INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE : THÉORIE DES EXTENSIONS POUR LES C^*-ALGÈBRES

ANTOINE LE CALVEZ

Sous la direction de Stuart White

1. Introduction

La théorie des extensions prend ses racines très tôt, et même bien avant celle des C^*-algèbres. Les C^*-algèbres commencent à voir le jour dans les années 1930, avec Heisenberg, afin de modéliser des espaces ou des observables en mécanique quantique : on parle d'algèbres d'opérateurs. Jordan y contribue de manière plus mathématique, et Von Neumann pose les fondements des W^*-algèbres, qui portent désormais, en hommage à son créateur, le nom d'algèbres de Von Neumann.

C'est en 1943 que Gelfand et Naimark apportent une caractérisation abstraite des C^*-algèbres, ne les voyant plus comme des sous-algèbres de l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.

Il faut attendre la thèse de Busby en 1967 pour que commence à se développer la théorie abstraite des extensions de C^*-algèbres. Ces travaux seront généralisés dans les années 1970 par Brown, Douglas et Fillmore, pour donner le foncteur **Ext**, puis par Kasparov à la fin des années 1980 pour donner la $KK-$Théorie, qui englobe toute la $K-$théorie. Cette nouvelle forme des extensions joue en rôle majeur dans la classification des C^*-algèbres.

La théorie des extensions, sous sa forme originelle est encore utilisée aujourd'hui dans le domaine des C^*-algèbres. Je l'ai étudiée lors de mon stage de M2 à l'université d'Oxford. Dans son premier article, datant de 2017, "A new proof of the Tikuisis-White-Winter Theorem", Schafhauser se base en grande partie sur un résultat de la théorie des extensions dû à Elliott et Kucerovsky en 2001, revu par Gabe en 2016. Dans son second article, "Subalgebras of simple C^*-algebras", écrit l'année suivante, il généralise des résultats de son premier article et les traduit en $KK-$théorie.

De plus, dans un futur article à paraître, que sont en train d'écrire Carrion, Gabe, Schafhauser, Tikuisis et White, de nouvelles définitions et de nouveaux résultats, reprenant les travaux de Schafhauser, verront le jour.

2. Préliminaires sur les C^*-algèbres et les algèbres de Von Neumann

Définition 2.1. Une algèbre de Banach A sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est dite unifère si elle possède une unité pour la multiplication. Si c'est le cas, on dispose d'une injection de $\mathbb{C}$ dans A donnée par $\lambda \mapsto \lambda 1$ qui nous permet de voir $\mathbb{C}$ comme une sous-algèbre de A.

Si A est une alèbre de Banach, on note A^+ l'algèbre de Banach $A \oplus \mathbb{C}$ où la multiplication est donnée par $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$. C'est une algèbre unifère qui contient naturellement A.

Pour A algèbre de Banach, on pose $A^\sim = A$ si A est unifère, et $A^\sim = A^+$ sinon. On appelle $A^\sim$ l'unifèrisée de A.

Définition 2.2. Soit A une algèbre de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et soit $a \in A$. On définit le spectre de a comme l'ensemble des nombres complexes λ tel que $a - \lambda$

n'est pas inversible. On le note $Sp_A(a)$, ou $Sp(a)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté. C'est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Définition 2.3. Soit A une algèbre de Banach sur le corps des nombres complexes. Une *involution* de A est une application $A \to A$, $x \mapsto x^*$ satisaisant les axiomes suivants :

(1) $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda x + y)^* = \bar{\lambda} x^* + y^*$ (antilinéaire)
(2) $\forall x, y \in A$, $(xy)^* = y^* x^*$ (antimultiplicative)
(3) $\forall x \in A$, $\|x\| = \|x^*\|$ (isométrique)

On dit que A est une C^*-*algèbre* si elle est munie d'une involution satisfaisant :

$$\forall x \in A, \; \|x^* x\| = \|x\|^2 .$$

Exemples 2.4.
- L'algèbre des applications continues sur un compact séparé X, $C(X)$, munie de l'involution donnée par la conjugaison complexe.
- L'algèbre des applications linéaires bornées sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, munie de l'involution donnée par l'adjonction $T \mapsto T^*$. En particulier, lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie, l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes, $\mathbb{M}_n$, est une C^*-algèbre.

Définition 2.5. Un élément h d'une C^*-algèbre A est dit *positif* s'il existe un élément x de A telle que $h = x^* x$ ou de manière équivalente si $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+$.
On note A_+ l'ensemble des éléments positifs d'une C^*-algèbre A. C'est un cône convexe.

2.6. **Propriétés de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.** Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces de Hilbert séparables (de dimension infinie), ils sont isométriques. En particulier, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ et $\mathbb{B}(\mathcal{K})$ sont isomorphes. On note $\mathbb{B}$ la C^*-algèbre des applications linéaires bornées sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Proposition 2.7. *Soit k un entier, $k \geq 2$. Il existe dans $\mathbb{B}$ des isométries $s_1, ..., s_k$ vérifiant :*

$$s_1 s_1^* + ... + s_k s_k^* = 1 \qquad s_j^* s_k = \delta_{j,k},\ 1 \leq j, k \leq n. \tag{2.7.1}$$

Proof. Soient $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sa base canonique et soit, pour $1 \leq j \leq k$, s_j l'application linéaire qui à e_n associe e_{kn+j}. On vérifie facilement que l'adjoint de s_j est l'application linéaire qui à e_n associe $e_{\frac{n-j}{k}}$ si n est congru à j modulo k et 0 sinon. On a donc bien $s_j^* s_k = \delta_{j,k}$ pour $1 \leq j, k \leq n$. Pour $1 \leq j \leq n$, $s_j s_j^*$ est l'application linéaire qui à e_n associe e_n si n est congru à j modulo k et 0 sinon. Ainsi $s_1 s_1^* + ... + s_k s_k^* = 1$, d'où le résultat. □

2.7.1. *Topologies sur $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.* Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ peut être munie de plusieurs topologies. La topologie *normique* est définie à partir de la norme d'opérateurs. C'est elle qui fait de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ une C^*-algèbre.
La topologie *faible* est la topologie la plus faible rendant les applications $T \mapsto \langle T(x), y\rangle$ $x \in \mathcal{H}$ continues.
La topologie *forte* est la topologie la plus faible rendant les applications $T \mapsto T(x)$ $x \in \mathcal{H}$ continues.
La topole **-forte* est la topologie la plus faible rendant les applications $T \mapsto T(x)$ et $T \mapsto T^*(x)$ $x \in \mathcal{H}$ continues.

2.7.2. *Applications linéaires compactes.* On rappelle la notion d'opérateur compact :

Définition 2.8. Soit T une application linéaire bornée sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que T est *compacte* si l'image par T de la boule unité de $\mathcal{H}$ est d'adhérence compacte. On note $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications linéaires compactes sur $\mathcal{H}$, c'est un idéal de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. C'est aussi une C^*-algèbre.

Proposition 2.9. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ est égal à l'adhérence (normique) des applications linéaires de rang fini.*

De même que précédemment, on notera $\mathbb{K}$ pour la C^*−algèbre des applications linéaires compactes sur un espace de Hilbert séparable (de dimension infinie).

Proposition 2.10. $\mathbb{K} \cong \varinjlim \mathbb{M}_n$

Dans ce document, $\otimes$ désignera le produit tensoriel minimal de C^*−algèbres. Voir [BO] pour la construction de cet objet.

Définition 2.11. Une C^*−algèbre A est dite *stable* si $A \otimes \mathbb{K} \cong A$, ou de manière équivalente, par la proposition précédente, si $A \cong \varinjlim \mathbb{M}_n \otimes A$. La stabilisation de A, notée $\mathbb{M}_\infty(A)$, est définie comme étant $A \otimes \mathbb{K}$.

Proposition 2.12. $\mathbb{K}$ *est stable*

Corollaire 2.13. *La stabilisation d'une C^*−algèbre est stable.*

2.14. **L'algèbre multiplicatrice d'une C^*−algèbre.** Soit A une C^*−algèbre. Nous avons vu, lorsque A n'était pas unifère, que A pouvait s'injecter dans son unitarisée $A^\sim$. De cette manière, A est vue comme un idéal essentiel de cette algèbre unifère (*i.e.* si x dans $\mathcal{M}(A)$ est tel que $xA = 0$, alors $x = 0$).

Définition 2.15. Soit A une C^*−algèbre. On appelle *uniférisation* de A une injection de A dans une algèbre unifère, qui fait de A un idéal essentiel de cette algèbre.

Exemple 2.16. Si A est une C^*−algèbre, $A^\sim$ est une unifèrisation de A. C'est même la plus petite unifèrisation de A.

Définition 2.17. L'*algèbre multiplicatrice* de A, notée $\mathcal{M}(A)$ est la plus grande uniférisation de A.

Exemples 2.18. Si A est une C^*−algèbre unifère, $\mathcal{M}(A) = A$.
$\mathcal{M}(\mathbb{K}) = \mathbb{B}$.
Si $A \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ est une C^*−algèbre concrètement représentée,
$$\mathcal{M}(A) = \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}),\, xA \subset A \text{ et } Ax \subset A\}.$$

Proposition 2.19. *Soient A, B deux C^*−algèbres. Alors $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B) \subset \mathcal{M}(A \otimes B)$.*

Corollaire 2.20. *Soit A une algèbre stable. Alors il existe dans $\mathcal{M}(A)$ des isométries $s_1, ..., s_k$ vérifiant 2.7.1.*

Proof. Soient $s'_1, ..., s'_k$ des isométries de $\mathbb{B}$ vérifiant 2.7.1 et soit, pour $1 \leq i \leq k$, $s_i = 1 \otimes s'_i \in \mathcal{M}(A) \otimes \mathbb{B} = \mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(A \otimes \mathbb{K}) \cong \mathcal{M}(A)$. Les isométries $s_1, ..., s_k$ sont bien des éléments de $\mathcal{M}(A)$ vérfiant 2.7.1. □

2.21. **Algèbres de Von Neumann.**

Définition 2.22. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $A \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une C^*−algèbre. Le *commutant* de A, noté A', est la C^*−algèbre $\{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}),\, \forall a \in A, xa = ax\}$. Le *bicommutant* de A, noté A'', est le commutant de A'.

Théorème 2.23 (du bicommutant de Von Neumann)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $A \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une C^*−algèbre contenant 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $A'' = A$

- *A est faiblement fermée dans $\mathbb{B}(\mathcal{H})$*
- *A est fortement fermée dans $\mathbb{B}(\mathcal{H})$*
- *A est *-fortement fermée dans $\mathbb{B}(\mathcal{H})$*

Définition 2.24. Si M vérifie l'une des conditions du théorème précédent (donc les quatre), on dit que M est une *algèbre de Von Neumann.* Si $M \cap M' = \mathbb{C}1$, on dit que M est un *facteur.*

Théorème 2.25 (de densité de Kaplansky)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, A une sous C^*-algèbre de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ contenant 1 et soit $T \in A''$. Si $\|T\| \leq 1$, T est fortement adhérent à la boule unité de A.*

2.25.1. *Propriété topologique des algèbres de Von Neumann.* Soit $M \subset \mathcal{H}$ une algèbre de Von Neumann. Il existe un espace M_*, appelé prédual de M, qui est tel que M_*^* soit isométrique à M. La topologie faible sur M associé à son prédual est appelée *topologie ultrafaible sur M.*

Nous rappelons le théorème de Banach-Alaoglu :

Théorème 2.26. *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité du dual de E est compacte pour la topologie de la convergence en chaque point.*

Corollaire 2.27. *La boule unité de M est ultrafaiblement compacte.*

Soient M une algèbre de Von Neumann, X un espace de Banach et soit $\mathbb{B}(X, M)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de X vers M.

Théorème 2.28. *La boule unité de $\mathbb{B}(X, M)$ est compacte pour la topologie ultrafaible point par point.*

3. Sur la théorie des extensions

Définition 3.1. Soient A et C deux C^*-algèbres. Une *extension* de A par C est un triplet $\eta = (\alpha, B, \beta)$ où B est une C^*-algèbre, $\alpha : A \to B$ et $\beta : B \to C$ sont des *-morphismes et la suite suivante est exacte :

$$\eta : \; 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

On dit qu'une extension η est triviale si la suite est scindée.
On dit que η est *semi-scindée* s'il existe une application c.c.p. $\phi : C \to B$ tel que $\beta \circ \phi = \mathrm{id}_C$.

Exemple 3.2. L'extension associée aux opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K} \longrightarrow 0 \; .$$

Exemple 3.3. Soit S l'opérateur de décalage sur $l^2(\mathbb{N})$ (*i.e.* $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$) et soit $\mathcal{T}$ la sous C^*-algèbre de $l^2(\mathbb{N})$ engendrée par S, que l'on appelle algèbre de Toeplitz. L'opérateur $P = 1 - SS^*$ est la projection sur e_0. Si bien que pour tout entiers i, j, $S^j P (S^*)^i$ est l'opérateur envoyant e_k sur $\delta_{ik} e_j$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathcal{T}$ contient tous les opérateurs de rang fini, et donc $\mathbb{K}$. On peut montrer que le quotient est isomorphe à $C(\mathbb{T})$, d'où une extension, dite de Toeplitz :

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

Lemme 3.4. *Soient A et C deux C^*-algèbres et soit $\eta = (\alpha, B, \beta)$ une extension de A par C. Alors il existe un unique morphisme $\sigma : B \to \mathcal{M}(A)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\iota"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathcal{M}(A) \end{tikzcd}$$

Cela nous permet de définir l'invariant de Busby :

Définition 3.5. Soient A et C deux C^*-algèbres, $\eta = (\alpha, B, \beta)$ une extension de A par C et soit σ le morphisme donné par le lemme 3.4. On note $\pi : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/A$. On appelle *invariant de Busby* de l'extension η le *-morphisme $\rho : C \to \mathcal{M}(A)/A$ défini par, pour $c \in C$

$$\rho(c) = \pi \circ \sigma(b)$$

où $b \in B$ est un relevé de c. Cela ne dépend pas du relevé b choisi puisque si $\beta(b_1) = \beta(b_2)$ pour deux éléments b_1, b_2 de B, $\beta(b_1 - b_2) = 0$ et donc $b_1 - b_2 = \alpha(a)$ pour un élément $a \in A$ puis $\pi \circ \sigma(b_1 - b_2) = \pi \circ \sigma\alpha(a) = \pi \circ \iota(a) = 0$.

Exemple 3.6. Dans l'extension des opérateurs compacts, l'invariant de Busby n'est autre que $\mathrm{id}_{\mathbb{B}/\mathbb{K}}$.

Dans l'extension de Toeplitz, $C(\mathbb{T})$ est engendrée par l'application identité, que l'on note z. Aussi l'invariant de Busby de cette extension ne dépend que de sa valeur en z, qui est $\pi(S)$, où π est la projection de $\mathbb{B}$ sur le quotient de $\mathbb{B}$ par $\mathbb{K}$.

Une extension de A par C permet de définir un *-morphisme de C vers $\mathcal{M}(A)/A$. Nous allons maintenant, à partir d'un *-morphisme $\rho : C \to \mathcal{M}(A)/A$, construire une extension de A par C. Soit donc ρ un tel morphisme et soit E la C^*-algèbre définie par

$$E = \{(c, a) \in C \oplus \mathcal{M}(A),\, \rho(c) = \pi(a)\}$$

Soit $\iota : a \in A \mapsto (0, a) \in E$ et soit $\pi_1 : E \to C$ la projection sur la première coordonnée.

La suite suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi_1} C \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, ι est bien injective et $\pi_1 \circ \iota = 0$. Si $\pi_1(c, a) = 0$ pour un $(c, a) \in E$, on a $c = 0$ puis $\pi(a) = 0$, donc a est un élément de A, et $(c, a) = \iota(a)$. Enfin π_1 est surjectif car si c est un élément de C, $\rho(c)$ s'écrit $\rho(c) = \pi(a)$ pour un $a \in \mathcal{M}(A)/A$ puis $\pi_1(c, a) = c$.

Cette suite exacte est une extension η de A par C, et elle admet ρ pour invariant de Busby.

En effet, soit ρ' son invariant de Busby et soit $\pi_2 : E \to \mathcal{M}(A)$ la projection sur la seconde coordonnée. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr] & E \arrow[d, "\pi_2"] \\ & \mathcal{M}(A) \end{tikzcd}$$

Soit c est un élément de C, et soit $x \in \mathcal{M}(A)$ un relevé de $\rho(c)$. $(c, x) \in E$ est un relevé de c puis $\rho'(c) = \pi \circ \pi_2(c, x) = \pi(x) = \rho(c)$.

L'extension η ainsi construite est appelée l'extension *tirée en arrière* du *-morphisme ρ.

Définition 3.7. Soient A et C deux C^*-algèbres et soient η_1 η_2 deux extensions de A par C avec invariants de Busby ρ_1 et ρ_2 respectivements. On dit que ρ_1 et ρ_2 sont *fortement unitairement équivalents* s'il existe un unitaire $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M}(A))$ tel que $\mathrm{ad}(\pi(u)) \circ \rho_1 = \rho_2$.
Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des extensions de A par C. Si η est une extension, on note $[\eta]$ sa classe d'équivalence. Enfin, on note $\mathbf{Ext}(A, C)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Puisqu'on peut construire une extension de A par C à partir d'un *-morphisme $C \to \mathcal{M}(A)/A$, on a une identification entre $\mathbf{Ext}(A, C)$ et les *-morphismes de C vers $\mathcal{M}(A)/A$, à conjugaison par un unitaire de $\mathcal{M}(A)$.

Lorsque A est stable, on peut construire une loi de composition interne sur $\mathbf{Ext}(A, C)$.

Soient deux extensions de A par C avec invariants de Busby ρ_1 et ρ_2 respectivements. On fixe deux isométries s_1 et s_2 de $\mathcal{M}(A)$ telles que $s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1$, que l'on identifie avec leur image dans $\mathcal{M}(A)/A$.

Soit $\rho : C \to \mathcal{M}(A)/A$ le *-morphisme défini par, pour $c \in C$,

$$\rho(c) = s_1 \rho_1(c) s_1^* + s_2 \rho_2(c) s_2^*$$

On note $\eta_1 \oplus \eta_2$ l'extension tiré en arrière du morphisme ρ. Cela définit un élément de $\mathbf{Ext}(A, C)$ qui est indépendant du choix des isométries s_1 et s_2. Il ne dépend pas non plus du choix des représentants de $[\eta_1]$ et $[\eta_2]$ dans $\mathbf{Ext}(A, C)$.

En posant $[\eta_1] + [\eta_2] = [\eta_1 \oplus \eta_2]$, on définit une loi de composition interne commutative et associative sur $\mathbf{Ext}(A, C)$, ce qui fait de $\mathbf{Ext}(A, C)$ un demi-groupe commutatif.

Définition 3.8. On définit $\mathrm{Ext}(A, C)$ comme le quotient de $\mathbf{Ext}(A, C)$ par les classes d'équivalences des extensions triviales, c'est un monoïde commutatif.
Si η est une extension de A par C, on note $\langle \eta \rangle$ sa classe déquivalence dans $\mathrm{Ext}(A, C)$.
Plus précisément, deux extensions η_1 et η_2 de A par C forment le même élément dans $\mathrm{Ext}(A, C)$ si et seulement si il existe une extension scindée η telle que $\eta_1 \oplus \eta$ et $\eta_2 \oplus \eta$ soient fortement unitairement équivalentes *i.e.* $[\eta_1 \oplus \eta] = [\eta_2 \oplus \eta]$. L'élément neutre de $\mathrm{Ext}(A, C)$ est la classe d'équivalence d'une extension triviale.

Définition 3.9. On suppose que l'extension est semi-scindée : il existe une application c.c.p. $\gamma : C \to B$ scindant la suite.
L'application c.c.p. γ est *faiblement nucléaire* si pour $x \in A$, l'application $c \in C \mapsto x\gamma(c)x^* \in A$ est nucléaire.
L'extension η est *faiblement nucléaire* s'il existe une application c.c.p. faiblement nucléaire scindant la suite.

Lorsque A et C sont séparables, on connaît les éléments inversibles de $\mathrm{Ext}(A, C)$:

Proposition 3.10. *$Ext^{-1}(A, C) = \{\langle \eta \rangle$, η extension semi scindée$\}$.*

Remarque 3.11. On peut montrer que l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{nuc}}(A, C)$ des classes d'équivalence d'extensions faiblement nucléaires de A par C dans $\mathrm{Ext}^{-1}(A, C)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}^{-1}(A, C)$.

Sous réserve de vérification du Théorème des Coefficients Universels, ces groupes sont égaux. Voir *supra.*

Définition 3.12. Soient A et C deux C^*-algèbres, avec A stable. Une extension η de A par C est *nucléairement absorbante* si pour toute extension triviale η' de A par C faiblement nucléaire, on a $[\eta \oplus \eta'] = [\eta]$ *i.e.* $\eta \oplus \eta'$ est fortement unitairement équivalente à η.

Lors d'une discussion avec White et Schafhauser, la propriété suivante, qui n'est pas encore référencée, a fait preuve d'un grand intérêt. Elle devrait être plus discutée dans un futur article que sont en train d'écrire Carrion, Gabe, Schafhauser, Stuart et Tikuisis.

Définition 3.13. Soient A, B deux C^*−algèbres et soit

$$\eta : \; 0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

une extension de B par A. Soient $B_0 \subset B$ et $C_0 \subset C$ des sous-algèbres. On dit que B_0 est *spacieuse* relativement à (η, C_0) si : pour tous ε strictement positif, c élément positif de $C_0 \setminus B$ et b_0 élément positif de B_0, il existe un élément b de B_0 tel que :

$$\|b_0 - bcb^*\| \leq \varepsilon.$$

On dit que η est *spacieuse* si B est spacieuse relativement à (η, C).

Exemple 3.14. L'extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}/\mathbb{K} \longrightarrow 0$$

est spacieuse.

En effet, fixons T un opérateur positif non compact, S un opérateur compact positif et ε un réel strictement positif. On peut approximer S à ε près par un opérateur positif de rang fini R. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé total diagonalisant R : il existe un entier p et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$Re_i = \begin{cases} \lambda_i e_i, \; 1 \leq i \leq p \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Puisque T est positif non compact, on dispose d'une famille orthonormale $f_1, \ldots, f_p$ et de réels strictement positifs $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que

$$Te_i = \mu_i e_i, \; 1 \leq i \leq p.$$

Soit alors x l'opérateur de rang fini donné par :

$$xe_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\mu_i}} f_i, \; 1 \leq i \leq p \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors $R = x^*Tx$ et on a bien $\|S - x^*Tx\| \leq \varepsilon$.

Une extension spacieuse est, sous certaines hypothèses, faiblement nucléaire. Ce résultat est une reformulation d'un des résultats principaux de l'article [Sc17], le Théorème 2.2.

3.15. **Extensions de groupe abéliens.**

Définition 3.16. Soient G et K deux groupes abéliens. Une *extension* de G par K est une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

On peut définir une relation déquivalence sur l'ensemble des extensions de G par K en disant que deux extensions

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H' \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

sont équivalentes s'il existe un morphisme $\varphi : H \to H'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] & H' \arrow[r] & K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Notation 3.17. On note $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, K)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de G par K.

Remarque 3.18. On peut doter cet ensemble d'une structure de groupe abélien, avec la somme de Baer pour opération interne. L'élément neutre est alors la classe d'équivalence d'une extension scindée.

4. Liens avec la $K-$théorie

On peut montrer que, si A est une C^*-algèbre,

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{C}, A) \cong K_1(A) \text{ et } \mathrm{Ext}(C_0(\mathbb{R}), A) \cong K_0(A).$$

4.1. **Le Théorème des Coefficients Universels.** Soient A et C deux C^*-algèbres séparables avec A stable et soit

$$\eta : 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une extension de A par C. Cette extension induit une suite exacte à six termes en $K-$théorie :

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r] & K_0(E) \arrow[r] & K_0(C) \arrow[d, "\partial_0"] \\ K_1(C) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(E) \arrow[l] & K_1(A) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Proposition 4.2. *L'application qui a une extension η associe le couple (∂_0, ∂_1) de la suite exacte à six termes est bien définie sur $Ext(A, C)$. On a un morphisme de groupes :*

$$\alpha : Ext^{-1}(A, C) \to Hom_{\mathbb{Z}}(K_0(C), K_1(A)) \,\oplus\, Hom_{\mathbb{Z}}(K_1(C), K_0(A)),\ \langle\eta\rangle \mapsto \partial_0 \oplus \partial_1.$$

Si η est dans le noyau de ce morphisme, on a, pour $i = 0, 1$ une suite exacte de groupes (et donc une extension) :

$$K_i(\eta) : 0 \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow K_i(E) \longrightarrow K_i(C) \longrightarrow 0$$

D'où un morphisme :

$$\begin{aligned} \gamma : \ker\alpha &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K_0(A), K_0(C)) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K_1(A), K_1(C)) \\ \langle\eta\rangle &\mapsto K_0(\eta) \oplus K_1(\eta). \end{aligned}$$

Définition 4.3. On dit que C satisfait le *Théorème des Coefficients Universels*, que l'on abrègera par *TCU*, si pour toute C^*-algèbre séparable stable A, l'application α définie précédemment est surjective, et si l'application γ est un isomorphisme.

Exemple 4.4. Toute C^*-algèbre nucléaire satisfait le TCU. En particulier tout algèbre de dimension finie satisfait le TCU.

Skandalis prouve dans [Sk88] le théorème suivant :

Théorème 4.5. *On suppose que A ou C satisfait le TCU. Alors l'inclusion $Ext_{nuc}(A,C) \to Ext^{-1}(A,C)$ est un isomorphisme.*

5. Le théorème d'Elliott-Kucerovsky

En 1976, Voiculescu prouve le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ des espaces de Hilbert séparables, $A \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une C^*-algèbre séparable unifère et $\rho : A \to \mathbb{B}(\mathcal{K})$ une représentation unifère telle que $\rho_{|A\cap\mathbb{K}(\mathcal{H})} = 0$. En notant ι l'inclusion $A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$, les représentations $\iota \oplus \rho$ et ι sont équivalentes au sens suivant : pour tout entier n, il existe un unitaire $U_n : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tel que :*

$$U_n(\iota \oplus \rho)(a)U_n^* - \iota(a) \in \mathbb{K}(\mathcal{H}),\ a \in A. \tag{5.1.1}$$

De plus, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout élément a de A, on ait :

$$\|U_n(\iota \oplus \rho)(a)U_n^* - \iota(a)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En terme d'extensions, ce théorème peut s'interpréter comme suit :

Puisque $\mathbb{B}(\mathcal{H}) \cong \mathbb{B}(\mathcal{K}) \cong \mathbb{B}$, nous pouvons voir A comme une sous algèbre unifère séparable de $\mathbb{B}$. D'où l'extension

$$\eta :\ 0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow A + \mathbb{K} \longrightarrow A/(A \cap \mathbb{K}) \longrightarrow 0,$$

d'invariant de Busby $i : A/(A \cap \mathbb{K}) \to \mathbb{B}/\mathbb{K}$. On voit aussi $\rho : A \to \mathbb{B}$ comme un *-morphisme unifère, nul sur $A\cap\mathbb{K}$, induisant ainsi un *-morphisme $\dot{\rho} : A/A\cap\mathbb{K} \to \mathbb{B} = \mathcal{M}(\mathbb{K})$. D'où l'extension tirée en arrière :

$$\begin{tikzcd}
\eta' :\ 0 \arrow[r] & \mathbb{K} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & A/(A\cap\mathbb{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi\circ\dot{\rho}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{K} \arrow[r] & \mathbb{B} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{B}/\mathbb{K} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où E est la sous C^*-algèbre de $A/(A\cap\mathbb{K}) \oplus \mathbb{B}$ formée des éléments $a \oplus x$ vérifiant $\pi \circ \dot{\rho}(a) = \pi(x)$. Le théorème de Voiculescu implique que les extensions $\eta \oplus \eta'$ et η sont fortement unitairement équivalentes, *i.e.* forment le même élément dans $\mathbf{Ext}(\mathbb{K}, A/(A \cap \mathbb{K}))$.

De plus, η' est faiblement nucléaire, η est spacieuse et $\mathbb{K} \subset A + \mathbb{K}$ est un idéal essentiel.

Ce sont ce type d'hypothèses que l'on retrouve dans le théorème suivant, énoncé par Elliott et Kucerovsky en 2001 ([EK]), en s'inspirant de la preuve donnée par Arveson en 1977 dans [Ar], et généralisant ainsi le théorème de Voiculescu :

Théorème 5.2. *Soient A une C^*-algèbre unifère séparable et B une C^*-algèbre stable et séparable. Soit $\eta :\ 0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow 0$ une extension unifère semi-scindée de B par A telle que $B \subset C$ soit un idéal essentiel. On suppose que η est spacieuse, alors pour toute extension η' unifère triviale et faiblement nucléaire de B par A, on a $[\eta \oplus \eta'] = [\eta]$.*

6. Application au Théorème de Tikuisis-White-Winter

6.1. **L'extension du "noyau de la trace".**

6.1.1. *L'algèbre universelle hyperfinie $\mathcal{Q}$.* Soit, pour $n \geq 1$:

$$A_n = \mathbb{M}_{n!} = \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_{(n-1)!}$$

Soit, pour n entier naturel, le *-morphisme unifère ι_n donné par :

$$\iota_n : A_n \to A_{n+1}, x \mapsto x \otimes 1_{n+1}.$$

Définition 6.2. La limite inductive du système $\{A_n, \iota_n\}$ est l'algèbre uniformément hyperfinie $\mathcal{Q}$.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{M}_n$ s'injecte unifèrement dans A_n, donc dans $\mathcal{Q}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\mathcal{Q}$ contient $\mathbb{M}_n$.

En K-théorie, le K_0-groupe de $\mathcal{Q}$ est $\mathbb{Q}$. C'est, à isomorphisme près, par le théorème d'Elliott, l'unique algèbre approximativement finie ayant un tel K_0-groupe, ce qui justifie la dénomination "algèbre universelle hyperfinie" d'une part, et la notation $\mathcal{Q}$ d'autre part.

Soit, pour $n \geq 0$, tr_n l'unique trace normalisée sur $\mathbb{M}_n$, et soit τ la limite inductive des applications $\mathrm{tr}_{n!}$. C'est une trace fidèle normalisée sur $\mathcal{Q}$.

6.2.1. *Le facteur hyperfini II_1 $\mathcal{R}$.* L'application $(x, y) \mapsto \tau(xy^*)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{Q}$. On note $\|.\|_2$ la norme associée. En complétant $\mathcal{Q}$ pour cette norme, on obtient un espace de Hilbert, $\mathcal{H}$. En voyant la multiplication à gauche comme une application linéaire, $\mathcal{Q}$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Définition 6.3. On note $\mathcal{R}$ le bicommutant dans $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{Q}$, *le* facteur hyperfini II_1.

Par un théorème de Connes, c'est, à isomorphisme près, le seul facteur II_1 hyperfini et à prédual séparable.

On peut identifier $x \in \mathcal{R} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ et $x \cdot 1 \in \mathcal{H}$ de telle sorte à pouvoir étendre τ en état tracial sur $\mathcal{R}$, en posant $\tau(x) = \langle x, 1 \rangle$.

6.3.1. *Ultraproduit.* On fixe ω un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$.

Définition 6.4. On pose

$$I^\omega = \left\{ (x_n)_n \in l^\infty(\mathcal{R}),\ \lim_{n \to \omega} \|x_n\|_2 = 0 \right\} \text{ et } N_\omega = \left\{ (x_n)_n \in l^\infty(\mathcal{Q}),\ \lim_{n \to \omega} \|x_n\| = 0 \right\}.$$

Ce sont des idéaux, et on peut ainsi définir :

$$\mathcal{R}^\omega = l^\infty(\mathcal{R})/I^\omega \text{ et } \mathcal{Q}_\omega = l^\infty(\mathcal{Q})/N_\omega.$$

En posant, pour $x \in \mathcal{Q}_\omega$ représenté par une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{Q}$,

$$\|x\| = \lim_{n \to \omega} \|x_n\|,$$

on définit sans ambiguïté une norme sur $\mathcal{Q}_\omega$, qui est ainsi une C^*-algèbre.

La norme sur $\mathcal{R}^\omega$ est la norme du quotient. On définit une trace fidèle normalisée à partir de τ en posant, pour $x \in \mathcal{R}^\omega$ représenté par une suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}$,

$$\tau^\omega(x) = \lim_{n \to \omega} \tau(x_n).$$

Théorème 6.5. *$\mathcal{R}^\omega$ est un facteur II_1.*

Puisque, pour $x \in \mathcal{Q}$, $\|x\|_2 \leq \|x\|$, on dispose d'une inclusion $N_\omega \subset I^\omega$. D'où l'existence d'un *-morphisme canonique $\pi : \mathcal{Q}_\omega \to \mathcal{R}^\omega$. π nous permet d'étendre τ^ω à $\mathcal{Q}_\omega$ en posant $\tau_\omega = \tau^\omega \circ \pi$, c'est une trace normalisée sur $\mathcal{Q}_\omega$, dont le noyau est exactement celui de π. On le note J. Par le théorème de Kaplansky, π est surjectif, d'où un extension de J par $\mathcal{R}^\omega$:

$$\eta_\omega : \ 0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathcal{Q}_\omega \xrightarrow{\pi} \mathcal{R}^\omega \longrightarrow 0$$

Définition 6.6. L'extension η_ω est l'extension du "noyau de la trace".

J'ai montré le résultat suivant lors de mon stage :

Proposition 6.7. *L'extension η_ω est spacieuse.*
De plus, si c est un élément positif de $\mathcal{Q}_\omega \setminus J$ et b un élément positif de J, on peut trouver un élément x de J tel que xcx^* est arbitrairement proche de b, et tel que

$$\|x\| < \left(\frac{2\,\|b\|}{\|c\|_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.7.1}$$

6.8. **Le Théorème.** Tikuisis, White et Winter ont prouvé en 2015 le résultat suivant :

Théorème 6.9. *Soit A une C^*-algèbre. On suppose que A est séparable, exacte et satisfait le TCU. Alors toute trace fidèle moyennable sur A est quasidiagonale.*

Ce théorème se déduit du résultat suivant, qui fait apparaître un problème de relevé.

Théorème 6.10. *Soit A une C^*-algèbre séparable exacte et satisfaisant le TCU. On suppose que l'on dispose d'un *-morphisme nucléaire injectif $\varphi : A \to \mathcal{R}^\omega$. Alors il existe un *-morphisme nucléaire $\psi : A \to \mathcal{Q}_\omega$ relevant φ.*

Ce problème de relevé peut en fait être vu comme un problème sur les extensions. En effet, en reprenant les notations, on peut voir le morphisme φ comme l'invariant de Busby d'une extension de J par A, l'extension tirée en arrière de φ :

$$\begin{tikzcd}
\varphi^*\eta_\omega & 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\eta_\omega & 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & \mathcal{Q}_\omega \arrow[r] & \mathcal{R}^\omega \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si l'extension $\varphi^*\eta_\omega$ est scindée par un *-morphisme nucléaire, on obtient directement le résultat.

La théorie des extensions est plus puissante lorsque l'on considère des C^*-algèbres séparables. Comme A est séparable, on se ramène à ce cas là : on construit, en faisant intervenir des propriétés séparablement héréditaires, une sous-algèbre unifère séparable, R_0 de $\mathcal{R}^\omega$, contenant $\varphi(A)$, une sous-algèbre unifère séparable Q_0 de $\mathcal{Q}_\omega$ telle que $\pi(Q_0) = R_0$, $J_0 = Q_0 \cap J$ est spacieuse relativement à (η_ω, Q_0), et de telle sorte que l'extension tirée en arrière :

$$\begin{tikzcd}
\varphi_0^*\eta_0 : & 0 \arrow[r] & J_0 \arrow[r, "\tilde{\iota}_0"] \arrow[d, equal] & E_0 \arrow[r, "\tilde{\pi}_0"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
\eta_0 : & 0 \arrow[r] & J_0 \arrow[r, "\iota_0"] & Q_0 \arrow[r, "\pi_0"] & R_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se scinde par un *-morphisme faiblement nucléaire si A est non unifère ou si A est unifère avec $\varphi(1) \neq 1$. La preuve de ce résultat se fait, en partie, en utilisant le TCU ainsi que le théorème d'Elliott-Kucerovksy.

On montre ensuite que cela implique le théorème 6.10.

Ces résultats et techniques sont ensuite généralisés dans l'article [Sc18] de Schafhauser. Il utilise toujours la théorie des extensions, mais également sa généralisation, la KK-théorie. Dans l'article à paraître de Carrion, Gabe, Schafhauser, Tikuisis et White, ces notions vont également être reprises, le but étant de classifier les C^*-algèbres et d'unifier une grande partie des résultats dans ce domaine.

Appendix A. Bases de K-théorie

Nous exposons ici un très bref glossaire de $K-$théorie, reprenant des résultats de [WE93].

A.1. $K_0(.)$.

Définition A.2. Soient p, q des projections de $\mathbb{M}_\infty(A)$. On dit que p et q sont équivalentes, ce que l'on notera $p \sim q$, si elles sont équivalentes au sens de Murray Von Neumann, *i.e.* s'il existe v un élément de $\mathbb{M}_\infty(A)$ tel que $p = vv^*$ et $q = v^*v$.
$\sim$ définit bien une relation d'équivalence, dont les classes seront notées $[\cdot]$. Elles forment un semi-groupe commutatif :

$$V(A) = \big\{[p],\, p = p^* = p^2 \in \mathbb{M}_\infty(A)\big\}$$

où l'addition est donnée par : $[p] + [q] = [\mathrm{diag}\,(p, q)]$.

Remarque A.3. On peut montrer que cette relation d'équivalence dans $\mathbb{M}_\infty(A)$ est égale à la relation de conjugaison par un unitaire, ainsi qu'à la relation d'homotopie.

Si deux projecteurs sont telles que leur différence est de norme strictement inférieure à 1, ils sont homotopes, donc équivalents.

Exemple A.4. $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$. En effet, deux projecteurs orthogonaux sont équivalents dans $\mathbb{M}_n$ si et seulement si ils ont le même rang. Si p est un projecteur orthogonal de $\mathbb{M}_\infty$, on peut montrer que p est proche d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{M}_n$, pour un certain n, de telle sorte qu'ils soient homotopes. On a donc bien $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$.

Soit $\alpha : A \to B$ un morphisme. Le morphisme induit α_∞ induit à son tour un morphisme de semi-groupes commutatifs $\alpha_* : V(A) \to V(B)$.

Soit $K_{00}(A)$ le groupe de Grothendieck de $V(A)$, et soit $\iota_A : V(A) \to K_{00}(A) = \mathfrak{G}(V(A)), [p] \mapsto [p] - [0]$ l'inclusion naturelle.

Le morphisme $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$ induit un morphisme $\pi_* : V(A^+) \to V(\mathbb{C})$.

Par la propriété universelle du groupe de Grothendieck, il existe un (unique) morphisme $K_{00}(A^+) \to \mathfrak{G}(V(\mathbb{C}))$, que l'on notera encore π_*, rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V(A^+) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\iota_{A^+}"'] & V(\mathbb{C}) \arrow[d, "\iota_{\mathbb{C}}"] \\
K_{00}(A^+) \arrow[r, "\pi_*"'] & \mathfrak{G}(V(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Définition A.5. On définit $K_0(A)$ comme étant le noyau du morphisme π_* :

$$K_0(A) = \ker\big(\pi_* : K_{00}(A^+) \to \mathbb{Z}\big)$$

$K_{00}(A^+)$ étant un groupe abélien, $K_0(A)$ est aussi un groupe abélien.

On peut voir plus facilement $K_0(.)$ de la manière suivante.

Les éléments de $K_0(A)$ sont les $[p]-[q]$, où p, q sont des projections dans $\mathbb{M}_k(A^+)$ pour un certain entier k, tel que $p-q$ soit dans $\mathbb{M}_k(A)$.

Exemples A.6. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$
$K_0(\mathbb{B}) = 0$
$K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$

K_0 est un foncteur covariant de la catégorie des C^*−algèbres vers la catégorie des groupes abéliens :

Proposition A.7 (Semi exactitude, continuité)**.** *Toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte :

$$K_0(J) \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(A/J) \quad \textit{(semi-exactitude)}$$

Si A est une limite inductive de C^*−algèbres, $A = \varinjlim A_i$, alors

$$K_0(A) = K_0\left(\varinjlim A_i\right) \simeq \varinjlim K_0(A_i) \quad \textit{(continuité)}$$

Théorème A.8 (Elliott)**.** *Soient A et B deux C^*−algèbres approximativement finies. On suppose que $K_0(A) \cong K_0(B)$, alors $A \cong B$.*

A.9. $K_1(.)$**.** Si A est une C^*−algèbre, on dipose d'un morphisme $\pi : A^+ \to \mathbb{C}$ qui s'étend naturellement en des morphismes $\mathrm{GL}_n(A^+) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathcal{U}_n(A^+) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, pour tout entier n, et que l'on note encore $\pi_{\mathbb{C}}$.

Définition A.10. On définit, pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{GL}_n^+(A) = \left\{a \in \mathrm{GL}_n(A^+),\ \pi_{\mathbb{C}}(a) = 1_n\right\}$$
$$\mathcal{U}_n^+(A) = \left\{a \in \mathcal{U}_n(A^+),\ \pi_{\mathbb{C}}(a) = 1_n\right\}$$

On a une inclusion naturelle $\mathrm{GL}_n^+(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}^+(A)$ (resp. $\mathcal{U}_n^+(A) \hookrightarrow \mathcal{U}_{n+1}^+(A)$) donnée par $x \mapsto \mathrm{diag}(x, 1)$. Cela nous permet de considérer les limites inductives :

$$\mathrm{GL}_\infty^+(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{GL}_n^+(A)$$
$$\mathcal{U}_\infty^+(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n^+(A)$$

Définition A.11. Soit G un groupe topologique et soit $H < G$ un sous-groupe. On note H_0 la composante connexe par arcs de H contenant l'élément neutre. C'est un sous-groupe distingé de H. Le quotient H/H_0, qui n'est autre que l'ensemble des composantes connexes par arcs de H, est donc muni d'une structure de groupe.

Définition A.12. On définit $K_1(A)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K_1(A) &= \mathrm{GL}_\infty^+(A)/\mathrm{GL}_\infty^+(A)_0 = \mathrm{GL}_\infty(A^+)/\mathrm{GL}_\infty(A^+)_0 \\ &= \mathcal{U}_\infty^+(A)/\mathcal{U}_\infty^+(A)_0 = \mathcal{U}_\infty(A^+)/\mathcal{U}_\infty(A^+)_0 \end{aligned}$$

Si $u \in \mathbb{M}_n(A)$ est un élément unitaire ou un inversible, la composante connexe de $\mathrm{diag}(u, 1_\infty)$ notée $[u]$, est un élément de $K_1(A)$. $K_1(A)$ est muni d'une loi produit donnée par $[u][v] = [uv] = [\mathrm{diag}(u, v)]$ qui en fait un groupe abélien.

Proposition A.13.

$$\begin{aligned}K_1(A) &= \varinjlim GL_n^+(A)/GL_n^+(A)_0 = \varinjlim GL_n(A^+)/GL_n(A^+)_0\\ &= \varinjlim \mathcal{U}_n^+(A)/\mathcal{U}_n^+(A)_0 = \varinjlim \mathcal{U}_n(A^+)/\mathcal{U}_n(A^+)_0\end{aligned}$$

Comme K_0, K_1 est aussi un foncteur covariant, semi-exact, et continu, de la catégorie des C^*-algèbres vers la catégorie des groupes abéliens.

Définition A.14. Soit $J \subset A$ un idéal et soit $x \in K_1(A/J)$. On peut écrire $x = [u]$ pour un unitaire $u \in \mathcal{U}_n^+(A/J)$. Soit $w \in \mathcal{U}_{2n}^+(A)$ tel que $\pi_J(w) = \mathrm{diag}(u, u^*)$. En posant $\partial_1(x) = [wp_nw^*] - [p_n] \in K_0(J)$, on définit un morphisme de groupes de $K_1(A/J)$ vers $K_0(J)$, appelée l'application index.

Soit p est une projection de $\mathbb{M}_\infty(A/J^+)$, avec $p - p_n \in \mathbb{M}_\infty(A/J)$ pour un certain entier n, et soit $x \in \mathbb{M}_\infty(A^+)$ un élément auto-adjoint relevant p. On pose $\partial_0([p] - [p_n]) = [\exp(-2i\pi x)]$. On montre que l'application $\partial_0 : K_0(A/J) \to K_1(J)$ est bien définie, et est un morphisme de groupes. On l'appelle application exponentielle, ou encore application index.

Théorème A.15 (Suite exacte à 6 termes)**.** *Soit*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Alors le diagramme suivant est exact partout :

$$\begin{tikzcd} K_0(J) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(A) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(A/J) \arrow[d, "\partial_0"] \\ K_1(A/J) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(A) \arrow[l, "\pi_*"] & K_1(J) \arrow[l, "\iota_*"] \end{tikzcd}$$

Bibliographie

[AP] C. Anantharaman, S. Popa, “An introduction to II_1 factors”, 2010

[Ar] W.B. Arveson, “Notes on extensions of C^*-algebras”, Duke Math. J., 44 (1977), 329-355.

[BL98] B. Blackadar, “K-Theory for Operator Algebras”, second edition. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 5. Berkeley, CA, 1998

[BO] N. Brown, N. Ozawa, “C^*-algebras and Finite-Dimensional Approximations”, Graduate Studies in Mathematics, 88, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[EK] G. Elliott, D. Kucerovsky, “An abstract Voiculescu-Brown-Douglas-Fillmore absoption Theorem”, Pacific J. Math., 198 (2001) 385-409.

[Fi] P. Fima, “Propriétés d'approximation des groupes et algèbres de Von Neumann", Cours de l'Université Paris Diderot, 2020

[Ga16] J. Gabe, “A note on non-unital absorbing extensions”, Pacific J. Math. 284 (2016), 383-393

[Ga17] J. Gabe, “Quasidiagonal traces on exact C^*-algebras”, J. Funct. Anal, 272 (2017), 1104-1120.

[Sc17] C. Schafhauser, “A new proof of the Tikuisis-White-Winter Theorem”, 2017

[Sc18] C. Schafhauser, “Subalgebras of simple AF-algebras”, 2018

[Sk88] G. Skandalis, “Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz)”, K-Theory, 1 (1988), 549-573.

[Sk19] G. Skandalis, “Algèbres d'opérateurs", Cours de l'Université Paris Diderot, 2019

[TWW] A. Tikuisis, S. White, W. Winter, “Quasidiagonality of nuclear C^*-algebras”, Ann. of Math., 185 (2017), 229-284.

[Vo] D. Voiculescu, “A non-commutative Weyl-von Neumann theorem”, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 21 (1976), 97-113.

[WE93] N.E. Wegge-Olsen, “K-Theory and C^*-algebras”, Oxford Sience Publications, 1993