

Introduction au Domaine de Recherche : Combinatoire énumérative et bijective des surfaces branchantes et des permutations triables par piles

Corentin Henriet

Table des matières

1	Introduction	1
2	Polyominos parallélogrammes et permutations triables par une pile	2
2.1	Énumération des polyominos parallélogrammes	2
2.2	Tri par pile de permutations	3
2.3	Permutations triables par une pile	4
2.4	Une caractérisation par évitement de motifs	4
3	Poissons combattants et permutations triables par deux piles	5
3.1	Poissons combattants et décompositions	5
3.2	Énumération des permutations triables par deux piles	8
3.3	Aire moyenne des poissons combattants	11
4	Perspectives	11
5	Références	12

1 Introduction

La combinatoire énumérative et bijective est un domaine de recherche fondamentale représentant un des principaux ponts entre les mathématiques et l'informatique. Précisément, les travaux qui l'étudient s'attachent à compter des structures combinatoires selon divers paramètres (qui diffèrent selon les structures étudiées, mais peuvent être mis en correspondance via des bijections), et ce de manière exacte, ou de manière asymptotique par rapport à la taille, selon que l'on cherche à exhiber des liens structurels entre des types d'objets combinatoires, ou que l'on cherche à connaître les propriétés limites d'un objet aléatoire lorsque la taille de l'objet généré tend vers l'infini. On se propose d'esquisser dans le présent document divers problèmes d'énumération concernant les poissons combattants, surfaces branchantes introduites en 2016 par Duchy, Schaeffer, Rinaldi, et Guerrini, étendant la notion de polyominos parallélogrammes, et ayant une

aire asymptotique en $n^{\frac{5}{4}}$, où n est le paramètre de taille naturel, ce qui est un comportement non-standard. On verra également qu'exhiber des bijections avec des objets déjà énumérés est un outil explicatif puissant qui aide à passer d'une classe d'objets à une autre selon laquelle est la plus pratique pour travailler sur un problème donné. En l'occurrence, on développera la notion de permutation triable par pile, qui s'avère entretenir de fines relations avec les poissons combattants.

2 Polyominos parallélogrammes et permutations triables par une pile

2.1 Énumération des polyominos parallélogrammes

Les polyominos sont des surfaces dans le plan obtenues en attachant des carrés unitaires ensemble, popularisés par Gardner au début des années 1960.

Définition 1. *Un polyomino est une réunion finie de carrés unité (cellules) à sommets dans le réseau \mathbb{Z}^2 , d'intérieur connexe.*

Un polyomino est convexe si chacune de ses lignes et colonnes de cellules est convexe.

Un polyomino est dit parallélogramme s'il est convexe et s'il possède une cellule Sud-Ouest (qui est plus au sud et plus à l'ouest que chacune des cellules du polyomino) et une cellule Nord-Est.

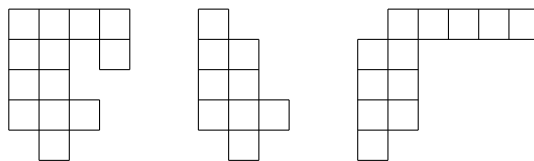


Figure 1 – 3 polyominos : un non-convexe, un convexe et un parallélogramme

Deux polyominos sont dits égaux s'ils sont égaux à translation près. Le périmètre d'un polyomino est toujours pair et nous appellerons *taille* d'un polyomino l'entier n tel que le périmètre du polyomino soit $2(n + 1)$. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent. Pour dénombrer les polyominos parallélogrammes de taille n , nous allons les mettre en bijection avec les chemins de Dyck.

Définition 2. *Un mot de Dyck de taille n est un mot de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{u, d\}$ contenant n exemplaires de chacune des deux lettres dont chaque préfixe contient au moins autant de u que de d . On peut représenter un tel mot par un chemin de Dyck de longueur $2n$ qui est un chemin à sommets dans \mathbb{Z}^2 de $(0, 0)$ à $(0, 2n)$ composé de pas $(1, 1)$ (u : montée) et $(1, -1)$ (d : descente).*

Par la suite, nous confondrons les deux notions de chemins et mots de Dyck. On se donne un chemin de Dyck D . On peut définir la hauteur de chaque sommet qui le

compose par l'ordonnée à laquelle il se trouve. On va construire colonne par colonne un polyomino parallélogramme $P(D)$ à partir de D de la manière suivante : on parcourt D de gauche à droite, à chaque *pic* (ud) rencontré, on crée une colonne composée d'autant de cellules que la hauteur du pic et on attache son flanc gauche sur le flanc droit de la dernière colonne du polyomino déjà construit, sur les q cellules les plus au Nord de celle-ci, où q est la hauteur de la *vallée* (du) précédant le pic considéré moins 1. On donne un exemple ci-dessous en guise d'illustration :

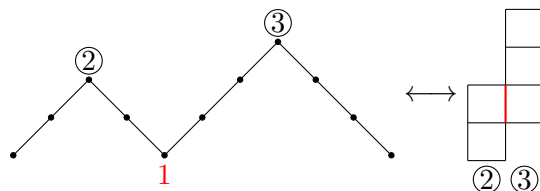


Figure 2 – Un chemin de Dyck et le polyomino parallélogramme correspondant

À partir d'un polyomino parallélogramme, on peut effectuer la transformation inverse, en le parcourant colonne par colonne. Ainsi, on a une bijection entre les polyominos parallélogrammes de taille n et les chemins de Dyck de longueur $2n$, comptés par les fameux nombres de Catalan, d'où :

Théorème 1. *Le nombre de polyominos parallélogrammes de taille n est le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$*

2.2 Tri par pile de permutations

Entrée	Pile	Sortie
35241		
5241	3	
5241		3
241	5	3
41	2	
41	5	3
41	5	32
1	4	
1	5	32
	1	
	4	
	5	32
	4	
	5	321
	5	3214
		32145

La notion de tri par une pile d'une permutation a d'abord été esquissée par Donald Knuth dans son célèbre monographe *The Art of Computer Programming*, puis ensuite développée sous différentes formes. L'algorithme est le suivant : étant données une permutation $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$ dans \mathfrak{S}_n et une pile initialement vide, on crée une nouvelle permutation $s(\pi)$ en lisant à chaque étape le premier élément de π non-encore empilé : on l'empile au sommet de la pile si celle-ci est vide ou si son sommet est plus grand que l'élément considéré, et sinon, on dépile le sommet de la pile et on ajoute l'élément dépilé à la fin de la sortie. À titre d'illustration, l'opération de tri sur 35241 donne 32145 et est décrite dans le tableau ci-contre.

On dit qu'une permutation π est *trieable par une pile* si la permutation obtenue par l'algorithme précédent est l'identité, autrement dit $s(\pi) = 12\dots n$. Plus généralement, dans sa thèse de doctorat de 1990, West a initié l'intérêt autour des permutations qui deviennent l'identité après un nombre donné de passages dans la pile. Ainsi, on dira qu'une permutation est *trieable par t piles* (au sens de West) si $s^t(\pi) = 12\dots n$. On notera $SS_t(n)$ l'ensemble des permutations de taille n triables par t piles et $W_t(n)$ le cardinal de $SS_t(n)$. Avec ces notations, toute permutation de \mathfrak{S}_n est triable par $n - 1$ piles, car après l'itération k de l'algorithme, les k valeurs de $n - k + 1$ à n sont triées correctement à la fin de la permutation.

2.3 Permutations triables par une pile

On peut retracer la procédure de tri par une pile d'une permutation de \mathfrak{S}_n en notant à chaque étape si l'on a empilé (noté par u) dans la pile ou si l'on a dépilé (d). On obtient de cette façon un mot de Dyck. Avec l'exemple de la permutation 35241 ci-dessus, on obtient le mot $uduuduudd$. En connaissant la permutation obtenue par la procédure de tri, ainsi que le chemin de Dyck associé, on peut reconstruire la permutation initiale en effectuant la procédure à l'envers. Ainsi, on peut associer un chemin de Dyck à chaque permutation triable par une pile de manière injective (puisque la permutation obtenue est l'identité). Cette correspondance est même bijective : étant donné un chemin de Dyck D , on numérote les descentes de 1 à n dans leur ordre d'apparition, on parcourt les montées dans l'ordre et on leur associe l'entier de la descente correspondante.

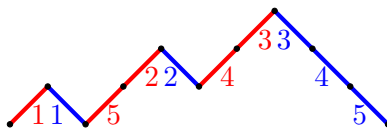


Figure 3 – Le chemin de Dyck correspondant à la permutation triable par une pile 15243

Cette bijection entre permutations triables par une pile et chemins de Dyck fait correspondre certaines des statistiques de ces objets : les maximums de gauche à droite sont envoyés sur les montées partant de l'axe x , les descentes ($\sigma(i) > \sigma(i + 1)$) sur les montées doubles (uu), les montées ($\sigma(i) < \sigma(i + 1)$) sur les pics (ud). En composant les deux bijections précédentes, on obtient :

Théorème 2. *L'ensemble des permutations triables par une pile de taille n est en bijection avec l'ensemble des polyomines parallélogrammes de taille n . En particulier :*

$$W_1(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2.4 Une caractérisation par évitement de motifs

La description par Knuth de la procédure de tri par pile d'une permutation a donné naissance au champ d'étude des permutations évitant un certain motif, ou un certain

ensemble de motifs.

Définition 3. Soient $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \in \mathfrak{S}_n$ et $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k \in \mathfrak{S}_k$ avec $k \leq n$. On dit que π contient une occurrence du motif σ , ou plus simplement que π contient σ , lorsqu'il existe des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tels que $\pi_{i_1} \dots \pi_{i_k}$ ait le même ordre relatif que $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$. Si ce n'est pas le cas, on dit que π évite σ , ou que π est σ -évitante. On note $\text{Av}(\sigma)$ l'ensemble des permutations σ -évitantes, et si S est un ensemble de permutations, on note $\text{Av}(S)$ l'ensemble des permutations qui évitent chacun des motifs appartenant à S .

Par exemple, $\pi = 35241$ contient le motif 132 puisque 354 a le même ordre relatif que 132, mais π est 123-évitante car il n'y a pas de sous-permutation croissante de longueur 3 dans π . Les permutations triables par une pile ont une description simple en termes d'évitance de motifs :

Théorème 3. Une permutation π est triable par une pile si et seulement si $\pi \in \text{Av}(231)$.

3 Poissons combattants et permutations triables par deux piles

3.1 Poissons combattants et décompositions

Dans le but de créer des surfaces branchantes du type polyominos plus générales que ceux-ci, Duchi, Schaeffer, Rinaldi et Guerrini ont introduit récemment la notion de poissons combattants en donnant des règles pour les générer.

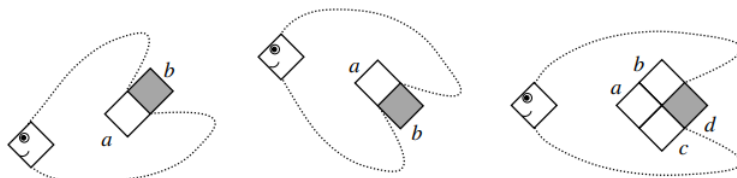


Figure 4 – Les trois façons d'agrandir un poisson combattant

Pour définir les poissons combattants, on opère une rotation de 45° des cellules et du réseau \mathbb{Z}^2 , de sorte que chacune des cellules est dotée de 4 arêtes : Nord-Ouest (NO), Nord-Est (NE), Sud-Est (SE) et Sud-Ouest (SO). Tout poisson combattant (non-vide) peut être formé à partir d'une cellule initiale appelée *tête*, en lui attachant des cellules d'une des trois manières suivantes :

- Si a est une cellule déjà dans le poisson avec l'arête NE libre (c'est-à-dire qu'aucune cellule n'y est attachée), alors on peut attacher l'arête SO d'une nouvelle cellule b à l'arête NE de a .

- Si a est une cellule déjà dans le poisson avec l'arête SE libre, alors on peut attacher l'arête NO d'une nouvelle cellule b à l'arête SE de a .

- Si a , b et c sont trois cellules déjà dans le poisson, telles que l'arête NE de a est attachée à l'arête SO de b et l'arête SE de a est attachée à l'arête NO de c , et si les arêtes SE de b et NE de c sont libres, alors on peut simultanément attacher les arêtes NO et SO d'une nouvelle cellule d à l'arête SE de b et à l'arête NE de c respectivement.

Nous nous intéressons aux poissons combattants en tant que collection de cellules indépendamment de l'ordre dans lequel ces cellules ont été attachées les unes aux autres. Une *cellule finale* d'un poisson est une cellule ayant les arêtes NE et SE libres, et son sommet Est est appelé une *queue* du poisson. La *nageoire* du poisson est le chemin partant du sommet Ouest de la tête qui suit le bord du poisson dans le sens antihoraire et qui s'arrête à la première queue rencontrée. La *taille gauche* (resp. *taille droite*) d'un poisson est le nombre d'arêtes SO (resp. d'arêtes SE) libres de ses cellules, et la *taille* d'un poisson est la somme des tailles gauche et droite. L'*aire* d'un poisson est le nombre de cellules composant le poisson.

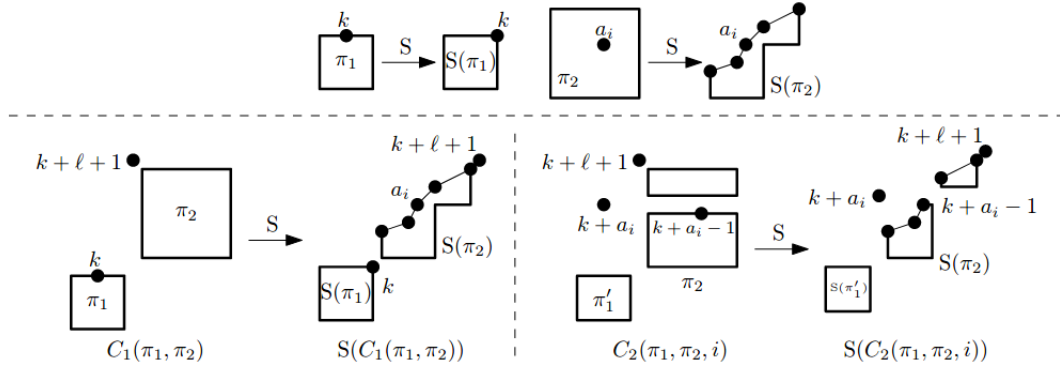


Figure 5 – Les constructions C_1 et C_2 tirées de l'article de Fang

Dans un article de 2017, Fang exhibe une bijection entre les permutations triables par deux piles et les poissons combattants qui s'appuie sur la description récursive de chacune de ces deux structures.

Définition 4. Soit $\pi_1 \in \text{SS}_2(k)$ et $\pi_2 \in \text{SS}_2(l)$, pour $k, l \geq 0$. Soit $\{a_1, \dots, a_m\}$ l'ensemble des maxima de gauche à droite de $s(\pi_2)$. On définit la permutation $C_1(\pi_1, \pi_2)$ de \mathfrak{S}_{k+l+1} par :

$$C_1(\pi_1, \pi_2)(i) = \begin{cases} \pi_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ k + l + 1 & \text{si } i = k + 1 \\ \pi_2(i) + k & \text{si } k + 2 \leq i \leq k + l + 1 \end{cases}$$

Si $k, l \geq 1$, on définit les permutations $C_2(\pi_1, \pi_2, j)$ pour $1 \leq j \leq m$ par :

$$C_2(\pi_1, \pi_2, j)(i) = \begin{cases} \pi_1(i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \text{ et } \pi_1(i) \neq k \\ k + a_j & \text{si } 1 \leq i \leq k \text{ et } \pi_1(i) = k \\ k + l + 1 & \text{si } i = k + 1 \\ \pi_2(i) + k - 1 & \text{si } k + 2 \leq i \leq k + l + 1 \text{ et } \pi_2(i) \leq a_j \\ \pi_2(i) + k & \text{si } k + 2 \leq i \leq k + l + 1 \text{ et } \pi_2(i) > a_j \end{cases}$$

Fang montre dans son article que les permutations obtenues par les constructions C_1 et C_2 à partir de permutations triables par deux piles appartiennent également à SS_2 , et que toute permutation de SS_2 (hormis la permutation vide) se décompose de manière unique via une des constructions C_1 ou C_2 .

La décomposition des poissons combattants qui va suivre généralise une décomposition des polyominos parallélogrammes, et a été proposée par Duchi et al. dans sous le nom de décomposition *taille de guêpe* (wasp-waist).

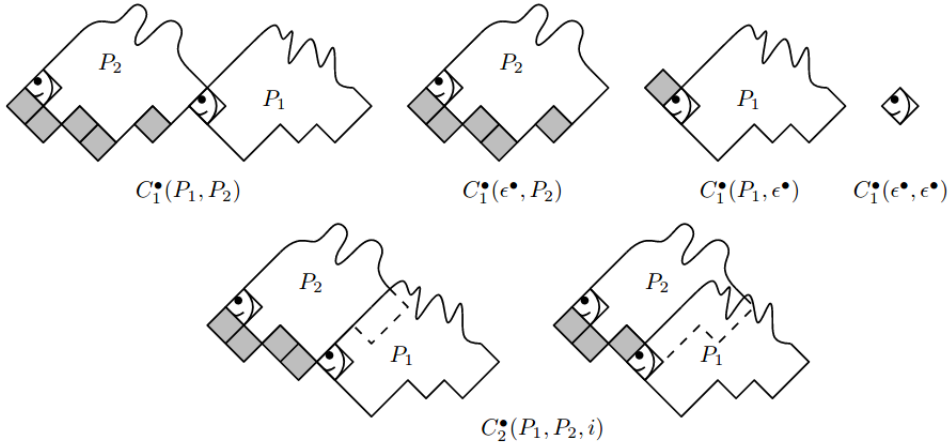


Figure 6 – Les constructions C_1^\bullet et C_2^\bullet tirées de l'article de Fang

Définition 5. Soient P_1, P_2 deux poissons combattants de taille respective k et l , avec $k, l \geq 0$.

- Si P_1 et P_2 sont tous les deux le poisson vide ϵ^\bullet ($k = l = 0$), on définit $C_1^\bullet(\epsilon^\bullet, \epsilon^\bullet)$ par l'unique poisson de taille 1.
- Si $P_1 = \epsilon^\bullet$ et P_2 n'est pas vide ($k = 0, l \geq 2$), on construit le poisson $C_1^\bullet(\epsilon^\bullet, P_2)$ en attachant une nouvelle cellule par son arête NE à chaque arête SO de la nageoire de P_2 .
- Si $P_2 = \epsilon^\bullet$ et P_1 n'est pas vide ($k \geq 2, l = 0$), on construit le poisson $C_1^\bullet(P_1, \epsilon^\bullet)$ en attachant l'arête SE de l'unique poisson de taille 1 à l'arête NO de la tête de P_1 .

- Si P_1 et P_2 ne sont pas vides ($k, l \geq 2$), on construit le poisson $C_1^\bullet(P_1, P_2)$ en attachant une nouvelle cellule par son arête NE à chaque arête SO de la nageoire de P_2 et en attachant l'arête NO de la tête de P_1 à la dernière arête SE de la nageoire de P_1 .
- Si P_1 et P_2 ne sont pas vides, soit $k \geq 1$ tel que la longueur de la nageoire de P_2 soit $k+1$. Pour $1 \leq i \leq k$, on construit le poisson $C_2^\bullet(P_1, P_2, i)$ en attachant une nouvelle cellule par son arête NE à chacune des arêtes SO parmi les $k+1-i$ premières arêtes de la nageoire de P_2 , et en attachant l'arête NO de la tête de P_1 à la $k+1-i^{\text{ème}}$ arête de la nageoire de P_2 si cette arête est SE, ou à l'arête SE de la cellule nouvellement attachée à la $k+1-i^{\text{ème}}$ arête de la nageoire de P_2 sinon.

De la même manière que pour les permutations triables par deux piles, les constructions C_1^\bullet et C_2^\bullet produisent bien des poissons combattants et chaque poisson combattant (hormis le poisson vide) se décompose uniquement via l'une des deux constructions C_1 ou C_2 .

Avec ces constructions analogues pour les permutations triables par deux piles et pour les poissons combattants, on peut désormais définir récursivement une application Φ entre ces deux classes d'objets :

$$\begin{aligned}\Phi(\epsilon) &= \epsilon^\bullet \\ \Phi(C_1(\pi_1, \pi_2)) &= C_1^\bullet(\Phi(\pi_1), \Phi(\pi_2)) \\ \Phi(C_2(\pi_1, \pi_2, i)) &= C_2^\bullet(\Phi(\pi_1), \Phi(\pi_2), i)\end{aligned}$$

A priori, $\Phi(\pi)$ n'est pas forcément bien définie pour toutes les permutations π de SS_2 , mais on peut montrer que c'est le cas par induction sur la taille de π , l'argument-clé étant de montrer par cette même induction que $\text{smax}(\pi) + 1 = \text{fin}(\Phi(\pi))$, où $\text{smax}(\pi)$ est le nombre de maxima de gauche à droite de $s(\pi)$, et $\text{fin}(P)$ est la longueur de la nageoire de P .

Théorème 4. Φ est une bijection qui associe à une permutation $\pi \in \text{SS}_2$ de longueur $n \geq 1$, avec i montées et j descentes dans π , k maxima de gauche à droite et l éléments a qui précèdent $a-1$ dans $s(\pi)$ un poisson combattant $\Phi(\pi)$ de taille $n+1$, de taille gauche $i+1$, de taille droite $j+1$, de longueur de nageoire $k+1$, et ayant $l+1$ queues.

Cette bijection est ce que l'on pourrait appeler une "bonne" bijection : elle établit une correspondance entre cinq paramètres structurels des permutations triables par deux piles et cinq paramètres des poissons combattants. Une autre caractéristique importante de cette bijection est qu'elle préserve la même correspondance entre polyominos parallélogrammes et permutations triables par une pile qu'on a vu dans la section précédente.

3.2 Énumération des permutations triables par deux piles

De la même manière que pour les permutations triables par une pile, on peut associer à chaque permutation triable par deux piles un couple de chemins de Dyck correspondant aux deux passages successifs dans la pile, et ce de manière injective. Cependant, la correspondance n'est pas bijective. Dans sa thèse, West a montré que les permutations triables par deux piles étaient exactement les permutations qui évitent le motif 2341 et

qui ne contiennent pas non plus de motif 3241 qui ne soit contenu dans un motif 35241. Il a également conjecturé la formule suivante, qui fut prouvée par Zeilberger cinq ans plus tard :

Théorème 5. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$W_2(n) = \frac{2(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \binom{3n}{n}$$

Cette séquence de nombres énumère donc aussi le nombre de poissons combattants de taille $n+1$, mais aussi d'autres structures combinatoires, comme le nombre de cartes planaires non-séparables enracinées avec n arêtes, le nombre d'arbres ternaires gauches avec n nœuds, le nombre total d'intervalles synchronisés dans le treillis de Tamari de taille n . Deux preuves du théorème précédent s'appuient sur une bijection des permutations triables par deux piles avec les cartes planaires non-séparables enracinées, objets précédemment énumérés par Tutte en 1963, mais nous allons décrire ici une preuve due à Bousquet-Mélou qui utilise des techniques générales de résolution d'équations fonctionnelles portant sur des séries génératrices.

Pour énumérer des objets en fonction des différentes valeurs de leurs paramètres, on utilise souvent des séries génératrices, qui synthétisent les propriétés de décomposition des objets en objets plus petits. Considérons la série génératrice suivante des permutations triables par deux piles :

$$\Gamma(t, u, v, w, x, y, z) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\pi \in \text{inSS}_2(n)} t^n u^{\text{smax}(\pi)} v^{\text{lmax}(\pi)} w^{\text{rmax}(\pi)} x^{\text{asc}(\pi)} y^{\text{des}(\pi)} z^{\text{sldes}(\pi)}$$

prenant en compte les paramètres suivants intervenant dans la bijection Φ du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \text{lmax}(\pi) &= |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \pi(i) > \pi(j) \text{ pour tout } j < i\}| \\ \text{rmax}(\pi) &= |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \pi(i) > \pi(j) \text{ pour tout } j > i\}| \\ \text{smax}(\pi) &= \text{lmax}(s(\pi)) \\ \text{asc}(\pi) &= |\{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \pi(i) < \pi(i+1)\}| \\ \text{des}(\pi) &= |\{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid \pi(i) > \pi(i+1)\}| \\ \text{sldes}(\pi) &= |\{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid s(\pi)^{-1}(i) < s(\pi)^{-1}(i+1)\}| \end{aligned}$$

Cette série génératrice est également celle des poissons combattants avec les paramètres correspondants (dont certains sont donnés par la bijection ci-dessus, mais dont d'autres restent à trouver). La décomposition récursive des permutations triables par deux piles passant par les constructions C_1 et C_2 permet d'écrire une équation fonctionnelle sur Γ , en exprimant les valeurs des paramètres pour chaque permutation en fonction

de leur valeur pour les permutations intervenant dans la décomposition. Sans entrer dans les détails, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(t, u, v, w, x, y, z) = & tuv w(1 + y\Gamma(t, u, v, 1, x, y, z))(1 + x\Gamma(t, u, 1, w, x, y, z)) \\ & + tuv wxyz\Gamma(t, u, v, 1, x, y, z) \frac{\Gamma(t, u, 1, w, x, y, z) - \Gamma(t, 1, 1, w, x, y, z)}{u - 1} \end{aligned}$$

Notons à partir de maintenant $\Gamma(t, u) = \Gamma(t, u, 1, 1, 1, 1, 1)$ la spécialisation de Γ à $v = w = x = y = z = 1$. L'équation précédente peut être utilisée pour calculer le nombre de permutations triables par deux piles de taille n (indépendamment des autres paramètres) : c'est le coefficient de t^n dans la série $\Gamma(t, 1) =: f(t)$, ce que l'on note $[t^n]f$. La nouvelle équation obtenue après spécialisation est :

$$\Gamma(t, u) = tu(1 + \Gamma(t, u))^2 + tu\Gamma(t, u) \frac{\Gamma(t, u) - \Gamma(t, 1)}{u - 1} \quad (\star)$$

Remarquons qu'on ne peut pas spécialiser en $u = 1$, même en multipliant l'équation par $u - 1$: on obtiendrait une équation $0 = 0$ qui ne donne pas d'information. Cette équation est ce que l'on appelle une *équation polynomiale en une variable catalytique* : ici, la variable u joue le rôle de catalyse, et s'impose comme une variable avec laquelle on est obligés de travailler. Pour obtenir la série $f(t)$ désirée, on utilise une méthode dont l'usage a été systématisé notamment par Bousquet-Mélou pour des équations avec variable catalytique. On procède comme suit : on multiplie l'équation de sorte à n'avoir plus de dénominateur, et on dérive par rapport à u de sorte à obtenir :

$$\begin{aligned} \Gamma(t, u) - t(2u - 1)(1 + \Gamma(t, u))^2 - t\Gamma(t, u)(\Gamma(t, u) - \Gamma(t, 1)) = \\ - \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(t, u)(u - 1 - 2tu(u - 1)(1 + 2\Gamma(t, u)) - tu(2\Gamma(t, u) - \Gamma(t, 1))) \end{aligned}$$

L'idée est d'ensuite définir l'unique série formelle $U(t)$ qui vérifie :

$$U = 1 + 2tU(U - 1)(1 + 2\Gamma(t, U)) + tU(2\Gamma(t, U) - \Gamma(t, 1))$$

La série U ainsi définie est bien unique (on peut calculer ses coefficients par récurrence), annule le membre de droite de l'équation précédente, donc annule le membre de gauche également. On obtient une troisième équation en remplaçant u par U dans l'équation (\star) , ce qui donne trois équations, pour trois inconnues U , $\Gamma(t, U(t))$ et $\Gamma(t, 1)$. La résolution de ce système donne finalement :

$$f(t) = \Gamma(t, 1) = \beta - \frac{\beta^3}{(1 - \beta)^2}, \text{ où } \beta(t) \text{ est l'unique série formelle solution de } \beta = \frac{t}{(1 - \beta)^2}$$

Enfin, une application du théorème d'inversion de Lagrange donne le résultat attendu.

3.3 Aire moyenne des poissons combattants

Grâce à une autre décomposition des poissons combattants donnant accès à leur aire, Duchi et al. ont obtenu une équation polynomiale à variable catalytique quadratique dont ils ont pu extraire des informations asymptotiques grâce à des outils d'analyse complexe. Leur résultat porte sur l'aire moyenne d'un poisson choisi uniformément parmi tous les poissons de taille n , que l'on note \mathcal{A}_n :

Théorème 6. *Lorsque $n \rightarrow \infty$,*

$$\mathcal{A}_n \sim \frac{3^{\frac{1}{4}}}{4\sqrt{2\pi}\Gamma(-\frac{1}{4})} n^{\frac{5}{4}}$$

Cet exposant critique de $\frac{5}{4}$ est à comparer avec l'exposant $\frac{3}{2}$ qui apparaît pour les différents modèles (parallélogrammes, convexes, convexes dirigés,...) de polyominos aléatoires uniformes : les poissons combattants appartiennent à une classe de surfaces branchantes différente de celle des polyominos.

4 Perspectives

La bijection de la section précédente entre permutations triables par deux piles et poissons combattants n'est pas complètement satisfaisante car elle est récursive : elle s'appuie sur la décomposition de ces deux types d'objets combinatoires en objets plus petits. Un résultat intéressant qui sera l'un des objectifs de ma thèse serait d'avoir une description directe de cette bijection sans passer par les décompositions. Une telle description pourrait notamment permettre d'avoir un accès direct à des liens entre paramètres qui ne sont pas traçables par la bijection récursive de Fang, notamment pour l'aire des poissons combattants pour laquelle on ne connaît pas encore de statistique équivalente dans les permutations de SS_2 . L'autre avantage d'une bijection directe est que l'on pourrait mieux comprendre pourquoi les permutations triables par une ou deux piles sont équivalentes à des surfaces branchantes, et si cette approche pourrait se généraliser aux permutations triables par t piles, pour $t \geq 3$, de manière plus générale que par des décompositions récursives.

Cependant, si les formules pour les permutations triables par une ou deux piles laissent entrevoir une possibilité d'énumération exacte des permutations triables par t piles pour $t \geq 3$, il semble improbable d'obtenir des formules aussi simples que pour $t = 1, 2$ (en fait, le calcul des premiers termes de $(W_3(n))$ donne quelques nombres possédant de relativement gros facteurs premiers, ce qui rend impossible une expression comme produit de coefficients binomiaux). Dans un article de 2020, Defant a obtenu une formule explicite complexe pour $W_3(n)$ en utilisant des outils de décomposition des permutations triables par trois piles, et a donné quelques éléments de réponse à des conjectures proposées par Bóna sur le comportement asymptotique du nombre de permutations triables par t piles. Il est à noter également qu'Ulfarsson a obtenu une caractérisation des permutations triables par trois piles en termes d'évitance de motifs en faisant appel à des notions

d'évitance plus complexes que celle développée ici, et que cette caractérisation semble difficilement généralisable.

Enfin, mentionnons que Cerbai, Claesson et Ferrari ont proposé une généralisation du tri par pile des permutations, en astreignant la pile à ne pas pouvoir contenir un certain motif : dans notre cas, la pile ne pouvait pas contenir le motif 21, quand on lit ses éléments du sommet vers le fond.

5 Références

[DGRS16] E.Duchi, V.Guerrini, S.Rinaldi, G.Schaeffer. Fighting fish. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 50.2 (2016).

[DGRS17] E. Duchi, V. Guerrini, S. Rinaldi, G. Schaeffer, Fighting fish : enumerative properties, *Proceedings of 29th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics London (UK)*, 2017.

[Fang17] Fang, W. (2017). Fighting fish and two-stack sortable permutations. arXiv preprint arXiv :1711.05713.

[BM00] Bousquet-Mélou, M. (2000). Sorted and/or sortable permutations. *Discrete Mathematics*, 225(1-3), 25-50.

[BM98] Bousquet-Mélou M., Multi-statistic enumeration of two-stack sortable permutations, *Electronic Journal of Combinatorics*, 5 (1998)

[BMJ06] Bousquet-Mélou M. and Jehanne A., Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(5) :623–672, 2006.

[CCF] Cerbai, G., Claesson, A., Ferrari, L. (2020). Stack sorting with restricted stacks. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 173, 105230.

[Defant] Defant C., Counting 3-stack-sortable permutations, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 172 (2020)

[Bóna] Bóna M., A survey of stack-sorting disciplines. *Electronic Journal of Combinatorics*, 9 (2003)

[West] West J., Permutations with restricted subsequences and stack-sortable permutations, Ph.D. Thesis, MIT, 1990.