Variétés conformément plates et Groupes kleinéens en dimension supérieure

SAMUEL BRONSTEIN

Résumé. On appelle un groupe de Klein un sous-groupe discret de $O(n,1)$. Les groupes de Klein sont un outil puissant permettant de faire correspondre les aspects géométriques (structures conformément plates) de certaines variétés avec les aspects algébriques des groupes en question. La classification des sous-groupes discrets de $O(2,1)$ a d'importantes conséquences pour la théorie de l'uniformisation des surfaces de Riemann, et l'étude des sous-groupes discrets de $O(3,1)$ est en lien avec l'hyperbolisation des variétés de dimension 3. Mais la théorie des groupes de Klein ne se limite pas à cela. Cette introduction au domaine de recherche se concentre sur les interactions, en dimension supérieure à 2, entre les structures conformément plates et les sous-familles de groupes de Klein.

Après avoir détaillé les notions de groupes kleinéens et de structures conformément plates, on détaillera quelques résultats connus sur les groupes dits de Schottky et de type de Schottky. On finira par s'intéresser aux groupes dits 1-quasifuchsiens, famille fournissant une grande variété de structures conformément plates, ne serait-ce que pour des sous-groupes discrets de $O(4,1)$.

Table des matières

1. Géométrie conforme et Groupes de Klein

1.1. **Géométrie Conforme et Variétés de Möbius.** Pour un exposé précis des notions de variété conformes, conformément plates et de structures de Möbius on se référera à [Kul88]. Nous présentons ici les notions de variétés conformément plates, comme elles apparaîssent naturellement dans l'étude des groupes kleinéens.

Date: Octobre 2020.

Definition 1.1 (Structure conforme sur un espace vectoriel ou une variété)**.** Soit V un espace vectoriel, g_1, g_2 des produits scalaires sur V. On dit que g_1 et g_2 sont conformes si $g_1 = \lambda g_2$ avec $\lambda > 0$. Une structure conforme sur V est la donnée d'une classe conforme de produits scalaires sur V.

Soit M une variété (lisse). Une structure conforme (lisse) sur M est la donnée d'une famille lisse de structures conformes sur les espaces tangents $T_pM, p \in M$.

Remarque. La donnée d'une structure riemannienne sur M induit directement une structure conforme sur M. Réciproquement, à l'aide d'une partition de l'unité, on peut toujours construire une métrique riemannienne compatible à une structure conforme sur M.

Definition 1.2 (Variété conformément plate)**.** Un repère conforme en $p \in M$ est une base orthogonale locale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que les e_i ont même longueur pour une métrique riemannienne compatible avec la structure conforme sur M.

Une structure conforme sur M est dite intégrable si en chaque point $p \in M$ il existe un voisinage de coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tel que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ soit un repère conforme.

Un variété munie d'une structure conforme intégrable est une variété localement conformément euclidéenne, aussi appelée variété conformément plate.

Cette définition permet de comprendre le vocabulaire associé aux variétés conformément plates. En pratique, une structure conformément plate est un concept proche de cului de structure de Möbius.

Definition 1.3 (Structure de Möbius)**.** Soit $n \geq 2$. Le groupe Möb(n) est le groupe des difféomorphismes conformes de $\mathbb{S}^n$. C'est aussi celui des difféomorphismes de $\mathbb{S}^n$ envoyant chaque hypersphère sur une hypersphère.

Soit M une variété lisse de dimension n. Une structure de Möbius sur M est la donnée d'un atlas maximal de cartes sur M à valeurs dans $\mathbb{S}^n$ tel que les changements de cartes soient des restrictions d'éléments du groupe Möb(n).

Une variété M munie d'une structure de Möbius est appelée une variété de Möbius.

Le théorème de Liouville pour les applications conformes de $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$ nous permet de faire correspondre structure conformément plates et structures de Möbius :

Theorème 1.4 (Liouville)**.** *Soit $n \geq 3$. Soient U, V deux ouverts non vide de $\mathbb{S}^n$, et soit $f : U \to V$ une application conforme. Alors f admet un unique prolongement g en un homéomorphisme conforme de $\mathbb{S}^n$ dans lui-même.*

Étendre les applications conformes entre ouverts de $\mathbb{S}^n$ apparaissant dans les structures conformément plates permet alors de munir toute structure conformément plate d'une structure de Moebius pourvu que $n \geq 3$.

Theorème 1.5. *Soit M une variété de dimension $n \geq 3$. La donnée d'une structure conformément plate sur M induit une unique structure conforme sur M. Réciproquement, la donnée d'une structure conforme sur M correspond à une unique structure conformément plate sur M*

Dans le cas $n = 2$, par le théorème des coordonnées normales isothermes de Gauss, toute métrique est conformément plate. Toutefois, la notion de Surface de Möbius est plus fine que celle de Surface de Riemann. Une structures de Möbius sur une surface de Riemann n'est autre qy'une structures $\mathbb{C}P^1$ sur la surface. Voir [Gun67].

1.2. **Groupes kleinéens et variétés kleinéennes.** Une façon de construire des variétés conformément plates est de considérer un ouvert $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ et un groupe $\Gamma \subset \text{Möb}(n)$ laissant Ω invariant.

Definition 1.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert de $\mathbb{S}^n$, et $\Gamma \subset \text{Möb}(n)$ un groupe agissant librement et proprement discontinument sur Ω. La variété Ω/Γ est alors munie d'une structure conformément plate héritée de celle de $\mathbb{S}^n$.

Une telle variété est appelée variété kleinéenne.

Remarque. Les variétés kleinéennes sont un cas particulier de variétés conformément plates. On peut s'intéresser à classer les variétés kleinéennes en fonction de Ω. Par exemple, les variétés kleinéennes pour lesquelles $\Omega = \mathbb{S}^n$ sont les structures conformément plates sur les variétés sphériques. Celles pour lesquelles $\Omega = \mathbb{S}^n - \{point\}$ sont les structures conformément plates sur les variétés euclidiennes (plates). Enfin, pour $\Omega = \mathbb{S}^n - \{2points\}$, on obtient les variétés modelées sur$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ ou sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$, appelées variétés de Hopf.

Rappelons l'existence d'une correpondance entre les groupes $\text{Isom}(\mathbb{H}^{n+})$ et $\text{Möb}(n)$. En effet, chaque isométrie hyperbolique $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ induit, en considérant l'action de $\text{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ sur le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$, un élément de $\text{Möb}(n)$:

Theorème 1.7. *Soit $g \in Isom(\mathbb{H}^{n+1})$. En considérant le modèle de la boule de Poincaré pour l'espace hyperbolique, g induit une transformation conforme de la sphère $\mathbb{S}^n = \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$. Réciproquement, une transofromation conforme de la sphère $\mathbb{S}^n$ induit une unique isométrie de l'espace $\mathbb{H}^{n+1}$. L'application $Isom(\mathbb{H}^{n+1}) \to Möb(n)$ ainsi construite est un isomorphisme de groupes.*

Proposition 1.8 (Groupe kleinéen, ensemble limite et de discontinuité)**.** *Un groupe de Klein Γ est un sous-groupe discret de $Möb(n)$.*

Soit $o \in \mathbb{H}^{n+1}$. L'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ est le suivant :

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot o} \cap \mathbb{S}^n \tag{1.1}$$

Son complémentaire $\Omega(\Gamma) = \mathbb{S}^n - \Lambda(\Gamma)$ est un ouvert sur lequel Γ agit proprement discontinument. Il est maximal parmi les ouverts sur lesquels Γ agit proprement discontinument, au sens suivant : Tout ouvert de $\mathbb{S}^n$ invariant par Γ sur lequel l'action de Γ est proprement discontinue est inclus dans $\Omega(\Gamma)$.

La variété $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ est appelée une variété uniformisable

On peut être tenté de croire que toute structure conformément plate est uniformisable. Ceci est faux, il existe des exemples de variétés conformément plates pour lesquelles la développante n'est pas un revêtement.

Il est clair que l'ouvert $\Omega(\Gamma)$ est conformément plat. Si l'on s'intéresse particulièrement aux structures conformément plates compactes, il est raisonnable de s'intéresser à la classe de groupes kleinéens suivante :

Definition 1.9 (groupe convexe-cocompact)**.** Soit $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^{n+1})$ un groupe kleinéen. On dit que Γ est convexe-cocompact s'il existe un sous-ensemble non vide $C \subset \mathbb{H}^{n+1}$ convexe, Γ-invariant, tel que l'action de Γ sur C est propre et cocompacte.

Dans le cas d'un groupe convexe-cocompact, on a l'identification suivante :

$$\partial_\infty C = \Lambda(\Gamma) \tag{1.2}$$

En considérant un voisinage $N_\delta(C) = \{x \in \mathbb{H}^{n+1} | d(x, C) \leq \delta\}$, on obtient aussi :

$$\partial(N_\delta(C)/\Gamma) = \Omega(\Gamma)/\Gamma \tag{1.3}$$

Pour plus de détail à propos des groupes convexes-cocompacts, voir [Gui20]

2. Structures conformément plates en dimension 3

2.1. **(G, X)-structures et géométrisation.** Nous avons vu que à partir de la dimension 3, une structure conformément plate revient à un atlas de cartes tels que les changements de cartes soient des transformations de Möbius. La géométrie $(\text{Möb}(n), \mathbb{S}^n)$ est un exemple de (G, X)-structure possible.

Definition 2.1 ((G, X)-structure)**.** Soit X un espace métrique et $G \subset \text{Isom}(X)$ un sous-groupe d'isométries de X. Soit M une variété. Une (G, X)-structure sur M est la donnée d'un atlas maximal de cartes sur M à valeurs dans X tels que les changements de cartes soient des restrictions d'éléments de G.

Le formalisme des (G, X)-structures s'applique à plein de géométries différentes, dont les géométries euclidiennes, affines, projectives, etc. En dimension 3, on a le résultat suivant [Sco83] :

Theorème 2.2. *Il existe 8 (G, X) structures riemanniennes en dimension 3 vérifiant :*
- *X est simplement connexe*
- *G est unimodulaire.*
- *(G, X) est maximal, au sens où il n'y a pas (H, Y) vérifiant les propriétés précédentes, tel que $X \subset Y$ et que les éléments de G soient des restrictions d'éléments de H.*

En voici la liste :
- *$\mathbb{R}^3$,$\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$, munies de leurs groupes d'isométries respectifs.*
- *$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$,$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ munies de leurs groupes d'isométries respectifs.*
- *$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ ainsi que les géométries dites Nil et Sol, groupes de Lie munis de métriques invariante à gauche.*

On peut se demander, parmi ces géométries, lesquelles sont des sous-géométries de la géométrie conformément plates. Ainsi, [Gol83] W.Goldman a montré que si une variété compacte est modelée par Nil ou Sol, on ne peut la munir d'une structure conformément plate, même non compatible avec sa géométrie. Toute géométrie de courbure constante est conformément plate. Il est possible de munir $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ d'une structure conformément plate en considérant le complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{S}^3$. De même en considérant $\mathbb{S}^3$ privée de ses deux poles, on obtient une structure conformément plate sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Finalement, [GLJT88] Gromov, Lawson et Thurston ont découvert des structures conformément plates sur certaines variétés modelées par $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, en particulier sur des fibrés en cercles de nombre d'Euler non nul sur des surfaces hyperboliques.

Remarque. A partir de la dimension 4, se munir d'une structure conformément plate équivaut à ce que le tenseur de Weyl soit identiquement nul. Certains résultats tiennent pour les dimensions supérieures. Ainsi, une variété de courbure sectionnelle constante est automatiquement conformément plate. Les espaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ sont aussi conformément plats Nous verrons tout de suite que ce n'est pas le cas pour $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$, $p \geq 2$, $q \geq 2$.

2.2. **Courbures et structure conformément plate.** D'un point de vue strictement différentiel, on peut caractériser les structures conformément plates à l'aide du tenseur de Weyl :

Definition 2.3 (Tenseur de Weyl)**.** Soit (M, g) une variété (pseudo-)riemannienne de dimension n. Soit R sa courbure de Riemann, vue comme un $(0, 4)$ tenseur. Notons Ric sa courbure de Ricci, vue comme un $(0, 2)$ tenseur. Notons s sa courbure scalaire. Le tenseur de Weyl est alors défini par la formule suivante :

$$C = R - \frac{1}{n-2}\big((\mathrm{Ric} - \frac{s}{n}g) \owedge g\big) - \frac{s}{2n(n-1)} g \owedge g \tag{2.1}$$

où $h \owedge g$ désigne le produit de Kulkarni-Nomizu, c'est à dire :

$$h \owedge k(X, Y, Z, T) = h(X, Z)k(Y, T) + h(Y, T)k(X, Z) - h(X, T)k(Y, Z) - h(Y, Z)k(X, T) \tag{2.2}$$

On a alors la caractérisation suivante [Laf88] :

Theorème 2.4 (Caractérisation différentielle des structures conformément plates)**.** *Soit (M, g) une variété de dimension $n \geq 4$. Alors (M, g) admet une structure conformément plate compatible avec la métrique g si et seulement si son tenseur de Weyl est identiquement nul.*

Remarque. En dimension 2, toute surface compacte peut être munie d'une structure conformément plate. En dimension 3, (M, g) est conformément plate si et seulement si son tenseur de Cotton est identiquement nul. Finalement, on a donc une écriture différentielle des structures conformément plates en toute dimension.

Muni de cette caractérisation, on peut se restreindre à des espaces réguliers, pour voir quelles variétés sont conformément plates. Par exemple, Lafontaine a montré quels espaces produits sont conformément plats [Laf88] :

Theorème 2.5. *Soit (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes. Le produit $(M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ est conformément plat si et seulement si :*

- *L'un des deux est de dimension 1, et l'autre est de courbure sectionnelle constante, ou*
- *(M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont de dimension supérieure à 2, de courbure non nulle et opposées*

Cela nous permet de construire des exemples de variétés non conformément plates "simples" dès la dimension 4, comme $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Remarque. Notons qu'il n'est pas exclu à priori qu'on puisse munir $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ d'une structure conformément plate, pour $p, \geq 2$. En effet, on a juste montré qu'il n'y a pas de structure conformément plate sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ qui soit dans la classe conforme de la métrique produit. Pour montrer qu'on ne peut munir $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ d'une structure conformément plate, il faut remarquer qu'un tel produit est simplement connexe. Or toute variété compacte simplement connexe conformément plate est conformément difféomorphe à une sphère [How96]. $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ n'étant pas homéomorphe à $\mathbb{S}^{p+q}$, il n'est pas possible de le munir d'une structure conformément plate.

Il y a eu plusieurs travaux sur les liens entre courbure de Ricci et structures conformément plates. Ainsi, Bochner [BY+54] a montré la nullité de certains nombres de Betti d'une variété conformément plate compacte de courbure de Ricci définie positive. Plus tard, on a pu classifier les variétés conformément plates de courbure de Ricci positive ou nulle [Zhu94] comme étant des variétés sphériques, globalement plates ou des variétés de Hopf :

Theorème 2.6. *Soit (M, g) une variété riemannienne conformément plate complète de dimension n, telle que $Ric(g) \geq 0$. Alors le revêtement universel de M $\tilde{M}$ avec la métrique induite par g est :*

— *conformément équivalent à* $\mathbb{S}^n$, *ou*
— *conformément équivalent à* $\mathbb{R}^n$, *ou*
— *isométrique à* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$

Si de plus M *est compacte et* $\tilde{M}$ *est conformément équivalente à* $\mathbb{R}^n$, *alors* $\tilde{M}$ *est isométrique à* $\mathbb{R}^n$.

Il y a d'autres résultats similaires pour les variétés dont la courbure de Ricci est pincée, ou celles dont la courbure scalaire est constante, voir par exemple les travaux de Gursky [Gur94] ou Catino [Cat16].

3. Groupes de Schottky et de type de Schottky

Les liens exposés précédemment entre structures conformément plates et groupes de Klein proposent un angle d'attaque pour la classification des structures conformément plates. En effet, classifier les groupes de Klein permettrait d'obtenir directement de grandes familles de structures conformément plates en toute dimension. Si B.Maskit [Mas12] donne une classification des sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, il est illusoire d'espérer une classification analogue en dimension supérieure. Une possibilité, par contre, est de considérer des familles de groupes de Klein partageant des caractéristiques communes. Plus précisémentm on peut s'intéresser à la topologie de l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$, et voir les liens entre topologie de $\Lambda(\Gamma)$, description algébrique de Γ et structure conformément plate sur $\Omega(\Gamma)/\Gamma$. Un exemple d'une telle étude est celle des groupes de type de Schottky.

Les groupes de Schottky sont des sous-groupes de $\mathrm{M\ddot{o}b}(n)$, selon la définition suivante :

Definition 3.1 (Groupes de Schottky)**.** Soient $U_1, \dots, U_k, U'_1, \dots, U'_k$ 2k ouverts disjoints de $\mathbb{S}^n$, tels qu'il existe des éléments de $\mathrm{M\ddot{o}b}(n)$ γ_i vérifiant :

$$\gamma_i((\overline{U_i})^c) = U'_i \tag{3.1}$$

On suppose que pour chaque paire (U_i, U'_i) il existe un difféomorphisme envoyant ces ouverts sur des boules rondes pour la métrique de $\mathbb{S}^n$. Alors le groupe $\Gamma =< \gamma_1, \dots, \gamma_k >$ est un groupe de Schottky de rang k. Si toutes les boules en question sont des boules rondes pour la métrique de $\mathbb{S}^n$, on dit que Γ est un groupe de Schottky classique de rang k.

Le caractère disjoint des boules est primordial, car il permet de donner une présentation du groupe Γ. En effet, un groupe de Schottky de rang k est isomorphe au groupe libre de rang k. Se restreindre à une telle famille permet de connaître précisément la topologie de l'ensemble limite :

Theorème 3.2. *Soit* Γ *un groupe de Schottky de rang* $k \geq 2$. *Alors l'ensemble limite de* Γ *est un espace totalement discontinu sans point isolé, homéomorphe à l'ensemble de Cantor standard.*

Les groupes de Schottky ne sont toutefois pas les seuls pour lesquels l'ensemble limite est totalement discontinu. En fait, à conjugaison près par un homéomorphisme quasiconforme, un groupe de Schottky est caractérisé par son rang k. Si on veut décrire tout les groupes kleinéens pour lesquels l'ensemble limite est totalement discontinu, on doit ajouter les groupes dits de type de Schottky : Pour décrire les groupes de type de Schottky, rappelons les notions de domaine fondamental standard et topologiquement standard des groupes élémentaires.

Definition 3.3 (domaine fondamental standard)**.** Soit Γun groupe élémentaire non trivial. Modulo conjugaison, on peut supposer que :

(1) $\mathbb{S}^n = \overline{\mathbb{R}^n}$ et Γ fixe 0,∞, ou

(2) Γ agit sur $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n$ par isométries euclidiennes.

Dans le premier cas, Γ est généré par $\gamma : x \mapsto cAx$, avec $c > 1$ et $A \in O(n)$. On considère alors Φ un anneau délimité par deux sphères disjointes faisant office de domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Dans le second cas, on prend Φ un domaine fondamental de Dirichlet $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, qui est l'un des plus "simples" que l'on peut choisir, voir [JM88]. Φ est appelé un domaine fondamental standard de Γ. On dit que Ψ est un domaine fondamental topologiquement standard si s'il est l'image d'un domaine fondamental standard par un difféomorphisme de $\Omega(\Gamma)$ commutant avec l'action de Γ.

Une fois munis de cette notion d'espace fondamental topologiquement standard, on peut définir la notion de groupes de type de Schottky :

Definition 3.4 (Groupes de type de Schottky)**.** Soient Γ_i des groupes kleinéens élémentaires de Möb(n), et Φ_i des domaines fondamentaux topologiquement standard pour les Γ_i. Supposons qu'on ait :

$$i \neq j \Rightarrow (\Phi_i)^c \cap (\Phi_j)^c = \emptyset \tag{3.2}$$

Alors le groupe $\Gamma =< \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k >$ est un groupe de type de schottky de rang k.

Il est immédiat que tout groupe de Schottky de rang k est un groupe de type de Schottky de rang k. De même que pour les groupes de Schottky, on peut décrire la structure algébrique des groupes de type de Schottky :

Theorème 3.5. *Soit Γ un groupe de type de Schottky de rang k construits à partir de $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ et $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Alors :*
- *Γ est isomorphe au produit libre $\Gamma_1 * \ldots * \Gamma_k$*
- *Un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\Omega(\Gamma)$ est $\Phi := \Phi_1 \cap \Phi_2 \ldots \cap \Phi_k$.*
- *L'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ est totalement discontinu.*

On exhibe facilement des exemples de groupes de type de Schottky qui ne sont pas isomorphes à des groupes de Schottky, voir un exemple fourni par Kapovich [Kap07] de tel groupe, figure 3.

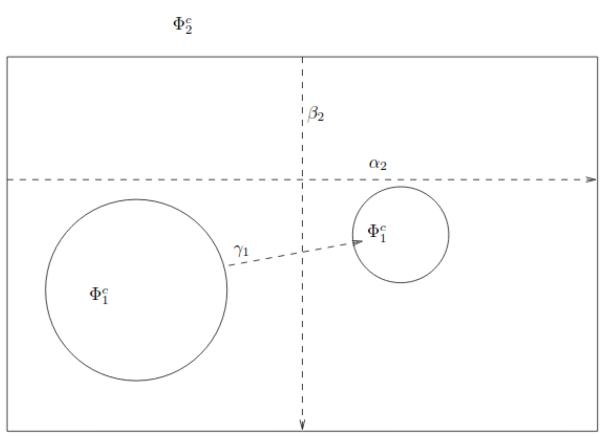

FIGURE 3.1. Le groupe engendré par $\Gamma_1 =< \gamma_1 >$ et $\Gamma_2 =< \alpha_2, \beta_2 >$ est isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^2$

Remarque. Si l'on se restreint aux groupes kleinéens convexes-cocompacts, alors un groupe de type de Schottky convexe-cocompact est un groupe de Schottky, car il ne peut contenir d'éléments paraboliques.

Il y a même une sorte de réciproque au fait que l'ensemble limite d'un groupe de type de Schottky soit discontinu. Cette propriété est dûe à Kulkarni [Kul78] :

Theorème 3.6. *Soit Γ un groupe kleinéen tel que $\Lambda(\Gamma)$ soit totalement discontinu. Alors Γ est isomorphe à un groupe de type de Schottky.*

Se restreindre à une famille de groupes kleinéens à l'aide d'une condition topologique sur leur ensemble limite nous donne donc beaucoup d'informations de nature algébrique sur lesdits groupes. À leur tour, ces propriétés nous permettent de décrire les structures conformément plates $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ en découlant :

Theorème 3.7. *Soit Γ un groupe de Schottky de rang k. Si $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$, alors $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ est une surface de genre k. Si $\Gamma \subset \mathbb{S}^n$, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ est une somme connexe de k copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$. Généralement, si Γ est un groupe de type de Schottky construits à partir des groupes élémentaires $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, Alors $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ est la somme connexe des espaces $\Omega(\Gamma_i)/\Gamma_i$*

Certes, Kulkarni a montré [K+78] qu'une somme connexe de variétés conformément plates peut encore être munie d'une structure conformément plate, mais ce théorème est autrement intéressant car il illustre l'idée que se restreindre à des groupes de Klein avec certaines propriétés permet de connaître et décrire les variétés ainsi construites.

Il est important aussi de préciser que l'étude des variétés de type $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ avec Γ groupe kleinéen tel que $\Lambda(\Gamma)$ soit totalement discontinu n'est pas terminée. En effet, si $\Lambda(\Gamma)$ est totalement discontinu, on sait que Γ est isomorphe à un groupe de type de Schottky, mais cela ne nous dit pas que Γ est un groupe de type de Schottky.

On peut se demander si, en supposant plus de régularité sur l'ensemble $\Lambda(\Gamma)$, on peut se restreindre uniquement aux groupes de Schottky. En effet, voici une question [Kap07] ouverte dès $n = 4$, vérifiée pour $n = 2, 3$:

Question 3.8. Soit Γ un groupe kleinéen non élémentaire tel que $\Lambda(\Gamma)$ soit totalement discontinu et lisse, c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tel que $f(\Lambda(\Gamma)) \subset \mathbb{S}^1$ où $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^n$ est une isométrie. Γ est-il alors un groupe de type de Schottky ?

Les adeptes du contrexemple trouveront un exemple de groupe kleinéen convexe-cocompact de Möb(3) dont l'ensemble limite est totalement discontinu mais non lisse dans [Gus96].

4. Groupes Fuchsiens et quasi-fuchsiens

De la même manière que pour les groupes de type de Schottky, on peut se demander quels sont les groupes de Klein pour lesquels l'ensemble limite est topologiquement un cercle. De tels groupes sont dits 1-quasifuchsiens. Le cas de la dimension 2 est ici très particulier, car alors le domaine de discontinuité est constitué de deux composantes connexes. Nous donnons ici quelques résultats á propos de la dimension 2, puis quelques exemples de ce qu'on peut obtenir pour des sous-groupes de Möb(3). Les résultats en dimension supérieure sont encore très vagues et parcellaires. En dimension 2, un groupe quasi-fuchsien permet donc d'uniformiser simultanément deux surfaces. On ne peut toutefois pas choisir deux surfaces indépendemment et les uniformiser simultanément. Pour uniformiser,on peut s'intéresser à ce que Bers appelle des couples impairs de surfaces (odd coupled pair en anglais) :

Definition 4.1 (Paires de surfaces couplées)**.** Soit S, S' deux surfaces de Riemann, et $f : S \to S'$ un homéomorphisme quasi-conforme. Soit $[f]$ la classe d'homotopie de f $(S, [f], S')$ est appelée une paire de surfaces couplées. Si f préserve l'orientation, on dit que $(S, [f], S')$ est paire. sinon, on dit que $(S, [f], S')$ est impaire 2 couples $(S, [f], S')$ et $(S_1, [f_1], S_1')$ sont dits équivalents s'il existe des homéomorphismes conformes tel que $h(S) = S_1$, $h'(S') = S_1'$ et $[h' f h^{-1}] = [f_1]$

Les exemples les plus simples de tels couples impairs et celui d'une surface riemannienne munie d'un automorphisme renversant l'orientation, ou de deux surfaces miroirs l'une de l'autre. Lipman Bers [Ber60] a donné le résultat suivant

Theorème 4.2 (Uniformisation simultanée de deux surfaces de Riemann)**.** *Soit $(S, [f], S')$ un couple impair de surfaces de genres supérieur ou égal à 2. Alors ce couple peut être uniformisé par un groupe quasi-fuchsien $\Gamma \subset Möb(\mathbb{S}^2)$, de telle sorte que l'isomorphisme entre les groupes fondamentaux de S et S' induits par l'action du groupe Γ soit le même que celui induit par $[f]$.*

Remarque. On pouvait soupçonner qu'il est nécéssaire que $(S, [f], S')$ soit un couple impair de surfaces pour être simultanément uniformisé. En effet, si on uniformise deux surfaces via un groupe fuchsien, l'action du groupe Γ induit naturellement un isomorphisme entre les groupes fondamentaux des surfaces

On peut s'intéresser aux propriétés dynamiques de l'action d'un groupe quasi-fuchsien sur son ensemble limite, voir par exemple [Mat01]

À partir de la dimension 3, il est bien sûr illusoire d'esperer une analogie, $\Omega(\Gamma)$ étant connexe. Pour la dimension 3, on peut toutefois dégager des contraintes sur l'ensemble limite.

Definition 4.3 (nœud lisse, nœud sauvage)**.** Soit $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ un nœud. Le nœud est dit lisse s'il peut s'étendre en $\mathbb{S}^1 \times D \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ continue, où D est un disque. Le nœud est dit sauvage s'il n'est pas lisse.

Theorème 4.4. *Soit $\Gamma \subset Möb(3)$ un groupe 1-quasifuchsien. Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*
- *$\Lambda(\Gamma)$ est un nœud équivalent au noeud trivial.*
- *$\Lambda(\Gamma)$ est un nœud sauvage.*

Les groupes Fuchsiens, ceux dont l'ensemble limite est l'image d'une isométrie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$, sont un exemple de groupes pour lesquels la première assertion est vraie. Mais ce ne sont pas les seuls. Ainsi, Gromov, Lawson et Thurston [GLJT88] donnent des exemples de groupes quasi-fuchsiens pour lesquels l'ensemble limite est équivalent au noeud trivial, et tel que la variété $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ soit un fibré en cercles non trivial sur une surface de Riemann. Avec Kuiper [Kui88], ils donnent aussi plusieurs exemples vérifiant la condition 2, pour lesquels l'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ est une limite d'une somme connexe de N noeuds toriques, N tendant vers l'infini. Ces articles ne permettent toutefois pas de savoir quels sont les fibrés en cercles sur surfaces hyperboliques qui peuvent être munis d'une structure conformément plate. La question de savoir quels fibrés en cercles sur des surfaces peuvent être munis de structures conformément plates permettrait donc de connaître quelles variétés riemanniennes de dimension 3 pouvant être géométrisées peuvent aussi être munies d'une structure conformément plate, même non compatible avec la métrique riemannienne.

Lá dessus, une conjecture bien connue [GLJT88] est la suivante :

Conjecture 4.5. *Soit X un fibré en cercles sur une surface compacte S de genre $g \geq 1$ Notons $e(X)$ le nombre d'Euler du fibré X et $\chi(S) = 2g-2$ la caractéristique d'Euler de S. Si E peut être muni d'une structure conformément plate, alors :*

$$|e(X)| \leq |\chi(S)| = 2g-2 \tag{4.1}$$

Dans le cas $g = 1$, cette conjecture a déjà été montrée, puisque qu'un fibré en cercles non trivial sur un tore peut être muni d'une Nil-structure, et [Gol83] Goldman a montré qu'une telle variété ne peut être munie d'une structure conformément plate. Dans le cas $g \geq 2$, cette conjecture reste ouverte et actuelle, voir [Ho14] pour des résultats partiels.

Il est intéressant de remarquer qu'un fibré en cercles non trivial sur une surface de Riemann peut être muni d'une $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$-structure [Sco83]. Cette structure n'est toutefois pas conformément plate, son tenseur de Cotton n'étant pas nul. Ces fibrés en cercles sur des surfaces hyperboliques sont donc des exemples de variétés riemanniennes non conformément plates sur lesquelles on peut définir une structure conformément plate topologiquement équivalente.

Pour revenir à des résultats de nature plus "géométrique" sur les variétés de dimension 3, on peut citer le résultat suivant, dû a Hwang [Hwa03] :

Theorème 4.6. *Soit L un entrelacs lin'eaire par morceaux dans $\mathbb{S}^3$. Alors il existe un groupe kleinéen de Möb$(\mathbb{S}^3)$, et un domaine fondamental $\Phi \subset \Omega(\Gamma)$ tel que le complémentaire Φ^c soit isotope à un voisinage régulier de L.*

Ce théorème permet le résultat suivant :

Theorème 4.7. *Soit M une variété compacte sans bord orientée de dimension 3. Alors il existe N variété compacte sans bord orientée de dimension 3 tel que la somme connexe $M\#N$ admette une structure conformément plate*

Là encore, on peut généraliser dans une certaine mesure á la dimension 4, les dimensions plus importantes nous échappent.

5. Conclusion

Nous voyons donc que l'étude des structures conformément plates et des groupes de Klein, ainsi que des interactions entre elles, foisonne de questions diverses. Si historiquement le cas des sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ a été fortement étudié, les groupes de Klein de dimension plus importante soulèvent beaucoup de difficultés pour dégager des résultats généraux. Les conséquences potentielles d'une meilleure connaissance de ces groupes sont infinies.

Il semble que l'étude de sous-familles de groupes de Klein ayant certaines propriétés, comme les groupes de Schottky ou les groupes quasi-Fuchsiens, permettent de dégager de forts résultats sur les structures conformément plates.

L'étude des propriétés dynamiques et topologiques des groupes de Klein est donc un domaine de recherche riche et prometteur.

Références

[Ber60] Lipman Bers. Simultaneous uniformization. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66(2) :94–97, 1960.

[BY+54] Salomon Bochner, Kentaro Yano, et al. *Curvature and Betti numbers*, volume 32. Princeton University Press, 1954.

[Cat16] Giovanni Catino. On conformally flat manifolds with constant positive scalar curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(6) :2627–2634, 2016.

[GLJT88] Michael Gromov, HB Lawson Jr, and William Thurston. Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68 :27–45, 1988.

[Gol83] William M Goldman. Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 278(2) :573–583, 1983.

[Gui20] Olivier Guichard. Groupes convexes-cocompacts en rang supérieur. *arXiv preprint arXiv :2002.05768*, 2020.

[Gun67] Robert C Gunning. Special coordinate coverings of riemann surfaces. *Mathematische Annalen*, 170(1) :67–86, 1967.

[Gur94] Matthew J Gursky. Locally conformally flat four-and six-manifolds of positive scalar curvature and positive euler characteristic. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 747–774, 1994.

[Gus96] Nikolai Aleksandrovich Gusevskii. Exotic actions of free kleinian groups. *Siberian Mathematical Journal*, 37(1) :79–93, 1996.

[Ho14] Son Lam Ho. On conformally flat circle bundles over surfaces. *arXiv preprint arXiv :1412.5824*, 2014.

[How96] Ralph Howard. Kuiper's theorem on conformally flat manifolds. *Lecture Notes. Available at http ://www. math. sc. edu/ howard*, 1996.

[Hwa03] Sonjong Hwang. Moebius structures on 3-manifolds. 2003.

[JM88] T Jorgensen and A Marden. Generic fundamental polyhedra for kleinian groups. In *Holomorphic Functions and Moduli II*, pages 69–85. Springer, 1988.

[K$^+$78] RS Kulkarni et al. On the principle of uniformization. *Journal of Differential Geometry*, 13(1) :109–138, 1978.

[Kap07] Michael Kapovich. Kleinian groups in higher dimensions. In *Geometry and dynamics of groups and spaces*, pages 487–564. Springer, 2007.

[Kui88] Nicolaas H Kuiper. Hyperbolic 4-manifolds and tesselations. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 68(1) :47–76, 1988.

[Kul78] Ravi S Kulkarni. Groups with domains of discontinuity. *Mathematische Annalen*, 237(3) :253–272, 1978.

[Kul88] Ravi S Kulkarni. Conformal structures and möbius structures. In *Conformal geometry*, pages 1–39. Springer, 1988.

[Laf88] Jacques Lafontaine. Conformal geometry from the riemannian viewpoint. In *Conformal geometry*, pages 65–92. Springer, 1988.

[Mas12] Bernard Maskit. *Kleinian groups*, volume 287. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mat01] Katsuhiko Matsuzaki. Dynamics of kleinian groups–the hausdorff dimension of limit sets. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 204 :23–44, 2001.

[Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. 1983.

[Zhu94] Shun-Hui Zhu. The classification of complete locally conformally flat manifolds of nonnegative ricci curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, 163(1) :189–199, 1994.