Introduction au domaine de recherche.

Espaces de Teichmüller généralisés et structures géométriques.

Colin Davalo

21 mai 2021

Les espaces de Teichmüller généralisés constituent une certaine généralisation de l'espace de Teichmüller classique en remplaçant le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ par des groupes de Lie de rang supérieur. Un espace de Teichmüller généralisé au sens de A. Wienhard et O. Guichard [21] est une union de composantes connexe de l'espace des représentations d'un groupe de surface dans un groupe de Lie semi-simple G ne contenant que des représentations discrètes et fidèles.

Le premier exemple d'une telle composante a été introduite par Hitchin en 1992 [11], pour les représentations à valeurs dans $PSL_n(\mathbb{R})$, et plus généralement pour les groupes de Lie simples scindés. Le second est celui des représentations maximales, définies à partir de l'invariant de Toledo [3] pour les groupes de Lie de type Hermitien. En 2006, F. Labourie a introduit les propriétés Anosov [16], qui permettent d'étudier ces espaces de Teichmüller généralisés.

L'espace classique de Teichmüller peut etre défini de plusieurs points de vue différents : comme un espace de structures géométriques au sens de Klein, comme un espace de structure complexes, ou comme un espace de représentations. Une question intéressante et qui n'est pas encore complètement résolue est de comprendre les généralisations possibles des deux premiers points de vue.

On peut se demander également si toute la théorie très dévellopée de l'espace de Teichmüller peut être adapté à ces nouveaux espaces. Il existe plusieurs systèmes de coordonnées, une métrique naturelle ainsi que plusieurs compactifications de l'espace de Teichmüller. Certains analogues de ces objets ont été construits pour certains espaces de Teichmüller généralisés, mais tous ne sont pas complètement compris.

Table des matières

1 Structures géométriques selon Klein.

Felix Klein a proposé en 1872 le programme d'Erlangen selon lequel la géométrie est l'étude des propréités d'un espace invariantes par un groupe de transformations. Une manière de formaliser ce point de vue est la notion de (G, X)-structure. Cette notion est présentée dans [19]. Les notions de base de revêtement universel et de groupe de Lie peuvent être trouvées dans [10].

Définition 1.1 *Soit G un groupe de Lie et X une variété différentielle sur laquelle G agit transitivement at analytiquement. Une (G, X)*-structure *sur une variété différentielle M est un atlas défini par une collection $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de M, et des applications $\phi_i : U_i \to X$ qui sont des difféomorphismes sur leur image, qui satisfait une propriété de compatibilité, i.e pour tout $i, j \in I$ tels que $V = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de cartes $\psi : \phi_i(V) \to \phi_j(V)$ défini par $psi = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ coïnicde avec l'action d'un élément $g \in G$ sur X.*

Deux (G, X)-structures sur une variété M définies par des atlas $(U_i)_{i\in I}, (\phi_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}, (\psi_j)_{j\in J}$ sont dites équivalentes si il existe un difféomorphisme $\Phi : M \to M$ isotope à l'identité tel que pour tout $i \in I$ et $j \in J$ tels que $W = U_i \cap \Phi(V_j) \neq \emptyset$, l'application $\Psi : \phi_i(V) \to \phi_j \circ \Psi(V)$ définie par $\Phi = \phi_j \circ \Phi \circ \phi_i^{-1}$ coïncide avec l'action d'un élément $g \in G$ sur X.

Cette notion permet d'unifier les notions de structure géométrique sur une variété. Par exemple une $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$-structure sur une surface S est la donnée de cartes à valeurs dans le plan hyperbolique qui diffèrent d'une isométie hyperbolique. Une telle structure induit une métrique riemannienne de courbure sectionelle constante égale à -1 sur S.

Soit $n \geq 1$, une $(PGL_{n+1}(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^n)$-structure sur une variété M est une apellée une structure projective. C'est un exemple particulier de structure parabolique, i.e. une $(G, G/P)$ structure où P est un sous groupe parabolique d'un groupe de Lie semi-simple G.

Une propriété importante des (G, X)-structures est l'existence d'applications dévellopantes, et la notion d'holonomie. Pour définir ces notions il est important de supposer que M est connexe, et que X est simplement connexe.

Proposition 1.1 *Soit M une variété munie d'une (G, X)-structure, et soit $\tilde{M}$ son revêtement universel, sur lequel $\pi_1(M)$ agit par transformations de Decke. Supposons que X est simplement connexe et M est connexe. Il existe alors une application appellée* application dévellopante *$dev : \tilde{M} \to X$ telle que pour toute carte $\phi : U \subset M \to V \subset X$, il existe un élément $g \in G$ tel que pour tout $x \in U$, $g \cdot \phi(x) = dev(x)$. Une telle application est unique à l'action de G sur X près.*

Etant donné une application dévellopante dev, il existe un unique morphisme de groupe, ou représentation, $hol : \pi_1(M) \to X$ où $\pi_1(M)$ est le groupe fondamental de M qui satisfait pour tout $x \in X$ et $\gamma \in \pi_1(M)$:

$$dev(\gamma \cdot x) = hol(\gamma) \cdot dev(x)$$

Cette représentation est appellée holonomie *de la (G, X)-structure. Elle est définie à conjugaison par un élément de G près, et si deux (G, X)-structures sont équivalentes, alors leurs applications dévellopantes sont égales à l'action d'un élément de G près.*

L'image de l'holonomie d'une (G, X)-structure est toujours un sou-groupe discret.De plus si l'image de l'application développante est simplement connexe, alors on peut identifier M avec $\mathrm{dev}(M)/\mathrm{hol}(\pi_1(M))$, d'une manière qui identifie la (G, X)-structure de M est celle de $\mathrm{dev}(M)/\mathrm{hol}(\pi_1(M))$. En particulier dans le cas l'holonomie est une représentation fidèle, i.e un morphisme injectif.

2 Espace de Teichmüller.

Avant de commencer, rapellons la classification des surfaces compactes.

Théorème 2.1 *Soit $g \geq 0$, il existe une unique surface S, i.e variété différentiable de dimention 2, à difféomorphisme près qui soit orientable, compacte et de genre g, i.e $H^1(S, \mathbb{R})$ est de dimension $2g$.*

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ a initialement été défini comme un certain quotient de l'espace des structures complexes sur une surface compacte orientable connexe sans bord S de genre $g \geq 1$.

Définition 2.1 *Une* structure complexe marquée *sur une surface S est un difféomorphisme $\phi : S \to X$ où X est une surface de Riemann. Deux structures complexes marquées $\psi : S \to X'$ sont considérées comme équivalentes si il existe un biholomorphisme $h : X \to X'$ tel que ψ et $h \circ \phi$ soient isotopes.*

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ est l'espace des structure complexe marquées à équivalence près.

Remarque 1 *Si on oublie l'hypothèse que ϕ et ψ doivent être isotopes, alors on obtient la notion de structure complexe non-marquée. L'espace des telles structures est appellé l'espace des modules de la surface S. Cet espace est le quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du groupe des classes de difféomorphismes, qui est le groupe discret dénombrable obtenu en considérant le quotien du groupe des difféomorphismes de S par le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité, voir [17].*

Dans le cadre des surfaces, il s'avère que deux difféomorphismes sont isotopes si et seulement si il sont homotopes, et si et seulement si leur action sur le groupe fondamental est identique.

Il n'est pas évident qu'une structure complexe puisse être vue comme une (G, X)-structure, mais dans ce cas précis cela est possible grâce au théorème d'uniformisation.

Théorème 2.2 (Uniformisation) *Soit X une surface de Riemann, simplement connexe. Alors il existe un biholomorphisme entre X et l'un des trois modèles suivants :*

$$\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, \mathbb{D}$$

la droite projective complexe, le plan complexe et le disque unité.

Soit X une surface de Riemann de genre $g \geq 1$, son revêtement universel $\tilde{X}$ est non-compact, donc biholomorphe à $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi X hérite naturellement d'une $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{D})$-structure ou d'une $(\mathrm{Aff}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$-structure, où $PSL_2(\mathbb{R})$ est le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$ et $\mathrm{Aff}_{\mathbb{C}}$ celui de $\mathbb{C}$.

Si la surface est de genre 1, son groupe fondamental ne dispose pas de représentations discrètes et fidèles dans $PSL_2(\mathbb{R})$, i.e de morphisme de groupes injectif d'image discrète. Si la surface est de genre $g \geq 2$, son groupe fondamental ne dispose pas de représentations discrètes et fidèles dans $\mathrm{Aff}_{\mathbb{C}}$.

À présent soit S une surface de genre $g \geq 2$, et soit $\phi : S \to X$ un difféomorphisme avec X une surface de Riemann. Alors S hérite d'une $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{D})$-structure. De plus deux telles structures sont équivalentes si et seulement si les éléments correspondants sont égaux dans $\mathcal{T}(S)$.

Cependant $\mathbb{D}$ peut être vu comme le modèle du disque de Pointcaré du plan hyperbolique, et avec cette identification les isométries du plan hyperboliques sont exactement les bholomorphisme de $\mathbb{D}$. Ainsi une structure complexe sur équivaut à une structure hyperbolique. On obtient donc la deuxième interprétation de l'espace de Teichmüller.

Théorème 2.3 *Soit S une surface de genre $g \geq 2$. L'espace $\mathcal{T}(S)$ est en bijection avec l'espace des $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$-structures sur la surface S, c'est à dire des structures hyperboliques marquées sur la surface S.*

Une conséquence de ce théorème est la suivante : on peut naturellement à une strcture complexe sur une surface S associer une métrique riemannienne de courbure sectionelle constante et égale à 1 si S est de genre $g \geq 2$. Cette métrique peut être caractérisée comme l'unique métrique riemannienne de courbure sectionelle constante qui est conforme vis à vis de la structure complexe.

Une particularité des $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$-structures sur la surface S est la suivante : leur application dévellopante est nécessairement surjective. Cela provient du fait que la métrique induite sur S est nécessairement complète puisque S est compacte. Ainsi à chacune de ces structure correspond une représentation $\rho : \pi_1(S) \to PSL_2(\mathbb{R})$ qui est discrète et fidèle, obtenue comme l'holonomie de la (G, X)-structure. Réciproquement étant donné une représentation fidèle et discrète ρ, on peut considérer la surface $X = \mathbb{D}/\rho(\pi_1(S))$.

Il s'avère que X est nécessairement compact et qu'il existe un difféomorphisme $\phi : S \to X$. Ce difféomorphisme est unique à isotopie près si on ajoute l'hypothèse que $\phi^* : \pi_1(S) \to \pi_1(X)$ envoie un élément γ sur l'unique élément dont la transformation de Decke est $\rho(\gamma)$. On obtient ainsi une troisième caractérisation de l'espace de Teichmüller.

Théorème 2.4 *Soit S une surface de genre $g \geq 2$. L'espace $\mathcal{T}(S)$ est en bijection avec l'espace $Hom_{f,d}(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{R}))/PSL_2(\mathbb{R})$ des représentations fidèles et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$, quotienté par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ par conjugaison.*

Définition 2.2 *Une représention discrète et fidèle d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ de genre $g \geq 2$ est appellé* représentation fuchsienne*.*

L'espace des représentations fidèles et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$ forment une union de composantes connexes de l'espace des représentations. Le fait que cet espace soit fermé provient du lemme du collier [17].

Lemme 2.1 *Soit g un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$. On appelle distance de translation de g la quatitée $\ell(g) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d(x, g \cdot x)$, où la distance considérée est la distance hyperbolique. Soit ρ une représentation discrète de $\pi_1(S)$ où S est une surface de genre $g \geq 2$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Soient γ,$\eta \in \pi_1(S)$, on note $i(\eta, \gamma)$ le nombre minimal d'intersections entre deux représentants de la classe homotopie libre de γ et η. Alors :*

$$\ell(\rho(\gamma))\ell(\rho(\eta)) \geq i(\gamma, \eta).$$

En particulier si une suite (ρ_n) de telles représentations est telle que $\ell(\rho_n(\gamma))$ converge vers 0 pour un certain $\gamma \in \pi_1(S)$, alors la suite $\ell(\rho_n(\eta))$ diverge pour un certain $\eta \in \pi_1(S)$.

Le fait que cet espace soit un ouvert provient de la notion de représentations convexe cocompacte, qui peut être généraliser en rang supérieur à la notion de représentation Anosov.

3 Représentations convexes cocompactes et propriétés Anosov.

Les représentations discrètes ρ du groupe fondamental Γ_g d'une surface de genre $g \geq 2$ dans $PSL_2(\mathbb{R})$ satisfont une propriété particulière inspirée de la théorie géométrique des groupes. Afin de la présenter, commeçons par introduire la notion d'espace hyperbolique au sens de Gromov [6].

Soit S une partie génératrice finie du groupe Γ qui est symétrique, i.e telle que si $s \in S$ alors $s^{-1} \in \Gamma$. On note $|g|_S$ pour $g \in \Gamma$ le plus petit nombre entier n tel que pour certains $s_1, s_2, \cdots, s_N \in S$, $g = s_1, \cdots, s_n$. Cette norme définit une distance sur Γ en posant $d(g,h) = |gh^{-1}|_S = |hg^{-1}|_S$. Cette distance s'étend en une distance sur le graphe de Cayley de Γ, i.e le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ et les arêtes sont les paires (g,h) où $g = hs$, $s \in S$.

Définition 3.1 *Un espace métrique totallement géodésique est dit δ-*hyperbolique *si pour tous points a, b, c pour toutes géodésiques $[a,b], [b,c]$ et $[c,a]$, et tout point $x \in [c,a]$ il existe un point $y \in [a,b] \cup [b,c]$ à distance au plus δ de x. L'espace X est dit* hyperbolique *au sens de Gromov si il est δ-hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.*

Une application $\phi : X \to Z$ entre deux espace métriques est une quasi-isométrie si il existe $C, D > 0$ tels que pour tous $x, y \in X$:

$$\frac{1}{C}d(x,y) - D \leq d(\phi(x), \phi(y)) \leq Cd(x,y) + D$$

et si pour tout $z \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $d(\phi(x), z) < D$. On dit alors que ϕ est une (C,D)-quasi-isométrie. Si ϕ satisfait la première hypothèse, on dit que ϕ est un quasi-plongement ou (C,D)-quasi-plongement.

En d'autres termes un espace est Gromov hyperbolique lorsque tous les triangles sont uniformément fins. Cette propriété est vérifiée pour le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Les espaces compacts sont des exemples d'espaces hyperboliques, ainsi que les arbres qui sont 0-hyperboliques. Cette définition proposée par Gromov est particulièrement intéressante car elle de dépend que du type de quasi-isométrie de l'espace [12].

Théorème 3.1 *Si un espace X est hyperbolique et quasi isométrique à un espace métrique totallement géodésique Y, alors Y est également hyperbolique.*

Idée de la preuve: L'élément clé de la preuve de ce résultat est le lemme de Morse, qui affirme que dans un espace métrique totalement géodésique δ-hyperbolique une (C,D)-quasi-géodésique i.e l'image d'un segment muni sa métrique usuelle par un (C,D)-quasi plongement sur son image, est nécessairement à distance bornée d'une géodésique, majorée par une constante dépendant de (C,D) ainsi que du δ.

Ainsi si on dispose d'une quasi-isométrie $\phi : X \to Y$, on peut également construire une quasi-isométrie $\psi : Y \to X$. L'image T' d'un triangle T par ψ n'est pas nécessairement un triangle, car les côtés ne sont plus géodésiques mais quasi-géodésiques. en utilisant le lemme de Morse on peut cependant montrer qu'il existe une tringle T'' dans X proche de T'. Ainsi le triangle T' sera fin, avec une contante dépendant de la constante d'hyperbolicité de X ainsi que des constantes de quasi-isométrie de ψ, et on peut ensuite montrer que par conséquent le triangle T est fin. $\square$

Un groupe finiement engendré Γ est dit hyperbolique si son graphe de Cayley associé à un certain système fini de générateur symétrique S est hyperbolique. Dans ce cas le graphe de Cayley de Γ pour n'importe quel système de générateurs symétrique est hyperbolique.

Une manière de montrer que des groupes sont hyperboliques est de les faire agir sur des espaces hyperboliques.

Théorème 3.2 *Soit Γ un groupe finiement engendré qui agit par isométries proprement discontinuement et de façon cocompacte sur un espace métrique hyperbolique X. Alors le graphe de Cayley de Γ pour n'importe quel système de générateurs est quasi-isométrique avec X.*

Ainsi soit $g \geq 2$, le groupe Γ_g est hyperbolique. Une conséquence du fait d'être hyperbolique est l'existence d'un bord pour les espaces hyperboliques et en particulier pour les groupes hyperboliques.

Définition 3.2 *Soit X un espace métrique hyperbolique. Le* bord à l'infini *∂X de X est l'espace des rayons géodésiques $\gamma : \mathbb{R}^+ \to X$, où deux rayons géodésiques sont identifiés lorsqu'ils sont à distance bornée.*

Il existe une manière naturelle de munir $\overline{X} = \partial X \cup X$ d'une topologie qui en fait un espace compact lorsque X est localement compact de sorte que l'on ait le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Soient X et Y deux espaces hyperboliques localement compacts. toute quasi-isométrie $\phi : X \to Y$ se prolonge en un unique homéomorphisme $\overline{\phi} : \overline{X} \to \overline{Y}$.*

En particulier il est possible de définir le bord $\partial\Gamma$ pour un groupe hyperbolique finiement engendré Γ d'une manière qui ne dépend pas du système de générateur S choisi pour définir la distance sur Γ.

Soit X une variété riemannienne simplement connexe de courbure sectionelle majorée par $\kappa < 0$. Soit G un sous-groupe de son groupe d'isométries. On peut définir la notion de représentation convex cocompacte dans G ([7] Section 5.4).

Définition 3.3 *Soit Γ un groupe finiement engendré. Une représentation $\rho : \Gamma \to G$ est dite* convexe cocompacte *si il existe un sous ensemble convexe ρ-invariant $K \subset X$ tel que $\rho(\Gamma)$ agit proprement discontinuement sur K et tel que le quotient $K/\rho(\Gamma)$ est compact.*

Une définition équivalente est la suivante :

Définition 3.4 *Soit Γ un groupe finiement engendré. Une représentation $\rho : \Gamma \to G$ est* convexe cocompacte *si un point $x \in X$, $g \in \Gamma \mapsto g \cdot x \in X$ est une quasi-isométrie, autrement dit pour tout système de générateur S il existe $c, D > 0$ tels que :*

$$d(g \cdot x, x) \geq c|g|_S - D$$

L'étude des représentations covexes cocompactes est notement intéresssante pour étudier les déformations de représentations fuchsiennes dans $PSL_2(\mathbb{C})$ qui peut être vu comme le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Les représentations convexes cocompactes ont les propriétés suivantes :

Proposition 3.1 *Si $\rho : \Gamma \to G$ est convexe cocompacte, alors Γ est hyperbolique. L'espace des représentations convexes cocompactes est ouvert dans l'espace des représentations $Hom(\Gamma, G)$.*

À une représentation convexe cocompacte on peut associer une application de bord $\xi_\rho : \partial\Gamma \to \partial X$ qui est continue et Γ-équivariante.

Soit G un groupe de Lie semi-simple. simplement connexe. Si son algèbre de Lie ne contient pas de facteur abéliens ou correspondant à des groupes de Lie compacts il est dit de type non-compact. Dans ce cas il admet un unique sous-groupe compact maximal K à conjugaison près, et le quotient G/K peut être muni d'une structure riemannienne qui en fait un espace symétrique. [5]

L'espace $X = G/K$ dans ce cas est une variété riemanienne simplement connexe de courbure sectionelle négative ou nulle : c'est une variété de Hadamard. En particulier X est homéomorphe à $\mathbb{R}^N$ pour un certain $N > 0$. Le rang de G et de X est défini comme la dimention maximale d'un sous-espace totallement géodésique à courbure sectionelle nulle dans X. Si X est de rang 1, on peut montrer que X est à courbure sectionelle majorée par $\kappa < 0$.

Cependant pour des groupes de Lie de rang supérieur, la courbure sectionelle peut être nulle. Il est toujours possible d'essayer de généraliser la deuxième définition d'une représentation covexe cocompacte, mais l'espace des telles représentations ne sera plus nécessairement ouvert : la preuve de ce fait utilisait la stricte négativité de la courbure sectionelle de X. Cependant dans les espaces symétriques de type non-compact X de rang supérieurs il existe entre deux points une notion de distance généralisée, qui prend ces valeurs dans un cône appartentant à $\mathbb{R}^d$ où d est le rang de X. Ce cône est appellé chambre de Weyl. Il existe plusieurs projections de ce cône dans $\mathbb{R}$ qui permettent à partir de la distance généralisée d'obtenir des notions de racines.

Soit $G = PSL_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, alors G est un groupe de Lie simple de type non-compact simplement connexe. Un sous-groupe compact maximal est conjugé à $PSO_n(\mathbb{R})$. L'espace symétrique $\mathcal{S}_n = PSL_n(\mathbb{R})/PSO_n(\mathbb{R})$ peut être vu comme l'espace des formes bilinéaires symétriques définies positives de déterminant 1 sur R^n. C'est un espace symétrique de rang $n-1$.

Soient q_1, q_2 deux telles formes, alors il existe un endomorphisme A de R^n qui est q_1-symétrique tel que $q_1(A\cdot, \cdot) = q_2(\cdot, \cdot)$. Par le théorème spactral, cet endomorphisme dans une base q_1-orthogonale est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(e^{\sigma_1}, e^{\sigma_2}, \cdots, e^{\sigma_n})$ avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ et $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots = \sigma_n$.

Cette matrice digaonale est la distance généralisée de q_1 vers q_2 (cette distance généralisée n'est pas symétrique). Les racines positives sont les applications α_i pour $1 \leq i \leq n-1$ qui à q_1, q_2 associent $\sigma_i - \sigma_{i+1}$. Cette notion de racine permet de définir la notion de représentation Anosov dans $PSL_n(\mathbb{R})$. Cette définition est due à Kapovitch, Leeb et Porti [13].

Définition 3.5 *Soit Γ un groupe finiement engendré, et S un système fini symétrique de générateurs. Une représentation $\rho : \Gamma \to PSL_n(\mathbb{R})$ est dite Δ-*Anosov *où $\Delta \subset \{1, \cdots, n-1\}$ si pour tout $i \in \Delta$ il existe $c, D > 0$ tels que pour tout $\gamma \in \gamma$:*

$$\alpha_i(\rho(\gamma) \cdot q_0, q_0) > c|g|_S - D$$

pour q_0 le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, ou autrement dit :

$$\frac{\sigma_i(\rho(\gamma))}{\sigma_{i+1}(\rho(\gamma))} > c|g|_S - D$$

avec σ_i et σ_{i+1} les logarithmes des i-ièmes et i+1-ièmes valeurs singulières de l'endomorphisme $\rho(\gamma)$.

Plus généralement, soit G un groupe de Lie semi-simple de type non-compact avec X son espace symétrique associé. Soit F un sous-espace plat maximal de X apellé espace plat modèle, qui est isométrique à $\mathbb{R}^d$ où d est le rang de X. Quitte à fixer un point $x_0 \in F$, on peut identifier

F à $T_{x_0}F$ via l'aplication exponentielle. Soit W le groupe des éléments de G qui stabilisent F quotienté par le groupe des éléments qui fixent tous les points de F. C'est un groupe discret, appelé groupe de Weyl, qui agit sur F. Soit Σ l'espace des racines de G, qui sont un ensemble fini de formes linéaires sus F. Il est posible de choisir un ensemble de famille de racines positives Σ^+ de sorte que le cône sur lequel toutes ces racines sont positives qui est un domaine fondamental pour l'action de W.

Définition 3.6 *Soit Γ un groupe finiement engendré, et S un système fini symétrique de générateurs. Une représentation $\rho : \Gamma \to G$ est dite* Δ-Anosov *où $\Delta \subset \Sigma^+$ si pour tout $\alpha \in \Delta$ il existe $c, D > 0$ tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$:*

$$\alpha(\rho(\gamma) \cdot x_0, x_0) > c|g|_S - D.$$

Il s'avère que si un groupe Γ est Δ-Anosov pour $\Delta \subset \Sigma^+$ non vide, alors Γ est nécessairement hyperbolique.

L'espace X est une variété de Hadamard, donc il est possible de définir son bord visuel comme l'espace des rayons géodésiques $\gamma : \mathbb{R}^+ \to X$ où deux rayons sont identifiés s'ils sont à distance bornée [5]. Soit $\Delta \subset \Sigma^+$, on note P_Δ le sous-groupe parabolique de G associé à Δ. Ce groupe peut être vu comme le groupe des éléments qui fixent le bord à l'infini $\partial_{\mathrm{vis}}C$ de la chambre de Weyl dans le bord à l'infini $\partial_{\mathrm{vis}}X$. Dans le cas où $G = PSL_n(\mathbb{R})$, le groupe P_{α_k} est le stabilisateur d'une espace de dimention k dans $\mathbb{R}^n$. Tout comme les représentations convexes cocompactes induisaient une application de bord, les représentations Anosov induisent une ou plusieurs applications de bord.

Théorème 3.4 *Soit $\rho : \Gamma \to G$ une représentation Δ-Anosov. Alors il existe une unique application de bord $\xi_\rho^\Delta : \partial\Gamma \to G/P_\Delta$ équivariante et continue telle que si $\gamma \in \partial\Gamma$ a un unique point fixe attractif $\gamma^+ \in \partial\Gamma$, alors ξ_ρ^Δ est l'unique point fixe attractif de $\rho(\gamma)$ dans G/P_Δ.*

En particulier si $\rho : \Gamma \to PSL_n(\mathbb{R})$ est $\{k\}$-Anosov pour $1 \leq k \leq n-1$, alors on peut associer à ρ une application de bord $\xi_\rho^k : \partial\Gamma \to Grass_k(\mathbb{R}^n)$ où $Grass_k(\mathbb{R}^n)$ est la grassmanienne des k-sous espaces de $\mathbb{R}^n$.

Idée de la preuve: Considérons le cas où $G = PSL_n(\mathbb{R})$. Étant donné un élément $\gamma \in \Gamma_g$, il existe deux matrices orthogonales O, O' telles que $O\rho(\gamma)O'^{-1}$ soit diagonale dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ avec des coefficients diagonaux strctement positifs rangés dans l'ordre décroissant. On va définir $\Xi(g)$ comme étant $O(e_1, \cdots, e_k)$. Cette application peut être définie de plusieurs manières si la matrice $\rho(g)$ a ses k et $k+1$-ièmes valeurs singulières égales. Cependant si ρ est k-Anosov elle est bien définie pour $\gamma \in \Gamma$ assez loin de l'identité.

On peut munir $\mathrm{Grass}_k(\mathbb{R}^n)$ d'une métrique qui dépend d'un choix de produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour cette métrique on peut montrer que pour une suite d'éléments (γ_n) qui converge vers $x \in \partial\Gamma$, la suite $\Xi(\gamma_n)$ est de Cauchy. On prolonge l'application Ξ au bord pour obtenir une application continue et équivariante.

L'unicité de cette application est due au fait que les points fixes attractifs des éléments de Γ and $\partial\Gamma$ forment un sous-ensemble dense de Γ.

$\square$

Cette définition relativement simple des représentations Anosov n'est pas la définition initialement proposée par F.Labourie [16]. Cette définition s'inspire de la notion de flot Anosov, et en particulier du fait que le flot géodésique sur une surface hyperbolique est Anosov. Il définit cette notion pour les groupes de surface, et cette définition fut ensuite étendue aux groupes hyperboliques par O.Guichard et A.Wienhard [7].

Définition 3.7 *Soit $\rho : \Gamma_g \to PSL_n(\mathbb{R})$ une représentation pour $g \geq 2$. On munit la surface de genre g d'une métrique hyperbolique g. Soit $p : E^\rho \to T^1 S_g$ le fibré plat sur le fibré unitaire tangeant $T^1 S_g$ associé à ρ qui peut être défini comme le quotient du fibré trivial $\mathbb{R}^n \times T^1 \tilde{S}_g$ par l'action de Γ définie par $\gamma \cdot (x,p) = (\rho(\gamma) \cdot x, \gamma \cdot p)$ pour $\gamma \in \Gamma_g$, où l'action de $\Gamma_g = \pi_1(S_g)$ sur $T^1 \tilde{S}_g$ est l'action par transformations de Decke. Le fibré E_ρ est muni de la connection plate ∇ héritée du fibré trivial $\mathbb{R}^n \times \tilde{S}_g$. Cette connexion permet de définir pour $t \in \mathbb{R}$ et $v \in T^1 S_g$ une application linaire $\Phi^t_v : E^\rho_v \to E^\rho_{\phi^t(v)}$, où ϕ^t est le flot géodésique.*

*La représentation ρ est $\{k\}$-*Anosov *si et seulement si il existe une décomposition $E^\rho = E^+ \oplus E^-$ invariante le long du flot géodésique sur $T^1 S_g$ où E^+ est un fibré de rang k, telle que E^+ est dilaté le long du flot géodésique et E^- est contracté, i.e il existe $C, a > 0$ et un choix continu de normes $|| \cdot ||_v$ sur E^ρ_v tels que pour tous $v \in T^1 S_g$ et $t \in \mathbb{R}$:*

$$||\Phi^t_{v|E^+}||_{op} \geq \frac{1}{C} e^{at}.$$
$$||\Phi^t_{v|E^-}||_{op} \leq C e^{-at}.$$

Une propriété cruciale de l'espace des représentations Δ-Anosov est le fait suivant, qui se démontre plus aisément en utilisant la définition initiale de F. Labourie.

Théorème 3.5 *Soit G un groupe de Lie semi simple de type non compact et Γ un groupe finiement engendré. Soit Δ un ensemble de racines positives de G. L'espace des représentation Δ-Anosov est ouvert dans Hom(Γ, G), pour la topologie de la convergence simlple.*

4 Représentations Hitchin, représentations maximales.

Dans cette section on considèrera Γ le groupe fondamental d'une surface de genre $g \geq 2$. La composante de Hitchin a été introduite en 1992, en utilisant un outil analytique : les fibrés de Higgs. Cette technique consiste à faire correspondre à chaque représentation semi-simple un certain fibré holomorphe sur la surface S, ayant au préalable fixé une structure complexe. Une caractérisation des représentations de la composante de Hitchin a été démontrée par F. Labourie et O. Guichard. Nous allons ici la définir et citer quelques une de ces propriétés dans le cas où $G = PSL_n(\mathbb{R})$, mais la composante de Hitchin peut être définie pour n'importe qul groupe de Lie semi-simple qui est une forme réelle scindée d'un groupe de Lie semi-simple complexe.

Définition 4.1 *Soit η l'unique représentation irréductible de $PSL_2(\mathbb{R})$ dans $PSL_n(\mathbb{R})$. Une représentation $\rho : \Gamma :\to PSL_n(\mathbb{R})$ est dite n-*fuchsienne *si elle peut s'écrire $\eta \circ \rho_0$ pour une certaine représentation fuchsienne ρ_0.*

Une représentation $\rho : \Gamma :\to PSL_n(\mathbb{R})$ est dite Hitchin si elle appartient à la même composante connexe de l'espace des représentations qu'une représentation n-fuchsienne.

Une propriété remarquable de l'espace des représentations Hitchin est le résultat suivant, démontré par N.Hitchin à l'aide de fibrés de Higgs.

Théorème 4.1 *L'espace des représentations Hitchin ne contient que des représentations irréductibles. Chacune de ses composantes connexes est homéomorphe à* $\mathbb{R}^{3(n^2-n)}$.

Ces représentations ont également été étudiés d'un poin de vue plus géométrique. En particulier F.Labourie et O.Guichard on montré la caractérisation suivante des représentations Hitchin [16] [9].

Théorème 4.2 *Soit* ρ *une représentation Hitchin, alors* ρ *est Borel Anosov. De plus* ρ *est hyperconvexe, c'est à dire que si* $x_1, \cdots, x_k \in \partial\Gamma$ *sont des points distincts, et* $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ *sont tels que* $n_1 + \cdots + n_k \leq n$ *alors la somme d'espaces :*

$$\xi_\rho^{n_1}(x_1) \oplus \ \xi_\rho^{n_2}(x_2) \oplus \cdots \oplus \xi_\rho^{n_k}(x_k)$$

est directe.

Réciproquement si il existe $\rho : \Gamma \to PSL_n(\mathbb{R})$ *est une représentation telle qu'il existe un application* Γ*-équivariante et continue* $\xi : \partial\Gamma \to \mathbb{RP}^{n-1}$ *qui soit hyperconvexe, i.e telle que pour tous* $x_1, \cdots, x_n \in \partial\Gamma$ *distincts :*

$$\xi(x_1) \oplus \ \xi(x_2) \oplus \cdots \oplus \xi(x_n) = \mathbb{R}^n$$

alors ρ *est Hitchin, en en particulier Borel Anosov.*

La composante de Hitchin est composée de représentation qui satisfont une certaine notion de positivité [8].

Définition 4.2 *Un triplet* $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ *de drapeaux complets transverse deux à deux dans* $\mathbb{R}^n$ *est dit* positif *si il existe un endomorphisme* A *tel que* $A \cdot \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1$ *et* $A \cdot \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$ *qui dans une base adaptée à* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *est une matrice totallement positive, i.e tous les mineurs de* A *obtenus en choisissant des lignes* $a_1 \leq \cdots \leq a_k$ *et des colonnes* $b_1 \leq \cdots \leq b_k$ *telles que* $a_i \leq b_i$ *pour tout* $\leq i \leq k$ *sont strictement positifs.*

Théorème 4.3 *Une représentation* $\rho : \Gamma_g \to PSl_n(\mathbb{R})$ *est* Hitchin *si et seulement si il existe une application continue et* Γ*-équivariante* $\xi : \partial\Gamma \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *dans l'espace des drapeaux complets de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $x, y, z \in \partial\Gamma$, $(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y), \mathcal{F}(z))$ *soit positif.*

En particulier la composante de Hitchin est un espace de Teichmüller généralisé : c'est une composante connexe de l'espace des représentations ne comportant que des représentations discrètes et fidèles.

Un autre espace de Teichmüller généralisé est l'espace des représentations maximales [2]. Cet espace peut être définit pour les groupes de Lie de type Hermitiens, c'est à dire les groupes de Lie semi-simples G dont l'espace symétrique admet une structure Hermitienne G-invariante, ces groupes sont par exemple les groupes $PSp_{2n}(\mathbb{R})$ pour $n \geq 1$. On peut définir pour ces groupes et pour une représentation $\rho : \Gamma_g \to G$ un invariant appellé invariant de Toledo. Cette invariant peut prendre un nombre fini de valeurs réelles. Les représentations pour lesquelles cet invariant est maximal sont dites maximales.

Les représentations maximales peuvent également être caractérisées par une certaine notion de positivité. Soit $\mathbb{R}^{2n}$ pour $n \geq 1$ muni d'une forme symplectique ω, I.E une forme bilinéaire non dégénérée anti-symétrique. Un lagrangien pour ω est un sous espace de dimention n de $\mathbb{R}^{2n}$ sur lequel ω est nul. Deux lagrangiens ℓ_1, ℓ_2 sont dits transverses si $\ell_1 \cap \ell_2 = \{0\}$. etant donné trois lagrangiens transverses ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, il existe une unique application $u : \ell_1 \to \ell_3$ telle que ℓ_2 soit le graphe de u. On peut alors définir la forme bilinéaire symétrique sur ℓ_1 suivant $q(v,w) = \omega(v, u(w))$ pour $u, v \in \ell_1$ qui est symétrique car ℓ_2 est un lagrangien.

Définition 4.3 *L'*indice de Maslov *de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la signature de q. Si cet indice est égal à n ou $-n$, on dit que ce triplet est* positif.

Théorème 4.4 *Une représentation $\rho : \Gamma_g \to PSp(2n, \mathbb{R})$ est maximale si et seulemetn si elle est Borel anosov et si pour tous triplets de point distincts $x, y, z \in \partial\Gamma$, le triplet de lagrangiens transverse $(\xi^n_\rho(x), \xi^n_\rho(y), \xi^n_\rho(z))$ est positif.*

L'espace des représentations maximales forme une union de composante connexe de l'espace des représentations : c'est un autre espace de Teichmüller généralisé.

Il est possible de considérer la composante de Hitchin et l'espace des représentations maximales comme deux cas particulier de représentations positives. Il existe d'autres exemples de représentations positives construites dans [8], pour le groupe de Lie $SO(p,q)$ pour $p < q$.

5 Travaux en cours et questions ouvertes.

Représentations Borel Anosov.

Il est naturel de se demander quelles différentes représentations Anosov existent. On peut se demander quels groupes hyperboliques admettent des représentations Anosov. Un résultat de K. Tsouvalas [20] montre que si un groupe Γ admet une représentation $\{n\}$-Anosov dans $PSL_{2n}(\mathbb{R})$ pour n impair, alors à Γ continent un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe de surface ou un groupe libre.

Une autre question qu'il est possible de se poser est la suivante : quelles sont les représentations Borel-Anosov d'un groupe de surface par exemple dans $PSp(2n, \mathbb{R})$? Les seuls exemples connus sont les représentations Hitchin dont l'image est incluse dans $PSp(2n, \mathbb{R})$. En utilisant des propriétés de régularité de l'application de bord ξ_ρ d'une représentation Anosov satisfaisant certaines propriétés supplémentaire d'hyperconvexité [18], j'ai pu montrer que dans $PSp(4, \mathbb{R})$, une représentation maximale et Borel Anosov est nécessairement hyperconvexe, et donc Hitchin.

Domaines de discontinuité.

Une question qui n'est pas encore complètement résolue consite à comprendre comment les espaces de Teichmüller généralisés peuvent être vus comme un espace de structures complexes généralisées, ou comme un espace de (G, X)-structures. La première question est étudiée par A.Thomas et V.Fock, qui ont défini une notion de structure complexe généralisée, dont l'espace des modules peut conjecturellement être identifié à l'espace des représentations Hitchin.

Dans [7], O.Guichard et A.Wienhard ont démontré que l'espace des représentations Hitchin peut identifié avec un certaines composantes connexes de l'espace des structures projectives sur une variété compacte M. Pour montrer cela, ils ont construit des domaines de discontinuités associés au représentations Hitchin dans des variétés de drapeaux et en particulier dans l'espace projectif, c'est à dire des domaines sur lesquels la représentationa agit proprement discontinuement et de manière cocompacte. Un exemple de cette construction est le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Soit Γ un groupe hyperbolique finiement engendré et soit $\rho : \Gamma \to PSL_{2n}(\mathbb{R})$ une représentation $\{n\}$-Anosov. Le domaine suivant :*

$$\Omega_\rho = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2n}) \setminus \bigcup_{x \in \partial\Gamma} \{\ell | \ell \subset \xi^n_\rho(x)\}$$

est $\rho(\Gamma)$-invariant, et $\rho(\Gamma)$ agit proprement discontinuement et cocompactement sur ce domaine.

La variété M est le quotient $\Omega_\rho/\rho(\Gamma)$ dans $\mathbb{RP}^{n-1}$ associé à une représentation Hitchin ρ. En utilisant le principe d'Ehresman-Thurston [1], on peut démontrer que la topologie de M de dépend pas localement de la représentation ρ choisie. Une question se pase alors : quelle est la topologie de la variété M ?

Mon travail de mémoire de master a été de trouver une méthode géométrique pour comprendre la topologie de M. Pour cela il suffit de considérer le quotient du domaine de discontinuité d'une représentation fuchsienne dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Dans un article en préparation [4] avec D. Alessandrini et Q. Li nous montrons le résultat suivant.

Théorème 5.2 *Soit $\rho : \Gamma_g \to PSL_{2n}(\mathbb{R})$ une représentation n-fuchsienne. La variété $M = \Omega_\rho/\rho(\Gamma)$ est un fibré prinncipal au dessus de la surface S, dont la fibre est l'espace homogène $O(n)/(O(n-2) \times O(1))$ muni d'une action du groupe $O(n) \times O(2)$.*

Je travaille à présent à une construction plus générale permettant de montrer que certains de ces domaines de discontinuité fibrent au dessus du plan hyperbolique, toujours pour des représentations très particulières. De nombreux domaines ont été construits par Kapovitch, Leeb et Porti [14]. Ces domaines de disconinuité sont des ouverts de variétés de drapeaux, qui peuvent être vue comme certains sous ensemble du bord visuel de l'espace symétrique associé à G.

Soit G un groupe de Lie semi-simple de type non-compact. Soit $\rho : \Gamma_g \to G$ une représentation qui préserve une surface totalement géodésique $\mathbf{H} \subset X$ de l'espace symétrique associé à G, sur laquelle Γ_g agit proprement. Soit $a \in \partial_{\text{vis}}\mathbf{H}$, en particulier ρ est Δ-Anosov où Δ est tel quele stabilisateur de a est conjugé à P_Δ.

Etant donné deux éléments $c, d \in \partial_{\text{vis}}X$, on peut définir leur angle de Tits, qui est l'angle qu'ils formetn dans n'importe que sous espace plat maximal contenant a et b dans leur bord à l'infini. Soit $b \in \partial_{\text{vis}}X$ tel qu'il n'existe pas d'élément $g \in G$ satisfaisant $\measuredangle_{\text{Tits}}(g \cdot b, a) = \frac{\pi}{2}$. Par la construction de Kapocitch Leeb Porti le domaine suivant est un domaine de discontinuité pour l'action de ρ, qui ne dépend que de l'orbite de a et b par G :

$$\Omega^{a,b}_\rho = G \cdot b \setminus \bigcup_{x \in \partial\Gamma} \{b' | \measuredangle_{\text{Tits}}(b', \xi^a_\rho(x)) \leq \frac{\pi}{2}\}$$

où $\xi^a_\rho : \partial\Gamma \to G.a$ est l'application de bord associée à la représentation Anosov ρ.

Théorème 5.3 *Le domaine $\Omega^{a,b}_\rho$ pour ces représentations ρ particulières fibre au dessus de $\mathbf{H}$ d'une manière $\rho(\Gamma)$-équivariante. En particulier le quotient $\Omega^{a,b}_\rho/\rho(\Gamma)$ est un fibré au dessus de la surface S_g.*

Lorsqu'une représentation préserve une surface totallement géodésique **H**, et agit transitivemen dessus, alors il est possible de montrer que les domaines de discontinuité obtenus par certains épaissisement métriques fibrent au dessus de **H**, d'une manière Γ-équivariante, en considérant une projection orthogonale sur H de points du bord visuel de X. Il est en effet possible de définir une telle projection en utilisant la notion de fonction de Busemann qui sont définies sur les variétés de Hadamard donc en particulier sur les espaces symétriques de type non-compact [15].

Références

[1] Nicolas Bergeron and Tsachik Gelander. A note on local rigidity, 2017.

[2] M. Burger, A. Iozzi, F. Labourie, and Anna Wienhard. Maximal representations of surface groups : Symplectic anosov structures. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 1 :543–589, 2005.

[3] Marc Burger, Alessandra Iozzi, and Anna Wienhard. Surface group representations with maximal Toledo invariant. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(5) :387–390, 2003.

[4] Alessandrini D., Davalo C., and Li Q. Projective structures with (quasi-)Hitchin holonomy. in preparation.

[5] Patrick B. Eberlein. *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds.* Chicago Lectures in Mathematics, 1997.

[6] M. Gromov. *Hyperbolic Groups*, pages 75–263. Springer New York, New York, NY, 1987.

[7] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Domains of discontinuity for surface groups. *Comptes Rendus Mathematique*, 347(17) :1057–1060, 2009.

[8] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Positivity and higher teichmüller theory, 2018.

[9] Olivier Y. Guichard. Composantes de hitchin et représentations hyperconvexes de groupes de surface. *Journal of Differential Geometry*, 80 :391–431, 2008.

[10] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[11] N.J. Hitchin. Lie groups and teichmüller space. *Topology*, 31(3) :449–473, 1992.

[12] J. HOWIE. de la harpe, p. topics in geometric group theory (university of chicago press, 2000), vi 310 pp., 0 226 31721 8 (paperback), £13.00, 0 226 31719 6 (hardback), £28.50. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 47(3) :754–756, 2004.

[13] Michael Kapovich, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Anosov subgroups : Dynamical and geometric characterizations, 2017.

[14] Michael Kapovich, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness. *Geometry & Topology*, 22(1) :157 – 234, 2018.

[15] Misha Kapovich, Bernhard Leeb, and John J. Millson. Convex functions on symmetric spaces, side lengths of polygons and stability inequalities for weighted configurations at infinity. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0311486, November 2003.

[16] Francois Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones mathematicae*, 165, 02 2004.

[17] Bruno Martelli. An introduction to geometric topology, 2016.

[18] Beatrice Pozzetti, Andrés Sambarino, and Anna Wienhard. Conformality for a robust class of non-conformal attractors, 2020.

[19] William P. Thurston. Three-dimensional geometry and topology. (Accessed May 10, 2021).

[20] Konstantinos Tsouvalas. On borel anosov representations in even dimensions, 2019.

[21] Anna Wienhard. An invitation to higher teichmüller theory, 2018.