Introduction à un domaine de recherche: Des résultats récents sur l'étude de l'obstruction de Brauer-Manin

Manh-Linh Nguyen

25 mai 2021

1 Introduction

Étant donné un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement dans un *corps de nombres* k, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$), il est naturel de demander s'il possède des solutions dans k ; c'est un problème arithmétique très ancien. Géométriquement, c'est la question de décider si une variété algébrique X définie sur k a des points k-rationnels. Il est à noter que le théorème de Matiyasevich–Robinson–Davis–Putnam affirme qu'il n'existe pas d'algorithme général qui permet de décider l'existence des points *entiers*, ce qui donne une réponse négative au dixième problème de Hilbert [Mat93].

Une *valeur absolue* sur k est une fonction $|\cdot| : k \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ qui satisfait les conditions suivantes.

(i) Pour tout $x \in k$, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(ii) Pour tous $x, y \in k$, $|xy| = |x||y|$.

(iii) Pour tous $x, y \in k$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Par exemple, la valeur absolue *triviale* $|\cdot|_{\mathrm{triv}}$ sur k est donnée par $|0|_{\mathrm{triv}} = 0$ et $|x|_{\mathrm{triv}} = 1$ pour tout $x \in k^\times$. Une valeur absolue $|\cdot|$ sur k définit une distance (à savoir $(x, y) \mapsto |x - y|$), en particulier une topologie sur k. Deux valeurs absolues $|\cdot|'$ et $|\cdot|$ sur k sont dites *équivalentes* si elles définissent la même topologie ; cela équivaut à demander qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $|x|' = |x|^c$ pour tout $x \in k$. Une *place* de k est une classe d'équivalence de valeurs absolues *non triviales* sur k.

Notons Ω l'ensemble des places de k. Si $v \in \Omega$, on note k_v le complété de k par rapport à n'importe quelle valeur absolue qui représente v. Le corps k_v est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, soit un corps p-adique (*i.e.* une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) (Ostrowski). Soit X une variété algébrique définie sur k. Une condition nécessaire évidente pour que $X(k) \neq \varnothing$ est que $\prod_{v\in\Omega} X(k_v) \neq \varnothing$. Les méthodes analytiques et p-adiques permettent de décider sans peine si $X(k_v) \neq \varnothing$. Si cette condition-là est aussi suffisante, on dit que X vérifie le *principe local-global* ou *principe de Hasse*. Par exemple, c'est le cas pour les quadriques (Hasse-Minkowski) et les torseurs sous les groupes algébriques simplement connexes (Kneser-Harder-Chernousov). Le problème de décider si $X(k) \neq \varnothing$ est difficile puisque le principe de Hasse n'est pas toujours vérifié : Selmer a donné des contre-exemples pour les surfaces cubiques.

Quand X a des points k-rationnels, on demande si elle en a beaucoup. Par exemple, voyant $X(k)$ comme un sous-ensemble de $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ par le plongement diagonal, on veut savoir si $X(k)$ est dense dans $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ (munie de la topologie produit des topologies analytiques) - c'est la question sur la validité de l'*approximation faible*. Par exemple, les espaces affines vérifient l'approximation faible (Artin-Whaples). Le principe de Hasse et l'approximation faible sont des problèmes fondamentaux sur l'arithmétique d'une variété définie sur un corps de nombres.

2 Groupe de Brauer et l'obstruction de Brauer-Manin

Manin [Man71] a été introduit une obstruction cohomologique utile au principe de Hasse et à l'approximation faible, à savoir l'*obstruction de Brauer-Manin*, qui porte sur le *groupe de Brauer*. Rappelons que le groupe de Brauer d'un corps k est le deuxième groupe de cohomologie galoisienne $\mathrm{Br}(k) := \mathrm{H}^2(k, \overline{k}^\times)$ (où $\overline{k}$ désigne une clôture *séparable* fixée de k). On a $\mathrm{Br}(k) = 0$ si k est séparablement clos ou fini (Wedderburn). Comme $\mathrm{Br}(k)$ classifie les k-algèbres à division centrales, on a $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si k est un corps p-adique, la théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme (appelé *invariant local*) $\mathrm{Br}(k) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si k est un corps de nombres, on dispose pour toute place $v \in \Omega$ de k un plongement $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; c'est l'invariant local si v est une place finie, l'inclusion $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \simeq \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si v est une place archimédienne réelle, et nul si v est une place archimédienne complexe. D'après la théorie du corps de classes global, la suite

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \bigoplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(k_v) \xrightarrow{\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{2.1}$$

est exacte (Albert-Brauer-Hasse-Noether).

Plus généralement, le *groupe de Brauer (cohomologique)* d'un schéma X est par définition $\mathrm{Br}(X) := \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ (toutes les cohomologies dans ce texte seront la cohomologie étale où la cohomologie galoisienne). Supposons que X est une variété lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Notant $\mathbb{A}_k$ l'anneau des adèles de k (de sorte que $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k) \subseteq \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$), on dispose de l'*accouplement de Brauer-Manin adélique*

$$\langle -, - \rangle_{\mathrm{BM}} : \mathrm{Br}(X) \times X(\mathbb{A}_k), \qquad (\alpha, (x_v)_{v\in\Omega}) \mapsto \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(\alpha(x_v)) \tag{2.2}$$

(un argument de bonne réduction montre que la somme de (2.2) a bien un sens). Si $A \subseteq \mathrm{Br}(X)$, on note $X(\mathbb{A}_k)^A$ l'ensemble des familles $(x_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbb{A}_k)$ orthogonales à α par rapport à l'accouplement (2.2). Par continuité, $X(\mathbb{A}_k)^A$ est fermé dans $X(\mathbb{A}_k)$.

Supposons X propre (alors $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$). Notons $\overline{X(k)}$ l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)$. Alors $\overline{X(k)} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ en vertu de (2.1). Si $(x_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbb{A}_k)$ est une famille de points locaux telle qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ avec $\langle \alpha, (x_v)_{v\in\Omega} \rangle \neq 0$, alors $(x_v)_{v\in\Omega}$ ne peut pas être approchée par des points rationnels de X ; c'est *l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible*. Si un tel α existe pour toute famille $(x_v)_{v\in\Omega}$, alors $X(k) \neq \varnothing$; c'est *l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse.*

Définition. On dit que l'*obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour* X si $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$. Si $\mathscr{C}$ est une classe de variétés propres, lisses et géométriquement irréductibles sur k, on dit que l'*obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour* $\mathscr{C}$ si pour toute $X \in \mathscr{C}$, $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \varnothing$ entraîne $X(k) \neq \varnothing$.

Il est également possible de définir une version de l'accouplement (2.2) pour les *zéro-cycles*, c'est-à-dire les sommes formelles de points *fermés*. Si X est une variété sur un corps k, $x \in X$ est un point fermé et $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, on note $\langle \alpha, x \rangle := \mathrm{Cor}(\alpha(x))$ (ici $\alpha(x) \in \mathrm{Br}(k(x))$ et $\mathrm{Cor} : \mathrm{Br}(k(x)) \to \mathrm{Br}(k)$ est la corestriction de la cohomologie galoisienne). On obtient par linéarité un accouplement $\langle -, - \rangle : \mathrm{Br}(X) \times \mathrm{Z}_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$, où $\mathrm{Z}_0(X)$ désigne le groupe des zéro-cycles sur X. Notons $\mathrm{CH}_0(X)$ le quotient de $\mathrm{Z}_0(X)$ par équivalence rationnelle (le *groupe de Chow de* X). Si X est propre, l'accouplement ci-dessus induit un accouplement $\langle -, - \rangle : \mathrm{Br}(X) \times \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$.

3 La conjecture de Colliot-Thélène et des cas connus

Une variété X projective et lisse sur un corps k de caractéristique nulle est dite *rationnellement connexe* si deux points généraux de $X_{\overline{k}} = X \times_k \overline{k}$ peuvent être reliés par une courbe $\mathbb{P}^1_{\overline{k}} \to X_{\overline{k}}$ [Kol96]. C'est notamment le cas si X est géométriquement unirationnelle.

L'étude des points rationnels des variétés sur un corps de nombres k est gouvernée par la conjecture très générale suivante.

Conjecture A (Colliot-Thélène). *Soit X une variété propre, lisse et rationnellement connexe sur k. Alors l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X.*

Un cas particulièrement intéressant de la conjecture A est celui où X est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur k ; *grosso modo* c'est une variété V tel que $V_{\overline{k}}$ soit isomorphe au quotient (au sens variétés) de $G_{\overline{k}}$ par un sous-groupe $\Gamma \subseteq G(\overline{k})$ (le *stabilisateur géométrique*). Dans ce cas, X est géométriquement unirationnelle. Borovoi [Bor96] a établi la conjecture A dans le cas où Γ est connexe. Le travail de Demarche et Lucchini Arteche [DLA19] permet de ramener le cas général au cas où $G = \mathrm{SL}_n$ et où Γ est fini ; c'est donc le cas le plus difficile. Dans le même article, Borovoi a également résolu le cas où Γ est fini abélien. Récemment, Harpaz et Wittenberg ont établi le

Théorème A. *Le conjecture A vaut si X est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire semi-simple simplement connexe, à stabilisateur géométrique fini* hyper-résoluble *(en tant que groupe fini muni d'une* action extérieure *de* $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$*).*

Cependant, la réponse dans le cas où Γ est fini résoluble (en tant que groupe fini abstrait) reste conditionnelle [HW20].

Remarque. La validité de la conjecture A dans le cas où X est une compactification lisse de SL_n/G, où $G \subseteq \mathrm{SL}_n(k)$ est un sous-groupe fini constant, donnerait une réponse positive au problème de Galois inverse pour G sur k [Har07, § 4].

La conjecture A possède un analogue pour le groupe de Chow des zéro-cycles. Soit alors X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k. Pour toute place $v \in \Omega$, on a vue qu'il y a un accouplement local $\langle -, - \rangle_v : \mathrm{Br}(X_{k_v}) \times \mathrm{CH}_0(X_{k_v}) \to \mathrm{Br}(k_v) \xrightarrow{\mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si v est archimédienne, on peut remplacer $\mathrm{CH}_0(X_{k_v})$ par le quotient $\mathrm{CH}'_0(X_{k_v}) := \mathrm{CH}_0(X_{k_v})/\mathrm{N}_{\overline{k_v}|k_v}(\mathrm{CH}_0(X_{\overline{k_v}}))$ (par nullité de $\mathrm{Br}(k_v)$ et fonctorialité de $\langle -, - \rangle_v$). Notant $\mathrm{CH}_{0,\mathbb{A}}(X) := \prod_{v \in \Omega_f} \mathrm{CH}_0(X_{k_v}) \times \prod_{v \in \Omega_\infty} \mathrm{CH}'_0(X_{k_v})$, on dispose d'un accouplement $\langle -, - \rangle : \mathrm{Br}(X) \times \mathrm{CH}_{0,\mathbb{A}}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, d'où un morphisme

$$\mathrm{CH}_{0,\mathbb{A}}(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

En vertu de (2.1), la suite

$$\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_{0,\mathbb{A}}(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \qquad (\mathrm{E}_0)$$

est un complexe. Appliquant le foncteur $(-)^\wedge : M \mapsto \varprojlim_n (M/nM)$, on obtient un complexe

$$\mathrm{CH}_0(X)^\wedge \to \mathrm{CH}_{0,\mathbb{A}}(X)^\wedge \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \qquad (\mathrm{E})$$

Conjecture (E) (Colliot-Thélène, Sansuc, Kato et Saito). *Le complexe* (E) *est exact.*

Remarque. Si X est rationnellement connexe, l'exactitude de (E) équivaut à celle de (E_0) [HW20, Rappel 1.3]. En particulier, on obtient la conjecture (E) pour $X = \operatorname{Spec} k$ en appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ à (2.1).

Liang [Lia13] a montré que la validité de la conjecture A sur toutes les extensions finies de k implique celle de la conjecture (E) sur k. En particulier, la conjecture (E) est vraie si X est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G à stabilisateur géométrique l'un des groupes que Borovoi a traités (soit connexe, soit fini abélien).

Nous discutons dans ce texte la méthode d'Harpaz et Wittenberg, qui s'applique à la démonstration du théorème A. Dans le cadre des zéro-cycles, elle permet d'établir un résultat sans aucune hypothèse sur le stabilisateur géométrique.

Théorème B. *La conjecture* (E) *vaut si* X *est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe.*

4 La méthode d'Harpaz et Wittenberg

4.1 Théorie de la descente

La théorie de la descente a été originellement dévéloppée par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87]. Soient k un corps de charactéristique nulle et S un *k-groupe de type multiplicatif* (c'est-à-dire que son module de caractères $\widehat{S} = \operatorname{Hom}_k(S, \overline{k}^\times)$ est un Γ_k-module discret de type fini, où $\Gamma_k = \operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$). Un tel groupe est commutatif et affine sur k. Soit X une k-variété lisse et géométriquement irréductible. Un morphisme fppf : $f : Y \to X$ est appelé *torseur* sous S si Y est munie d'une X-action de S telle que $Y \simeq X \times_k S$ (au-dessus de X) localement pour la topologie étale. Les X-torseurs sous S sont classifiés par le premier groupe de cohomologie étale $\mathrm{H}^1(X, S)$. Le torseur $f_{\overline{k}} : Y_{\overline{K}} \to X_{\overline{k}}$ sous $S_{\overline{k}}$ correspond alors à une classe $[f_{\overline{k}}] \in \mathrm{H}^1(X_{\overline{k}}, S_{\overline{k}})^{\Gamma_k}$. Le morphisme

$$\widehat{S} = \operatorname{Hom}_{\overline{k}-\mathrm{grp}}(S_{\overline{k}}, \mathbb{G}_m) \to \operatorname{Pic}(X_{\overline{k}}), \qquad \chi \mapsto \chi_*[f_{\overline{k}}].$$

de Γ_k-modules (où $\chi_* : \mathrm{H}^1(X_{\overline{k}}, S_{\overline{k}}) \to \mathrm{H}^1(X_{\overline{k}}, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic}(X_{\overline{k}})$) est appelé *type* de f. On dit que f est un *torseur universel* si son type est un isomorphisme.

Notons $\operatorname{Br}_1(X) := \operatorname{Ker}(\operatorname{Br}(X) \to \operatorname{Br}(X_{\overline{k}}))$ et $r : \operatorname{Br}_1(X) \to \mathrm{H}^1(k, \operatorname{Pic}(X_{\overline{k}}))$ le morphisme issu de la suite spectrale de Hochschild-Serre $\mathrm{H}^p(k, \mathrm{H}^q(X_{\overline{k}}, S_{\overline{k}})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X, S)$. Si $\lambda : \widehat{S} \to \operatorname{Pic}(X_{\overline{k}})$ est un morphisme de Γ_k-modules, on notera $\operatorname{Br}_\lambda(X) := r^{-1}(\lambda_*(\mathrm{H}^1(k, \widehat{S})) \subseteq \operatorname{Br}_1(X)$. La théorie de la descente classique [CTS87] implique que si k est un corps de nombres et si $\overline{k}[X]^\times = \overline{k}^\times$, on a

$$X(\mathbb{A}_k)^{\operatorname{Br}_\lambda(X)} = \bigcup f(Y(\mathbb{A}_k)), \tag{4.1}$$

où la réunion parcourt les torseurs $f : Y \to X$ sous S de type λ (voir aussi [Sko01, § 6.1]). Remarquons que sous la condition $\overline{k}[X]^\times = \overline{k}^\times$, on a un isomorphisme $\mathrm{H}^1(X_{\overline{k}}, S_{\overline{k}}) \simeq \operatorname{Hom}(\widehat{S}, \operatorname{Pic}(X_{\overline{k}}))$, qui à chaque $X_{\overline{k}}$-torseur sous $S_{\overline{k}}$ associe son type.

En particulier, considérons le cas où $S = T$ est un *k-tore* (c'est-à-dire que $T_{\overline{k}} \simeq (\overline{k}^\times)^{\dim T}$, ou de manière équivalente, que $\widehat{T}$ est sans torsion) et où X est propre. Si $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, T)$, on note $f^\sigma : Y^\sigma \to X$ le torseur sous T tel que $[f^\sigma] = [f] + p^*[\sigma]$ dans $\mathrm{H}^1(k, T)$, où $p : X \to \operatorname{Spec} k$ désigne le morphisme structural. On a une identification $\mathrm{H}^1(k,T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(X,T) \to \mathrm{H}^1(X_{\overline{k}}, T_{\overline{k}}))$, tirée de la suite spectrale de Hochschild-Serre. D'où

$$X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(X)} \subseteq \bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,T)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)). \tag{4.2}$$

Si X est géométriquement rationnelle, alors $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_1(X)$ (Br_1 est appelé le groupe de Brauer *algébrique*) et l'on peut montrer que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(Y^\sigma) = \mathrm{Br}_0(Y^\sigma) := \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Y^\sigma))$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k,T)$, où $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(Y^\sigma) \subseteq \mathrm{Br}(Y^\sigma)$ désigne le groupe de Brauer *non ramifié* de Y^σ, c'est-à-dire le groupe de Brauer d'une compactification lisse de Y^σ. Rappelons aussi que l'accouplement (2.2) s'annule sur $\mathrm{Br}_0(Y^\sigma)$ grâce à (2.1). Il s'ensuit que $Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(Y^\sigma)} = Y^\sigma(\mathbb{A}_k)$ et donc (4.2) permet de ramener la conjecture A pour X à la même conjecture pour les compactifications lisses des Y^σ.

En revanche, si X est seulement supposée rationnellement connexe, la théorie de la descente classique ne s'applique plus. La première innovation d'Harpaz et Wittenberg est d'étendre cette théorie de sorte qu'elle rend possible d'une telle réduction. Ils ont mis notamment les classes éventuellement *transcendantes* de $\mathrm{Br}(X)$ en considération. Leur résultat est le

Théorème 1. *[HW20, Theorem 2.1] Soit X une variété lisse et géométriquement irréductible sur k. Soient T un k-tore et $f : Y \to X$ un torseur sous T. Notons $A \subseteq \mathrm{Br}(X)$ l'image réciproque de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(Y)$ par $f^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y)$. Alors $X(\mathbb{A}_k)^A \subseteq \bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,T)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(Y^\sigma)})$.*

Corollaire 2. *[HW20, Corollaire 2.2] Soit X une variété propre, lisse et rationnellement connexe sur k. Soit $V \subseteq X$ un ouvert dense. Soient T un k-tore et $f : W \to V$ un torseur sous T. Alors $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ est contenu dans l'adhérence de $\bigcup_{[\sigma]\in \mathrm{H}^1(k,T)} f^\sigma(W^\sigma(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(W^\sigma)})$ dans $X(\mathbb{A}_k)$.*

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathrm{Br}(V)$ l'image réciproque de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(W)$ par $f^* : \mathrm{Br}(V) \to \mathrm{Br}(W)$. Soit Y une compactification lisse de W telle que f s'étende en un morphisme $g : Y \to X$. Il existe un fermé $F \subseteq X$ de codimension tel que g soit plat au-dessus de $X \setminus F$. Par le Hilbert Satz 90, on a $\mathrm{H}^1(\overline{k}(V), T) = \mathrm{H}^1(\overline{k}(V), \mathbb{G}_m^{\dim T}) = 0$ et donc $g_{\overline{k}} : Y_{\overline{k}} \to X_{\overline{k}}$ admet une section rationnelle. En manipulant les résidus de Witt en points de codimension 1 de X, on peut alors montrer que $A/\mathrm{Br}(X \setminus F)$ est fini. Mais comme $\mathrm{Br}(X \setminus F) = \mathrm{Br}(X)$ et comme $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_0(X)$ est fini (propriété fondamentale des variétés rationnellement connexes), on voit que $A/\mathrm{Br}_0(X)$ est fini. Ensuite, le « lemme formel » de Harari [Har94, Corollaire 2.6.1] implique que $V(\mathbb{A}_k)^A$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$. Il reste à appliquer le théorème 1 à $f : W \to V$. □

4.2 Torseurs comme des fibrations au-dessus de tores quasi-triviaux

Après avoir ramené l'étude des points rationnels d'une variété rationnellement connexe à celle de ses torseurs universels, on va appliquer la *méthode des fibrations* de la sous-section suivante à ceux-ci. Dans cette sous-section, on explique comment réaliser ces torseurs universels comme des fibrations au-dessus de tores quasi-triviaux, dont les fibres sont encore des torseurs universels.

Fixons un corps k de caractéristique nulle, une variété X lisse et géométriquement irréductible sur k, un ouvert dense $V \subseteq X$ tel que $\overline{k}[V]^\times = \overline{k}^\times$, un Γ_k-module discret $\widehat{R}$ et un morphisme Γ_k-équivariant $\lambda : \widehat{R} \to \mathrm{Pic}(V_{\overline{k}})$. Définissons les Γ_k-modules discrets $\widehat{Q}$ et $\widehat{T}$ par le diagramme commutatif à ligne exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widehat{Q} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{T} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & \widehat{R} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Div}_{X_{\overline{k}}\setminus V_{\overline{k}}}(X_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X_{\overline{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(V_{\overline{k}}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Notons R (resp. T, resp. Q) le k-groupe de type multiplicatif dont le module de caractères est $\widehat{R}$ (resp. $\widehat{T}$, resp. $\widehat{Q}$). Remarquons que Q est un tore *quasi-trivial* sur k, c'est-à-dire qu'il existe une k-algèbre étale E tel que $Q \simeq \mathrm{R}_{E|k}\mathbb{G}_m$, où $\mathrm{R}_{E|k}$ désigne la restriction de scalaires à la Weil. On a une suite exacte

$$1 \to R \to T \to Q \to 1. \tag{4.4}$$

Harpaz et Wittenberg ont fait l'observation importante suivante.

Proposition 3. *Soit $f : Y \to X$ un torseur sous T de type ν. Soit $W = f^{-1}(V)$.*

- *(i) Il existe un morphisme Q-équivariant $W/R \simeq V \times_k Q$.*
  Fixons un tel isomosphisme et notons $\pi : W \to Q$ la composée $W \to W/R \simeq V \times_k Q \to Q$, qui est T-équivariant.
- *(ii) Pour tout $q \in Q(k)$, l'action naturelle de R sur $W_q = \pi^{-1}(q)$ fait de la restriction $W_q \to V$ de f un torseur sous R de type λ.*

Par exemple, si $\mathrm{Pic}(X_{\overline{k}})$ est de type fini (c'est le cas si X est propre et rationnellement connexe), on peut prend pour λ et ν l'identité. Dans ce cas, la proposition 3 dit que tout torseur universel de X contient un ouvert dense admettant un morphisme lisse vers un tore quasi-trivial, dont les fibres sont des torseurs universels de V.

L'énoncé suivant résulte du théorème de Graber-Harris-Starr [GHS02, Theorem 1.1].

Proposition 4. *Supposons $k = \overline{k}$ et soit $\pi : W \to Q$ comme dans la proposition 3.*

- *(i) Si $\widehat{R}_{\mathrm{tors}} = 0$, alors π admet une section.*
- *(ii) Soit $V' \to V$ le torseur sous R de type λ. Si $\widehat{R}_{\mathrm{tors}}$ est cyclique et si les compactifications lisses de V' sont rationllement connexes, alors π admet une section rationnelle.*

4.3 La méthode des fibrations

Discutons maintenant la méthode des fibrations, qui sera appliquée aux compactifications lisses de torseurs universels d'une variété rationnellement connexe. L'idée de cette méthode-là est que si l'on a une famille $f : X \to B$ telle que la base B et les fibres $X_b = f^{-1}(b)$ au-dessus d'« assez » de points $b \in B$ vérifient une propriété arithmétique (« approximation faible », « l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule » ou bien « conjecture (E) »), on veut montrer que l'espace total X la vérifie aussi. Nous illustrons la méthode par le lemme élémentaire suivant.

Fixons un corps de nombres k.

Lemme 5. *Considérons la propriété suivante pour une variété Y sur k :*

$$\text{si } Y(k_v) \neq \varnothing \text{ pour toute place réelle } v, \text{ alors } Y(k) \neq \varnothing \text{ et } Y \text{ vérifie l'approximation faible.} \tag{$\star$}$$

Soit $f : X \to B$ un morphisme dominant entre k-variétés lisses et irréductibles. Si B et les fibres de f au-dessus des points rationnels d'un ouvert dense de B vérifient ($\star$), alors X vérifie ($\star$).

Démonstration. Remarquons que la propriété ($\star$) est un invariant birationnel des variétés lisses sur k (c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites). Quitte à rétrécir B, on peut supposer que f est lisse et que les fibres de f au-dessus de tout point de $B(k)$ vérifient ($\star$). Soient $S \subseteq \Omega$ un sous-ensemble fini de places de k et $x_v \in X(k_v)$ pour chaque $v \in S$. Comme B vérifie ($\star$), il existe $b \in B(k)$ arbitrairement proche des $f(x_v)$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe pour toute $v \in S$ un point $x'_v \in X_b(k_v)$ arbitrairement proche de x_v. Comme X_b vérifie ($\star$), on trouve $x \in X_b(k) \subseteq X(k)$ arbitrairement proche des x'_v.

Supposons que $X(k_v) \neq \varnothing$ pour toute place réelle v. Appliquant le paragraphe ci-dessus au cas où S est l'ensemble des places réelles, on voit que $X(k) \neq \varnothing$. Si l'on l'applique à S quelconque, on voit que X vérifie l'approximation faible. Ainsi, X vérifie ($\star$). □

Au vu de la sous-section précédente, il s'agit d'étudier les fibrations au-dessus de tores quasi-triviaux. Fixons alors une k-algèbre étale E et une base de E comme k-espace vectoriel. Posons $n = [E : k]$, $Q = \mathrm{R}_{E|k}\mathbb{G}_{m,E}$ et $Q^{\mathrm{aff}} = \mathrm{R}_{E|k}\mathbb{A}^1_E = \mathbb{A}^n_k \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Fixons enfin une variété X irréductible, propre et lisse sur k, muni d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ dont la fibre générique est rationnellement connexe. Le passage de Q à $\mathbb{P}^n_k$ est nécessaire, puisque on aura besoin de la projectivité de la famille et de l'approximation forte sur l'espace projectif.

Concernant la méthode des fibrations, il faut généralement mettre des conditions de scindage sur les fibres (une variété est dite *scindée* si elle contient une sous-variété ouverte qui est géométriquement intègre). La situation la plus favorable est celle où les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de Q^{aff} sont toutes scindées.

Le (i) du théorème ci-dessus est une version classique de cette méthode, due à Skorobogatov [Sko90, Theorem 1]. Le (ii) est dû à Harari [Har97] et est beaucoup plus difficile à établir.

Théorème 6. *Supposons les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de Q^{aff} scindées.*

- *(i) Si $X_q(k)$ est dense dans $X_q(\mathbb{A}_k)$ pour tout point rationnel q d'un ouvert dense de Q, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$.*
- *(ii) Si $X_q(k)$ est dense dans $X_q(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X_q)}$ pour tout point rationnel q d'un ouvert dense de Q, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.*

Harpaz et Wittenberg ont utilisé le théorème 6 pour traiter le cas un peu plus général où les fibres de $f_{\overline{k}}$ au-dessus des points de codimension 1 de $Q^{\mathrm{aff}}_{\overline{k}}$ sont toutes scindées. On a le

Théorème 7. *[HW20, Théorème 4.2] Supposons les fibres de f au-dessus des points de codimension 1 de Q et les fibres de $f_{\overline{k}}$ au-dessus des points de codimension 1 de $Q^{\mathrm{aff}}_{\overline{k}}$ scindées.*

- *(i) Si $X_q(k)$ est dense dans $X_q(\mathbb{A}_k)$ pour tout point rationnel q d'un ouvert dense de Q, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(X)}$.*
- *(ii) Si $X_q(k)$ est dense dans $X_q(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X_q)}$ pour tout point rationnel q d'un ouvert dense de Q, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.*

Dans le cadre des zéro-cycles, le résultat suivant ne fait aucune hypothèse de scindage.

Théorème 8. *[HW16, Corollary 8.4 (1)] Si X_q vérifie la conjecture* (E) *pour tout point fermé q d'un ouvert dense de Q, alors X vérifie la conjecture* (E)*.*

4.4 Démonstration des théorèmes A et B (esquisse)

Commençons par la démonstration d'Harpaz et Wittenberg du théorème A. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe, semi-simple et simplement connexe sur un corps de nombres k. Soit V une variété non vide sur k, munie d'une k-action de G tel que $G(\overline{k})$ agisse transitivement sur $V(\overline{k})$ (un *espace homoène de G*). Fixons un point géométrique $\overline{v} \in V(\overline{k})$ et supposons que son stalibisateur $H_{\overline{v}} \subseteq G(\overline{k})$ est fini. Alors $V_{\overline{k}} = G_{\overline{k}}/H_{\overline{v}}$ et $\pi_1^{\text{ét}}(V_{\overline{k}}, \overline{v}) = H_{\overline{v}}$. La suite exacte fondamentale

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(V_{\overline{k}}, \overline{v}) \to \pi_1^{\text{ét}}(V, \overline{v}) \to \Gamma_k \to 1$$

définit un morphisme continu $\Gamma_k \to \mathrm{Out}(H_{\overline{v}})$ (une *action extérieure de* Γ_k *sur* $H_{\overline{v}}$).

Définition. Un groupe fini H muni d'une action extérieure d'un groupe profini Γ est dit *hyper-résoluble* s'il existe une suite finie $\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = H$ de sous-groupes distingués de H, stables sous l'action extérieure de Γ, telle que H_i/H_{i-1} soit cyclique pour $i = 1, \ldots, m$.

Théorème 9 (Théorème A). *Soit X une variété propre et lisse sur k qui est birationnellement équivalente à V. Si $H_{\overline{v}}$ (muni de l'action extérieure de Γ_k) est hyper-résoluble, alors l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X.*

Preuve (esquisse). À l'aide du « lemme formel » de Harari, on peut supposer que X est une compactification lisse de V. On veut montrer que $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.

La démonstration est par récurrence sur l'ordre de $H_{\overline{v}}$. Si $H_{\overline{v}}$ est trivial, $X(k)$ est même dense dans $X(\mathbb{A}_k)$; c'est un fameux résultat de Kneser-Harder-Chernousov.

Supposons $H_{\overline{v}}$ non trivial. Soit $\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = H_{\overline{v}}$ une suite de sous-groupes distingués de $H_{\overline{v}}$, stables sous l'action extérieure de Γ_k, telle que H_i/H_{i-1} soit cyclique pour $i = 1, \ldots, m$, et que $H_{m-1} \neq H_{\overline{v}}$. Comme $H_{m-1} \subseteq [H_{\overline{v}}, H_{\overline{v}}]$, l'action extérieure de Γ_k sur $H_{\overline{v}}$ induit une action de Γ_k sur le groupe cyclique $H_{\overline{v}}/H_{m-1}$ et donc aussi sur $\widehat{R} := \mathrm{Hom}(H_{\overline{v}}/H_{m-1}, \overline{k}^{\times})$.

On tire de la suite spectrale de Hochschild-Serre $\mathrm{H}^p(H_{\overline{v}}, \mathrm{H}^q(G_{\overline{k}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(V_{\overline{k}}, \mathbb{G}_m)$, compte tenu que $\mathrm{Pic}(G_{\overline{k}}) = 0$, un isomorphisme canonique $\mathrm{Pic}(V_{\overline{k}}) = \mathrm{H}^1(H_{\overline{v}}, \overline{k}^{\times}) = \mathrm{Hom}(H_{\overline{v}}^{\mathrm{ab}}, \overline{k}^{\times})$. Notons $\lambda : \widehat{R} \hookrightarrow \mathrm{Pic}(V_{\overline{k}})$ le morphisme injectif Γ_k-équivariant dual de la projection $H_{\overline{v}}^{\mathrm{ab}} \to H_{\overline{v}}/H_{m-1}$. Reprenons les notations de la sous-section 4.2 (on a $\overline{k}[G]^{\times} = \overline{k}^{\times}$ par le lemme de Rosenlicht et *a fortiori* $\overline{k}[V]^{\times} = \overline{k}^{\times}$). Par le lemme des cinq appliqué à (4.3), $\nu : \widehat{T} \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{k}})$ est injectif. Comme X est rationnellement connexe, $\mathrm{Pic}(X_{\overline{k}})$ est sans torsion et donc $\widehat{T}$ l'est aussi, *i.e.* T est un k-tore.

Supposons $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \varnothing$. Au vu de (4.1), il existe des X-torseurs sous T de type ν. Par le théorème 1, il suffit de montrer que si Z est une compactification lisse d'un tel torseur, alors $Z(k)$ est dense dans $Z(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(Z)}$. D'après la proposition 3, il existe un ouvert dense $Z^0 \subseteq Z$ et un morphisme lisse $f^0 : Z^0 \to Q$ dont les fibres au-dessus des points de $Q(k)$ sont des V-torseurs sous R de type λ. Soit $W \to V$ une telle fibre et soit $\overline{w} \in W(\overline{k})$ un point géométrique relevant $\overline{v}$. On peut munir W d'une unique action de G tel que $W \to V$ soit G-équivariant. La variété W est alors un espace homogène de G à stabilisteur géométrique $H_{\overline{w}} = H_{m-1} = \mathrm{Ker}(\widehat{\lambda} : H_{\overline{v}} \to R(\overline{k}))$. De plus, les actions extérieures de Γ_k sur $H_{\overline{w}}$ et sur $H_{\overline{v}}$ sont compatibles [HW20, Proposition 5.2].

Comme $\widehat{R}$ est cyclique, la proposition 4 garantit que $f^0_{\overline{k}}$ admet une section rationnelle. Par l'hypothèse de récurrence, on peut maintenant appliquer le théorème 7 (ii) à une fibration $f : Z' \to \mathbb{P}^n_k$ compactifiant f^0. Par conséquent, $Z'(k)$ est dense dans $Z'(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(Z')}$ et puis le « lemme formel » de Harari permet de conclure que $Z(k)$ est dense dans $Z(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}(Z)}$. □

Remarque. La méthode d'Harpaz et Wittenberg permet aussi de

(i) retrouver le résultat de Borovoi dans le cas où le stabilisateur géométrique est fini abélien ;

(ii) démontrer un résultat conditionnel, celui dans le cas où le stabilisateur géométrique est fini résoluble, ce qui repose sur la validité de la conjecture [HW16, Conjecture 9.1].

Discutons maintenant la démonstration d'Harpaz et Wittenberg du théorème B. Demarche et Lucchini Arteche [DLA19] ont défini ce qu'on appelle *bonne* propriété des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes, et ont montré que pour qu'une telle propriété soit vérifiée par tous les espaces homogènes, il suffit qu'elle est vérifiée par les espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini. « L'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule » est une telle propriété. Par contre, on ne sait pas encore si la validité de la conjecture (E) pour les compactifications lisses d'un espace homogène est une bonne propriété. Harpaz et Wittenberg ont alors défini la variante suivante de la conjecture (E).

Définition. On dit qu'une variété X irréductible, propre et lisse sur k *vérifie la propriété* (E^+) si toute variété Z irréductible, propre et lisse sur k munie d'un morphisme dominant $Z \to X$ remplissant les deux conditions suivantes vérifie aussi la conjecture (E) :

(i) La fibre générique de ce morphisme est rationnellement connexe.

(ii) Il existe un ouvert dense $X^0 \subseteq X$ tel que pour toute extension finie $\ell|k$ et tout $x \in X^0(\ell)$, la fibre Z_x vérifie la condition $(\star)$ du lemme 5 sur le corps de nombres ℓ.

Ils ont montré que la propriété « toute variété propre, lisse et birationnellement équivalente à V vérifie la propriété (E^+) » est une bonne propriété des espaces homogènes V de groupes algébriques linéaires connexes sur k. Il est donc suffisant de montrer que les compactifications lisses d'espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini vérifient (E^+).

Un avantage significatif quand on travaille avec les zéro-cycles est que on peut effectuer une extension de scalaires si nécessaire (celui-ci n'est plus loisible dans le cadre des points rationnels). Harpaz et Wittenberg en ont profité pour ramener à montrer la propriété (E^+) *sur toutes les extensions finies de* k, pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique fini d'ordre une puissance d'un nombre premier (*a fortiori*, résoluble). Ils ont également montré la compatibilité de la propriété (E^+) aux fibrations et par passage aux torseurs universels (quitte à effectuer une extension de scalaires).

Rappelons que l'énoncé suivant suffira de conclure la démosntration du théorème B.

Théorème 10. *Soient k un corps de nombres, V un espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateur géométrique fini résoluble et X une compactification lisse de V. Alors X vérifie la propriété* (E^+).

Démonstration. Récurrence sur l'ordre du stabilisateur. Dans le cas où le stabilisateur est trivial, V est un torseur sous SL_n, donc est isomorphe à SL_n puisque $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{SL}_n) = 1$ par une variante du Hilbert Satz 90. En particulier, X est rationnelle. Comme la propriété (E^+) est un invariant birationnel stable, il suffit de l'établir pour $\mathrm{Spec}\, k$. Ce dernier résulte du travail de Liang [Lia13].

Supposons que le stabilisateur géométrique H n'est pas trivial. Il suffit de montrer que les compactifications lisses de torseurs universels de X vérifient la propriété (E^+). Soit T le k-tore dual du Γ_k-module $\mathrm{Pic}(X_{\overline{k}})$ (qui est de type fini et sans torsion sur $\mathbb{Z}$). Soit $Y \to X$ un torseur universel sous T. Par la proposition 3, il existe un ouvert dense $Y^0 \subseteq Y$, un tore quasi-trivial Q et un morphisme lisse $f^0 : Y^0 \to Q$ tels que pour toute extension $K|k$, les fibres de f^0 au-dessus des K-points de Q sont des torseurs universels de V_K. Les fibres de f^0 au-dessus de points fermés de Q sont des espaces homogènes de SL_n à stabilisateur géométrique $\subseteq [H, H]$. Sous l'hypothèse que H est résoluble, l'ordre de $[H, H]$ est strictement plus petit que celui de H. Par récurrence, les fibres de f^0 au-dessus des points fermés de Q vérifient la propriété (E^+). À l'aide du théorème 8, on peut montrer qu'une compactification lisse de Y vérifie la propriété (E^+), ce qui permet de conclure la démonstration. $\square$

5 Questions ouvertes

Les sujets sur lesquels porte le project de thèse de l'auteur sont les questions ouvertes suivantes.

(i) La conjecture A pour les compactifications lisses d'espaces homogènes d'un groupe algébriques linéaires connexes à stabilisateur géométrique fini. Il s'agit d'étendre la méthode d'Harpaz et Wittenberg à des sous-groupes plus généraux que les groupes hyper-résolubles.

(ii) Soient G un groupe algébrique linéaire simplement connexe et H un sous-groupe algébrique de G. On demande si le quotient G/H vérifie l'approximation faible aux place réelles. Ce problème a été soulevé par Borovoi. À ce jour, seul le cas où H est hyper-résoluble est connu.

(iii) Déterminer ce qui se passe si l'on remplace le corps de nombres k par un corps global K de caractéristique $p > 0$ (c'est-à-dire par un corps de fonctions sur un corps fini). Il y a quelques problèmes à résoudre, par exemple les groupes de type multiplicatifs sur K dont le module de caractères possède des éléments d'ordre divisible par p, ou encore la résolution de singularités en caractéristique p.

Références

[Bor96] Mikhail Borovoi. The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1996(473) :181–194, 1996.

[CTS87] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles, II. *Duke Mathematical Journal*, 54(2) :375 – 492, 1987.

[DLA19] Cyril Demarche and Giancarlo Lucchini Arteche. Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis. *Compositio Mathematica*, 155(8) :1568–1593, 2019. Disponible à `https://webusers.imj-prg.fr/~cyril.demarche/articles/BM_PH_EH_43.pdf`.

[GHS02] Tom Graber, Joe Harris, and Jason Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :57–67, July 2002. Disponible à `https://www.ams.org/journals/jams/2003-16-01/S0894-0347-02-00402-2/S0894-0347-02-00402-2.pdf`.

[Har94] David Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *Duke Mathematical Journal*, 75(1) :221 – 260, 1994. Disponible à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~harari/articles/duke.pdf`.

[Har97] David Harari. Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 125(2) :143–166, 1997. Disponible à https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ harari/articles/smf.pdf.

[Har07] David Harari. Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 135(4) :549–564, 2007. Disponible à `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~harari/articles/affbm.pdf`.

[HW16] Yonatan Harpaz and Olivier Wittenberg. On the fibration method for zero-cycles and rational points. *Annals of Mathematics*, page 229–295, Jan 2016.

[HW20] Yonatan Harpaz and Olivier Wittenberg. Zéro-cycles sur les espaces homogènes et problème de Galois inverse. *Journal of the American Mathematical Society*, 33(3) :775–805, Mar 2020.

[Kol96] János Kollár. *Rational Curves on Algebraic Varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

[Lia13] Yongqi Liang. Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 46(4), 2013.

[Man71] Yuri I. Manin. Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In *Actes du Congrès international des Mathématiciens (Nice, 1970)*, pages 401–411. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Mat93] Yuri V. Matiyasevich. *Hilbert's 10th Problem.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.

[Sko90] Alexei N. Skorobogatov. On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988-1989*, volume 91 of *Progress in Mathematics*, pages 205–219. Birkhäuser Boston, 1990.

[Sko01] Alexei N. Skorobogatov. *Torsors and Rational Points.* Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2001.