), 2020.
- [Bau80] H. J. Baues. Geometry of loop spaces and the cobar construction. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 25(230) :ix+171, 1980.
- [BKS94] L. J. Billera, M. M. Kapranov, and B. Sturmfels. Cellular strings on polytopes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(2) :549–555, 1994.
- [BLL20] Moïse Blanchard, Jesús A. De Loera, and Quentin Louveaux. On the length of monotone paths in polyhedra. Preprint, [arXiv:2001.09575](#), 2020.
- [BS92] Louis J Billera and Bernd Sturmfels. Fiber polytopes. *Annals of Mathematics*, pages 527–549, 1992.
- [CSZ15] Cesar Ceballos, Francisco Santos, and Günter M. Ziegler. Many non-equivalent realizations of the associahedron. *Combinatorica*, 35(5) :513–551, 2015.
- [GKZ94] Israel M. Gelfand, Mikhail M. Kapranov, and Andrei V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [GP80] Jacob E. Goodman and Richard Pollack. On the combinatorial classification of nondegenerate configurations in the plane. *J. Combin. Theory Ser. A*, 29(2) :220–235, 1980.

- [Kou76] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1) :1–31, 1976.
- [Liu20] Gaku Liu. A counterexample to the extension space conjecture for realizable oriented matroids. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 101(1) :175–193, 2020.
- [Mn8] N. E. Mnëv. The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties. In *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, volume 1346 of *Lecture Notes in Math.*, pages 527–543. Springer, Berlin, 1988.
- [OS19] Jorge Alberto Olarte and Francisco Santos. Hypersimplicial subdivisions. Preprint, [arXiv:1906.05764](https://arxiv.org/abs/1906.05764), 2019.
- [Rei99] Victor Reiner. The generalized baues problem. *New perspectives in algebraic combinatorics*, 38 :293–336, 1999.
- [RGZ94] Jürgen Richter-Gebert and Günter M. Ziegler. Zonotopal tilings and the Bohne-Dress theorem. In *Jerusalem combinatorics '93*, volume 178 of *Contemp. Math.*, pages 211–232. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [RZ94] Victor Reiner and Günter M. Ziegler. Coxeter-associahedra. *Mathematika*, 41(2) :364–393, 1994.
- [San06] Francisco Santos. Geometric bistellar flips : the setting, the context and a construction. In *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, pages 931–962. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.