

FINITUDE GÉOMÉTRIQUE EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE CONVEXE

BALTHAZAR FLÉCHELLES

Avant-propos

Notre but ci-après est de motiver la recherche d'une notion générale de finitude géométrique en géométrie projective convexe¹, et de montrer comment les exemples issus de la très riche théorie de Vinberg sur les polytopes de Coxeter permettent de mieux cerner la situation.

On commencera par introduire les géométries de Hilbert et leurs propriétés fondamentales, avant de présenter les polytopes de Coxeter et quelques unes de leurs propriétés. On expliquera ensuite la notion de finitude géométrique en géométrie hyperbolique et les différentes tentatives de généralisation aux géométries de Hilbert.

La première partie est grandement inspirée de [Mar17], et la seconde de [CM14].

TABLE DES MATIÈRES

1. Géométrie de Hilbert et polytopes de Coxeter	2
1.1. Géométrie de Hilbert	2
1.2. Polytopes, pavages et groupes de Coxeter	4
1.3. Théorie de Vinberg et résultats classiques	5
1.4. Ensemble limite orbital	7
2. Finitude géométrique	8
2.1. Décomposition en partie fine / épaisse et cusps	8
2.2. Points limites coniques et paraboliques	10
2.3. Finitude géométrique dans le cas strictement convexe à bord régulier	10
2.4. Pistes de généralisation	11
Références	12
3. Annexe : exemples de pavages de Coxeter en dimension 2	14

1. On parle aussi de géométries de Hilbert

1. GÉOMÉTRIE DE HILBERT ET POLYTOPES DE COXETER

1.1. Géométrie de Hilbert. Nous introduisons ici le contexte mathématique au cœur du monde des géométries de Hilbert : la sphère projective et la distance de Hilbert. Bien sûr, il ne s'agit que d'une introduction très brève ! Une lecture courte à recommander pour compléter est [Ver05].

On travaillera sur un espace vectoriel réel V fixé, identifié à \mathbb{R}^{d+1} où $d \geq 0$ ($d \geq 1$ la plupart du temps).

Définition 1.1. La sphère projective $\mathbb{S}(V)$ associée à V est l'ensemble des demi-droites de V . On notera $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{d+1}) = \mathbb{S}^d$.

Pour tout sous-ensemble E de V , on notera $\mathbb{S}(E)$ son image dans la sphère projective $\mathbb{S}(V)$.

Remarquons que $GL(V)$ agit naturellement sur $\mathbb{S}(V)$, et que cette action se factorise par celle de $SL^\pm(V)$ (le groupe des matrices à déterminant dans $\{-1, +1\}$) quitte à diviser par la racine $(d+1)$ -ème de la valeur absolue du déterminant.

La sphère projective est munie d'un ensemble de cartes canoniques données par les projections gnomoniques, et appelées *cartes affines* : si $\alpha \in V^*$ est une forme linéaire, la carte associée à α est l'application

$$\phi_\alpha : \begin{cases} \mathbb{S}(\{x \in V, \alpha(x) > 0\}) & \rightarrow \{x \in V, \alpha(x) = 1\} \\ [x] & \mapsto \frac{x}{\alpha(x)} \end{cases}$$

Les droites (resp. k -plans) de $\mathbb{S}(V)$ correspondent aux projectivisés des plans (resp. $(k+1)$ -plans) de V , en particulier, ce sont toujours des grands cercles (resp. grandes k -sphères). Cela donne lieu à des notions d'alignement, d'espace engendré, etc. sur la sphère projective.

Étant donné un sous-ensemble E de $\mathbb{S}(V)$, sa pré-image $\mathbb{S}^{-1}(E)$ par \mathbb{S} dans V est un cône (c'est-à-dire qu'il est stable par multiplication par un scalaire positif).

Définition 1.2. $E \subset \mathbb{S}(V)$ est dit convexe si le cône $\mathbb{S}^{-1}(E)$ est un cône convexe.

E est *proprement convexe* s'il existe une carte affine \mathbb{A} telle que $\bar{E} \subset \mathbb{A}$, c'est à dire si le cône convexe $\mathbb{S}^{-1}(\bar{E})$ est *saillant* (il ne contient pas de droites).

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{S}(V)$, on peut définir son enveloppe convexe $\text{Conv}(E) \subset \mathbb{S}(V)$ comme le plus petit convexe contenant E . On peut remarquer que si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}(V)$, alors par la remarque précédente,

$$\text{Conv}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{S} \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{S}^{-1}(x_i) \right).$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{S}(V)$ un ouvert convexe, et $x \in \bar{\Omega}$.

Définition 1.3. On appelle réduction en x de Ω l'ouvert convexe $\mathcal{D}_x(\Omega)$ de $\mathbb{S}(V/\text{Vect}(x))$ dont le cône convexe est l'image par la projection $V \rightarrow V/\text{Vect}(x)$ du cône convexe $\mathbb{S}^{-1}(\Omega)$.

Plus généralement, on peut aussi parler de la réduction $\mathcal{D}_\omega(\Omega)$ de Ω en un sous-ensemble quelconque ω , définie de la même façon.

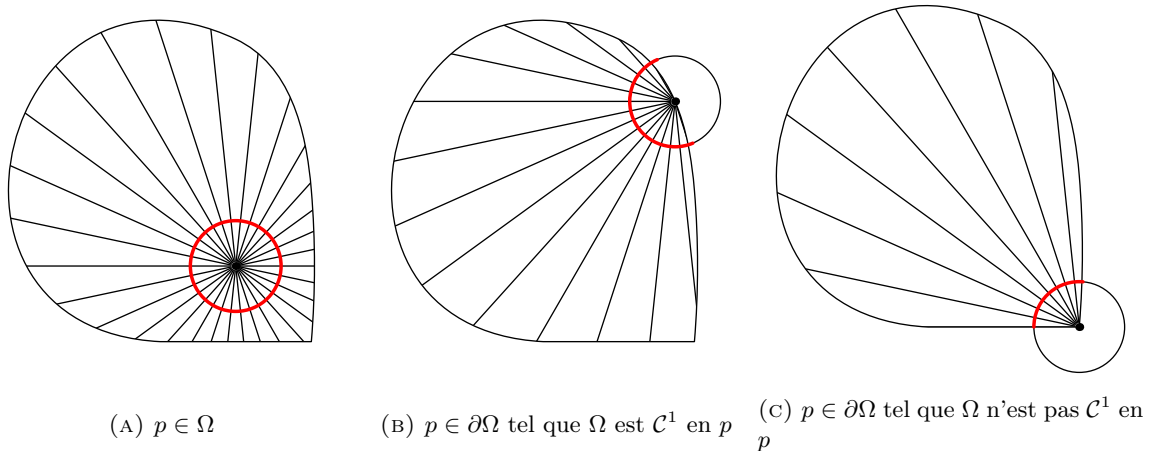


FIGURE 1 – Exemples de réduction en un point p d'un ouvert convexe Ω selon différentes configurations. Le cercle centré en p est une représentation de $\mathbb{S}(V/\text{Vect}(p))$, la partie rouge correspondant alors à $\mathcal{D}_p(\Omega)$.

On peut aussi voir $\mathcal{D}_x(\Omega)$ comme l'ensemble des demi-droites basées en x engendrées par les points de Ω . On notera $\mathbb{S}_x : \Omega - \{x\} \rightarrow \mathcal{D}_x(\Omega)$ l'application qui à un point $p \in \Omega - \{x\}$ associe l'image dans $\mathcal{D}_x(\Omega)$ de la demi-droite $[x, p)$.

Définition 1.4. Si $\Omega \subset \mathbb{S}(V)$ est convexe et $p \in \partial\Omega$, on dit que Ω est à bords \mathcal{C}^1 en p si $\partial\Omega$ est une hypersurface différentiable au voisinage de p (ou de façon équivalente, $\partial\Omega$ admet un unique hyperplan tangent en p).

Ω est *strictement convexe* en p si tous les segments contenus dans $\partial\Omega$ et contenant p sont réduits à $\{p\}$.
 p est un *point arrondi* de Ω si Ω est strictement convexe et à bords \mathcal{C}^1 en p .

Proposition 1.5. Soit Ω un convexe de $\mathbb{S}(V)$, et $p \in \partial\Omega$. On a les équivalences suivantes :

- (1) Ω est à bord \mathcal{C}^1 en p si et seulement si $\mathcal{D}_p(\Omega)$ est une carte affine.
- (2) Ω est strictement convexe en p si et seulement si l'application $\mathbb{S}_p : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{D}_p(\overline{\Omega})$ est injective.

1.1.1. *Distance de Hilbert et mesure de Busemann.* On suppose que V est muni d'une norme euclidienne fixée notée $|\cdot|$. Cela nous permet de définir un birapport :

Définition 1.6. Si l'on se donne quatre points $x, y, z, w \in V$ alignés, leur birapport est défini par la formule suivante :

$$[x, y; z, w] = \frac{|z - x|}{|w - x|} \cdot \frac{|w - y|}{|z - y|}$$

Il est important de remarquer que cette quantité est invariante sous l'action de $GL(V)$. On peut en particulier définir le birapport de 4 points alignés de $\mathbb{S}(V)$ (dont l'enveloppe convexe est proprement convexe) comme le birapport de leurs relevés dans une carte affine les contenant tous.

Étant donné Ω un ouvert proprement convexe de la sphère projective, on peut le munir d'une distance d_Ω appelée *distance de Hilbert*.

Définition 1.7. Soient $x, y \in \Omega$. On note respectivement u et v l'intersection des demi-droites $[y, x)$ et $[x, y)$ avec $\partial\Omega$. Alors

$$d_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \ln[x, y; u, v]$$

Remarque 1.8. Cela donne, dans le cas de la projection gnomonique d'une sphère d'un espace affine sur la sphère projective, la formule de la distance hyperbolique dans le modèle projectif (aussi appelé modèle de Klein). La géométrie hyperbolique est donc un cas particulier de géométrie de Hilbert. On peut aussi remarquer que puisqu'un ellipsoïde est l'image par une matrice inversible d'une sphère, la géométrie de Hilbert associée aux ellipsoïdes est encore la géométrie hyperbolique.

Remarque 1.9. De façon bien moins évidente, une sous-géométrie de la géométrie euclidienne peut-être vue comme la géométrie de Hilbert d'un simplexe de même dimension, comme l'a montré Pierre de la Harpe ([Har93]). Si en effet on choisit une famille génératrice de $n+1$ vecteurs $(u_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ dans \mathbb{R}^n telle que $\sum_i u_i = 0$, alors l'application

$$\begin{cases} \{\sum_i \lambda_i e_i, \forall i, \lambda_i > 0\} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sum_i \lambda_i e_i & \mapsto \sum_i \log \lambda_i u_i \end{cases}$$

est clairement surjective, et invariante par multiplication par un scalaire strictement positif. En quotientant par cette action à la source, on obtient une bijection entre $\mathbb{S}(\{\sum_i \lambda_i e_i, \forall i, \lambda_i > 0\}) \simeq \Delta^n \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ et \mathbb{R}^n .

De plus, un automorphisme de Δ^n est clairement le produit d'une matrice diagonale et d'une matrice de permutation, qui agit via cette bijection sur \mathbb{R}^n comme une translations selon les vecteurs u_i composée avec une rotation (en choisissant un produit scalaire dans lequel les u_i ont tous norme 1) revenant à permuter les vecteurs u_i . Cela donne donc un isomorphisme entre la sous-géométrie de \mathbb{R}^n dont le groupe d'isométrie est engendré par les translations selon les vecteurs $(u_i)_i$ et les permutations des u_i et la géométrie de Hilbert du simplexe Δ^n .

En fait, la distance de Hilbert vient d'une géométrie finslérienne (généralisation de la géométrie riemannienne dans laquelle on demande l'existence d'une norme variant continûment sur chaque espace tangent) sur Ω , qui permet de définir une mesure sur Ω , notée μ_Ω , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur toute carte affine. Elle est appelée selon les sources *mesure de Busemann* ou *mesure de Hausdorff*.

De plus, si on note $\text{Aut}(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $GL(V)$ qui stabilisent Ω , il s'agit d'isométries de Ω pour la géométrie de Hilbert et pour sa géométrie finslérienne, donc $\text{Aut}(\Omega)$ préserve μ_Ω et d_Ω .

1.2. Polytopes, pavages et groupes de Coxeter. Puisque l'on veut construire des variétés projectives convexes, on ne veut pas seulement définir une géométrie sur des ouverts proprement convexes, mais aussi être en mesure de les quotienter par des groupes intéressants. La théorie de Vinberg permet de façon surprenante de construire une très grande variété d'exemples non triviaux en prenant le problème à l'envers : on peut partir d'un groupe pour construire un ouvert proprement convexe sur lequel il agit.

Définition 1.10. Un polytope P de $\mathbb{S}(V)$ est l'adhérence d'une intersection proprement convexe d'intérieur non vide d'un nombre fini de cartes affines $(\mathbb{A}_s)_{s \in S}$. Si on se donne des formes linéaires $(\alpha_s)_{s \in S}$ telles que $\mathbb{A}_s = \{\alpha_s < 0\}$, on peut écrire $P = \mathbb{S}(\{x \in V, \forall s \in S, \alpha_s(x) \leq 0\})$.

Remarque 1.11. Un polytope est convexe comme intersection de convexes, et proprement convexe d'intérieur non vide par hypothèse.

On supposera également par commodité que dans la description précédente, $P \cap \{\alpha_s = 0\}$ est d'intérieur non vide dans son support pour tout $s \in S$ (quitte à supprimer s de S le cas échéant). On dira dans la suite que S est *sans redondance*.

Les faces d'un convexe proprement convexe Ω sont les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence \sim définie par $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $x \neq y$ et le segment $[x, y]$ peut être continué au delà de x et y (c'est à dire qu'il existe $u, v \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset]u, v[$).

Remarque 1.12. Chaque face de P est convexe, donc engendre une sous-sphère projective de dimension k comprise entre 0 et d , que l'on appelle dimension de la face considérée. Il existe une unique face de dimension d , qui est l'intérieur de P . Pour les autres faces, on adopte les dénominations suivantes.

- Les faces de dimension 0 sont appelées sommets,
- les faces de dimension 1 sont appelées arêtes,
- les faces de codimension 1 sont appelées facettes (mais une confusion avec le mot "face" n'est pas rare...),
- les faces de codimension 2 sont appelées dièdres.

La proposition suivante identifie les facettes de P aux hyperplans qui définissent P .

Proposition 1.13. Si $P = \mathbb{S}(\{x \in V, \forall s \in S, \alpha_s(x) \leq 0\})$, où le système d'inéquations définissant P est sans redondance, alors l'ensemble des facettes de P est en bijection avec S .

1.2.1. Polytopes et pavages de Coxeter. Afin de construire un pavage à l'aide de polytopes, nous allons utiliser des réflexions projectives le long des facettes de P .

Définition 1.14. La réflexion projective d'hyperplan H et de direction $v \notin H$ est l'endomorphisme $\sigma = \text{id} - \alpha \otimes v$ où α est la forme linéaire dont le noyau est H et telle que $\alpha(v) = 2$ (cette notation signifie que pour tout $x \in V$, $\sigma(x) = x - \alpha(x)v$).

Remarque 1.15. Les réflexions projectives sont des involutions qui passent au quotient en des involutions de la sphère $\mathbb{S}(V)$. Étant donné une telle involution sur la sphère, le couple (α, v) est défini à multiplication par un scalaire près. Ainsi, dans $\mathbb{S}(V)$, une réflexion projective le long d'une hypersphère est uniquement déterminée par le choix d'un point qui ne soit pas dedans.

Afin de définir à partir de P un pavage, on choisit le long de chaque facette de P une réflexion projective d'hyperplan la facette considérée. Puisque l'on s'est déjà donné une forme linéaire α_s d'hyperplan la facette s , il suffit de choisir le polaire $v_s \in V$ de s .

On notera dans la suite $\sigma_s = \text{id} - \alpha_s \otimes v_s$ pour tout $s \in S$ la réflexion projective associée à la facette s , et Γ_P le sous-groupe de $SL^\pm(V)$ engendré par les σ_s .

Pour que l'orbite de P par Γ_P pave un ouvert de $\mathbb{S}(V)$, il faut déjà qu'il pave dans son voisinage. En particulier, il faut qu'à chaque dièdre déterminé par des faces $s \neq t$ de P , les translatés de P par le groupe engendré par σ_s et σ_t pavent la sphère au voisinage du dièdre $s \cap t$ (qui est fixé par ce groupe, qui se trouve être un groupe *diédral*). Quitte à quotienter V par $\text{Vect } s \cap t$, on peut supposer que V est de dimension 2, et établir les conditions suivantes, que tout polytope muni de réflexions projectives le long de ses faces supposé paver la sphère doit remplir. Un polytope muni de réflexions projectives satisfaisant ces conditions est appelé *polytope de Coxeter*.

Définition 1.16. Un *polytope de Coxeter* est un polytope $P \subset \mathbb{S}(V)$ muni de réflexions projectives $\sigma_s = \text{id} - \alpha_s \otimes v_s$ le long de chacune de ses facettes $s \in S$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

Pour tous $s, t \in S$ tels que $s \cap t$ est un dièdre de P ,

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_s(v_t) \leq 0, \\ \alpha_t(v_s) \leq 0, \\ \alpha_s(v_t) = 0 \Leftrightarrow \alpha_t(v_s) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s) > 4 \\ \text{ou} \\ \alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s) = 4 \cos^2 \theta_{st} \text{ où } \theta_{st} = \frac{\pi}{M_{st}} \text{ et } M_{st} \in \{2, 3, \dots, \infty\} \end{cases}$$

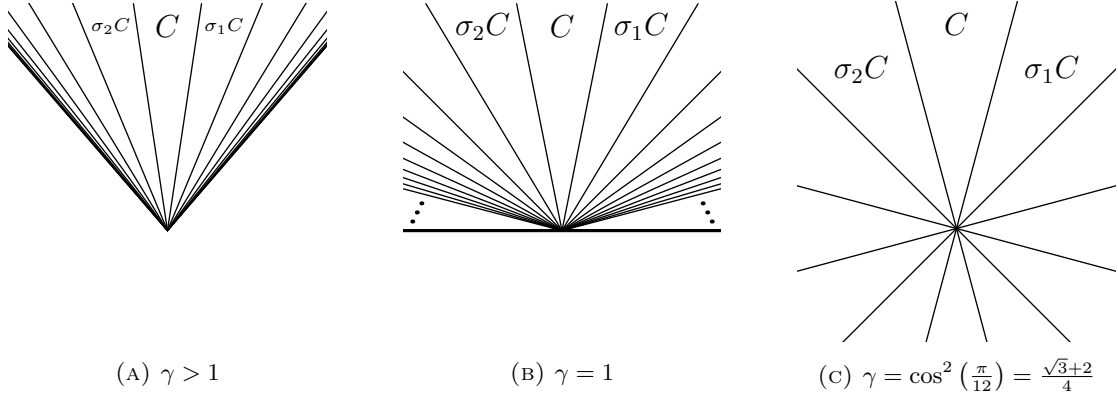


FIGURE 2 – Exemples de cônes engendrés par deux réflexions, selon la valeur de γ .

θ_{st} est appelé *angle diédral* du dièdre $s \cap t$. Si $\alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s) > 4$, alors on pose $\theta_{st} = 0$. On observe donc que $\theta_{s,t} \in [0, \pi/2]$ avec $\theta_{s,t} = 0$ si et seulement si $\alpha(s)(v_t)\alpha_t(v_s) \geq 4$. Trois scénarios sont possibles autour d'un dièdre, selon la valeur de $\gamma = \frac{1}{4}\alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s)$, comme l'illustre la figure 2.

Le théorème de Coxeter qui suit garantit que ces conditions (nécessaires par les considérations précédentes) sont suffisantes pour que Γ_P et P définissent un pavage de $\mathbb{S}(V)$.

Étant donné P un polytope de Coxeter d'ensemble de facettes S , on définit le groupe W_P comme le groupe de Coxeter abstrait ayant un générateur r_s par facette s dans S et ayant pour relations $(r_s r_t)^{M_{st}} = 1$ dès que s et t se coupent en un dièdre de P d'angle $\theta_{st} = \frac{\pi}{M_{st}} > 0$.

Théorème 1.17. Avec les notations précédentes, les points suivants sont vérifiés :

- (1) Le morphisme $\rho : W_P \rightarrow \Gamma_P$ défini par $\rho(r_s) = \sigma_s$ est bien défini et est un isomorphisme.
- (2) Le polytope P et le groupe Γ_P définissent un pavage de $\mathbb{S}(V)$, et si on pose $C_P = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot P$, c'est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{S}(V)$.
- (3) L'action de Γ_P sur $\Omega_P = \text{int}(C_P)$ est proprement discontinue et Γ_P est un sous-groupe discret de $SL^\pm(V)$.
- (4) Pour tout $x \in P$, $x \in \Omega_P$ si et seulement si $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma_P, \gamma x = x\}$ est fini.
- (5) Pour toute face f de P , $\bigcup_{\gamma \in \Gamma_f} \gamma \cdot P$ est convexe (où $\Gamma_f = \{\gamma \in \Gamma_P, \gamma \cdot f = f\}$).

Il ne semble pas évident, étant donné un groupe de Coxeter, de construire un ouvert proprement convexe sur lequel il agit, car il faut d'abord construire un polytope convenable (la façon évidente ne donne pas nécessairement un polytope d'intérieur non vide). Pourtant, on peut associer à chaque groupe de Coxeter un polytope de Coxeter de façon naturelle. Ce polytope (qui est toujours un simplexe) est le *simplexe de Tits*. Nous n'en donnerons pas la construction ici, mais il est intéressant de noter que l'on dispose toujours d'une telle représentation.

On dira d'un groupe de Coxeter qu'il est de type négatif si son simplexe de Tits l'est.

1.3. Théorie de Vinberg et résultats classiques. Dans ce qui précède, les valeurs $\alpha_s(v_t)$ pour $s, t \in S$ nous ont permis de comprendre localement le pavage autour de chaque dièdre. On peut aussi en tirer beaucoup d'informations sur la géométrie globale du pavage et sur le groupe de Coxeter étudié.

Définition 1.18. La *matrice de Cartan* de P est la matrice $A_P = (\alpha_s(v_t))_{s,t \in S}$.

Une matrice est dite *irréductible* si elle ne peut s'écrire sous une forme triangulaire par bloc non triviale quitte à réordonner la base (ie à permutation des lignes et des colonnes près).

Puisque P satisfait aux conditions (1), A_P n'a que des 2 sur sa diagonale, et que des valeurs négatives ailleurs. Si de plus une entrée hors de la diagonale est nulle, l'entrée symétrique l'est également. On peut donc écrire $A_P = 2 \text{id} - U$ où U est une matrice à coefficients positifs ou nuls. Si maintenant on suppose A_P irréductible, cela implique U irréductible, et le théorème de Perron-Frobenius montre que le rayon spectral de U est valeur propre simple (de U) associée à un vecteur propre à coordonnées strictement positives.

En termes de valeurs propres de A_P , on obtient une plus petite valeur propre réelle λ telle que toutes les autres valeurs propres μ vérifient $2 - \lambda > |2 - \mu|$, et dont un vecteur propre associé est à coordonnées strictement positives. En particulier, si λ est positif ou nul, toutes les autres valeurs propres de A_P sont strictement positives.

Définition 1.19. Si A_P est irréductible, on dira qu'elle est de type positif, nul ou négatif selon que λ l'est. Si A_P n'est pas irréductible, elle est d'un certain type si toutes ses composantes irréductibles sont de ce même type.

On peut en dire plus concernant les valeurs propres et vecteurs propres de matrices de Cartan d'un type donné.

Remarque 1.20. Si A_P est irréductible, on a toujours que le vecteur propre associé à λ est à coordonnées strictement positives. Si A_P n'est pas irréductible, on peut construire un vecteur colonne X à coordonnées strictement positives obtenu en superposant les vecteurs propres associées à chacun des λ (qui ne sont donc pas nécessairement égaux, mais qui sont tous de même signe). On a donc une famille λ_s de même signe et constant sur les composantes irréductibles de A_P , et une famille $\mu_s > 0$ tels que pour tout $t \in S$,

$$\sum_s \mu_s \alpha_t(v_s) = \lambda_t \mu_t.$$

On peut remarquer que tout ce qui précède s'applique également à A_P^T , et que A_P^T et A_P sont de même type (s'il y a lieu d'en parler) et ont les mêmes composantes irréductibles à transposée près.

1.3.1. *Caractérisation géométrique selon le type du polytope.* Les théorèmes suivants montrent l'intérêt de l'étude de la matrice de Cartan pour comprendre la géométrie des pavages de Coxeter.

Théorème 1.21. Ω_P est proprement convexe si et seulement si A_P est de type négatif.

Théorème 1.22. $\Omega_P = \mathbb{S}^d$ si et seulement si A_P est de type positif si et seulement si Γ_P est fini si et seulement si Γ_P préserve un produit scalaire sur V .

Théorème 1.23. Si A_P est de type nul, alors $\Omega_P = P + \text{Conv}(v_s)_s$ n'est pas proprement convexe mais inclus dans une carte affine. De plus, Γ_P agit sur Ω_P par transformations euclidiennes et $\dim_{\mathbb{S}(V)} \text{Conv}(v_s)_s = \text{rg } A_P$.

On les retrouve essentiellement chez Vinberg [Vin72], énoncés et démontrés en termes plus algébriques. Nous n'avons pas la place ici de détailler la preuve, mais montrons par exemple un sens du théorème 1.21 : si A_P est de type négatif, alors Ω_P est proprement convexe. On admettra pour ce faire un lemme qui repose sur la combinatoire des groupes de Coxeter :

Lemme 1.24. Soit $x \in \mathbb{S}^{-1}(P)$, et $\gamma \in \Gamma_P - \{\text{id}\}$. On a $\gamma x - x \in \text{Conv}(\mathbb{S}^{-1}(v_s))_s$ le cône convexe engendré par les directions des polaires.

Démonstration. Soit $(\lambda_s)_s$ le vecteur de Perron-Frobenius de A_P^T , et $(\mu_s)_s$ le vecteur de valeurs propres associées (voir la remarque 1.20). On a $\lambda_s > 0$ et $\mu_s < 0$ pour tout $s \in S$. Si on pose $\alpha = \sum_s \lambda_s \alpha_s$, on voit que pour tout $t \in S$, $\alpha(v_t) = \lambda_t \mu_t < 0$. De plus, si $x \in P$, alors $\alpha(x) = \sum_s \lambda_s \alpha_s(x) < 0$ (l'un au moins des $\alpha_s(x)$ est différent de 0 car P n'est pas un point), donc $\text{Conv}(P, v_s)_s \subset \mathbb{A} = \{\alpha < 0\}$ est proprement convexe.

En utilisant le lemme précédent, on voit que pour tout $x \in \mathbb{S}^{-1}(P)$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_P - \{\text{id}\}$, $\gamma x \in x + \text{Conv}(\mathbb{S}^{-1}(v_s))_s \subset \mathbb{S}^{-1}(P) + \text{Conv}(\mathbb{S}^{-1}(v_s))_s$. En repassant dans la sphère projective, on voit donc que pour tout $\gamma \in \Gamma_P - \{\text{id}\}$, $\gamma P \subset \text{Conv}(P, v_s)_s$. Ainsi, $\Omega_P \subset \text{Conv}(P, v_s)_s$ est proprement convexe. \square

1.3.2. *Nomenclature pour les polytopes de Coxeter et leurs faces.* Les appellations de polytopes elliptiques, loxodromiques ou paraboliques introduites ci-dessous reflètent le type d'action et la géométrie qui leur est associée.

Définition 1.25. Un polytope de Coxeter P est dit elliptique (resp. parabolique, loxodromique) si et seulement si A_P est de type positif (resp. de type nul et de rang d , de type négatif et de rang $d + 1$).

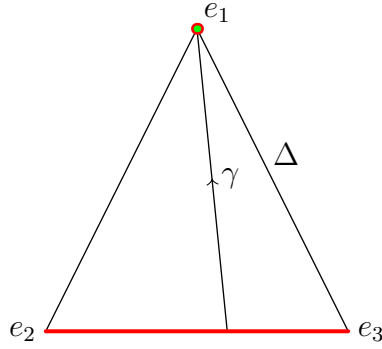


FIGURE 3 – L'isométrie γ de Δ donnée par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendre un sous-groupe $\Gamma < \text{Aut}(\Delta)$. L'ensemble limite proximal est représenté en vert, $\Lambda_{\Gamma}^{\text{orb}}$ en rouge. Les orbites par Γ sont contenues dans les géodésiques de direction e_1 .

Si ω est une face de P de codimension au moins 2, alors P , Ω_P et l'action de Γ_{ω} passent au quotient par $\text{Vect } \omega$ dans V , et on note P_{ω} le polytope $\mathcal{D}_{\omega}(P)$ et $\Omega_{\omega} = \mathcal{D}_{\omega}(\Omega)$. On qualifie ω selon P_{ω} , c'est à dire que si par exemple P_{ω} est elliptique, on dira que ω est une face elliptique de P . Les théorèmes précédents sont intéressants car $\Omega_{\omega} = \Omega_{P_{\omega}}$.

Définition 1.26. Un polytope de Coxeter est dit parfait si tous ses sommets sont elliptiques. Par le théorème de Vinberg 1.17, cela revient à dire que l'action de Γ_P sur Ω_P est cocompacte.

Définition 1.27. On dira d'un polytope de Coxeter qu'il est quasi-parfait si tous ses sommets sont elliptiques ou paraboliques.

Les définitions 1.25 correspondent aux polytopes dont la matrice de Cartan est d'un type donné et de rang maximal. Au regard des théorèmes 1.23 et 1.21, il s'agit aussi des polytopes de Coxeter qui ont le plus de chance d'être parfait. En fait, on peut remarquer que l'on a effectivement la proposition :

Proposition 1.28. *Si P est un polytope de Coxeter parabolique ou elliptique, alors P est parfait.*

Démonstration. Si P est elliptique, alors par le théorème 1.22, $\Omega_P = \mathbb{S}(V)$, donc l'action de Γ_P sur Ω_P est cocompacte.

Si P est parabolique, alors si $(\lambda_s)_s$ est le vecteur de Perron-Frobénius de A_P^T , et $\alpha = \sum \lambda_s \alpha_s$, on a par définition que pour tout $t \in S$, $\alpha(v_t) = 0$. De plus, si $x \in P$, alors $\alpha(x) < 0$ comme plus haut, donc $P \subset \mathbb{A} = \{\alpha < 0\}$. Puisque tous les polaires sont dans le noyau de α , Γ_P préserve \mathbb{A} (car $\alpha(\sigma_s x) = \alpha(x)$ pour tout $x \in V$). Comme Γ_P agit par transformations euclidiennes sur $\Omega_P \subset \mathbb{A}$ par le théorème 1.23, il agit sur \mathbb{A} par transformations euclidiennes. En particulier, il agit cocompactement sur un sous-espace affine $E \subset \mathbb{A}$ de dimension son rang, et ce dernier étant maximal, $E = \mathbb{A}$, puis $\Omega_P = \mathbb{A} = E$, donc P est parfait. \square

1.4. Ensemble limite orbital. On fixe pour la suite un ouvert proprement convexe Ω sur lequel agit $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ discret. Par exemple, Γ pourrait être un groupe de Coxeter de type négatif, et $\Omega = \Omega_{\Delta_{\Gamma}}$ où Δ_{Γ} est le simplexe de Tits de Γ . La notion d'ensemble limite jouant un rôle primordial dans l'étude des variétés hyperboliques, on aimerait disposer d'un outil similaire en géométrie projective convexe.

En géométrie hyperbolique, une propriété qui semble définir l'ensemble limite est qu'il s'agit du plus petit fermé non vide Γ -invariant. Les travaux d'Yves Benoist ([Ben00]) montrent que l'on peut définir ainsi l'*ensemble limite proximal* de Γ , défini dès lors que l'action de Γ sur Ω est irréductible (ie Γ n'a pas de sous-espace projectif non-trivial). Cependant, on perd alors l'une des propriétés essentielles de l'ensemble limite au sens hyperbolique : l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite n'est pas nécessairement contenu dans l'ensemble limite (voir la figure 3).

Pour recouvrer cette propriété, et être en mesure de parler d'ensemble limite sans hypothèse sur Γ , Danciger Guéritaud et Kassel proposent dans [DGK17] de définir l'*ensemble limite orbital (total)* de Γ comme suit :

Définition 1.29. L'ensemble limite orbital de Γ (relativement à Ω) est l'union

$$\Lambda_{\Gamma, \Omega}^{\text{orb}} = \cup_{x \in \Omega} \text{Acc}(\Gamma \cdot x)$$

(où $\text{Acc}(X)$ désigne l'ensemble des points d'accumulations de X).

Remarque 1.30. Il est important ici de considérer l'union des points d'accumulation des orbites, même si on peut s'en passer dès que Ω est strictement convexe (comme dans le cas hyperbolique), autrement l'ensemble limite orbital peut dépendre de l'orbite choisie (voir la figure 3). C'est la raison pour laquelle on parle d'ensemble limite orbital *total*, mais on oublie souvent ce qualificatif.

En fait, [DGK17] montre que $\Lambda_{\Gamma, \Omega}^{\text{orb}}$ ne dépend pas de Ω . Dans la suite, on notera donc simplement $\Lambda_{\Gamma}^{\text{orb}}$.

Disposer d'un ensemble limite permet comme dans le cas hyperbolique de définir le cœur convexe de M , puis la notion de convexe-cocompacité (raison pour laquelle Danciger Guéritaud et Kassel ont introduit l'ensemble limite orbital!).

Définition 1.31. Le cœur convexe de Ω pour l'action de Γ est l'intersection $\text{Conv } \Lambda_{\Gamma}^{\text{orb}} \cap \Omega$ et sera noté $\mathcal{C}(\Gamma)$. Le cœur convexe de M est la projection dans M du cœur convexe de Γ noté $\mathcal{C}(M)$.

On dit que M est convexe-cocompact si $\mathcal{C}(M)$ est un compact non vide.

Une propriété fondamentale (et cruciale dans la définition de finitude géométrique) de l'ensemble limite est que celui-ci est le complémentaire dans $\overline{\Omega}$ du domaine de discontinuité maximal \mathcal{O}_{Γ} pour l'action de Γ sur $\overline{\Omega}$. Rappelons qu'un domaine de discontinuité pour l'action d'un groupe G sur un espace topologique X est un ouvert non vide de X sur lequel G agit proprement discontinûment. Dans notre cas, le résultat admet un analogue en toute généralité :

Proposition 1.32. *Soit Ω un ouvert proprement convexe, et $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ discret.*

Posons $\widetilde{\Lambda}_{\Gamma}^{\text{orb}} = \cup_{x \in \Lambda_{\Gamma}^{\text{orb}}} F_{\Omega}(x)$ où $F_{\Omega}(x)$ désigne la face de Ω contenant x , et $\mathcal{O}_{\Gamma} = \overline{\Omega} - \widetilde{\Lambda}_{\Gamma}^{\text{orb}}$.

Alors Γ agit sur \mathcal{O}_{Γ} proprement discontinûment.

Remarque 1.33. Encore une fois, dans le cas où Ω est strictement convexe, on constate que $\mathcal{O}_{\Gamma} = \overline{\Omega} - \Lambda_{\Gamma}^{\text{orb}}$ est parfaitement analogue au domaine de discontinuité donné dans le cas hyperbolique.

2. FINITUDE GÉOMÉTRIQUE

2.1. Décomposition en partie fine / épaisse et cusps. En géométrie hyperbolique, la notion de finitude géométrique a été dégagée en dimension 3 par de nombreux travaux (voir [Gre66; Ahl66; Mar67; Mar74; BM74; Thu80]) proposant 6 définitions équivalentes, avant que Bowditch ne mette de l'ordre dans tout cela, en montrant l'équivalence de 5 de ces définitions en dimension supérieures [Bow93], puis dans le contexte des variétés à courbure négative pincée [Bow95].

Ces définitions reposent sur le lemme de Margulis suivant, énoncé ci-après dans le contexte de la géométrie projective convexe puisqu'il y reste valable (consulter [CM13] ou [CLT15] pour la version projective, la version historique ayant été présentée dans [KM69]) :

Lemme 2.1 (théorème 1 de [CM13], théorème 0.1 de [CLT15]). *Pour tout $n \geq 2$, il existe un nombre ε_n (appelé constante de Margulis) tel que pour tout ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $x \in \Omega$, si $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ discret, alors les éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma x) < \varepsilon_n$ engendrent un sous-groupe virtuellement nilpotent de Γ .*

Grâce à ce lemme, on peut démontrer les propriétés suivantes, qui assurent que les notions de cusps, partie épaisse / fine et partie cuspidale / non-cuspidale d'une variété projective convexe (et a fortiori des variétés hyperboliques) sont bien définies :

Définition 2.2. Soit $M = \Omega/\Gamma$ une variété projective convexe de dimension n , et $\varepsilon < \varepsilon_n$ une constante. On définit M_{ε}^f (resp. M_{ε}^e) la partie fine (resp. épaisse) de M comme étant l'ensemble des points de M dont le rayon d'injectivité est strictement inférieur à ε (resp. supérieur ou égal à ε).

La classification des isométries d'un ouvert proprement convexe suivante se révèle très utile :

Définition 2.3. Soit Ω un ouvert proprement convexe, et $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$. Notons $l(\gamma) = \inf_{x \in \Omega} d(x, \gamma x)$. On dit que γ est

- *elliptique* si $l(\gamma) = 0$ et l'infimum est atteint dans Ω ;
- *parabolique* si $l(\gamma) = 0$ et l'infimum n'est pas atteint dans Ω ;
- *hyperbolique* si $l(\gamma) > 0$ et l'infimum est atteint dans Ω ;
- *quasi-hyperbolique* si $l(\gamma) > 0$ et l'infimum n'est pas atteint dans Ω .

Le théorème suivant concernant les automorphismes d'un ouvert strictement convexe est analogue à la classification des isométries en géométrie hyperbolique :

Théorème 2.4 (théorème 3.3 de [CM14]). *Soit Ω un ouvert strictement convexe, alors tout automorphisme γ de Ω est elliptique, parabolique ou hyperbolique.*

De plus, si γ est hyperbolique, il possède exactement deux points fixes (l'un répulsif γ^- , l'autre attractif γ^+), la géodésique $(\gamma^- \gamma^+)$ est la seule préservée par γ , et γ atteint sa distance de translation uniquement dessus.

Si γ est parabolique, il possède un unique point fixe $p \in \partial\Omega$.

Fixons pour le moment une variété projective strictement convexe $M = \Omega/\Gamma$ de dimension n , et $\varepsilon < \varepsilon_n$ une constante. Pour tout G sous-groupe de Γ , on note $\Omega_\varepsilon(G) = \{x \in \Omega, G_\varepsilon(x) \text{ est infini}\}$ où $G_\varepsilon(x)$ est le sous-groupe de G engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma x) < \varepsilon$.

Remarque 2.5. Par un argument de ping pong, deux éléments $\lambda, \gamma \in \text{Aut}(\Omega)$ non-elliptiques qui n'ont pas de point fixe en commun engendrent un groupe qui contient un groupe libre (et qui n'est donc pas nilpotent).

On peut aussi voir (proposition 3.14 de [CM14]) que si γ et λ engendrent un groupe discret et ont un point fixe commun, alors ils ont exactement les mêmes points fixes (en particulier, l'un est hyperbolique si et seulement l'autre l'est, et idem pour parabolique).

Ainsi, tout sous-groupe virtuellement nilpotent discret infini de $\text{Aut}(\Omega)$ préserve soit une géodésique (auquel cas, il est virtuellement égal à \mathbb{Z} , et on dit qu'il est *hyperbolique*), soit un point à l'infini (auquel cas il est virtuellement constitué d'éléments paraboliques, on dit alors qu'il est *parabolique*).

La notion de rang d'un groupe parabolique est primordiale pour la suite. Elle correspond à la notion de dimension cohomologique du groupe (voir [Ser69] pour plus d'élaboration sur le sujet).

Définition 2.6. Si Γ est un groupe sans torsion, sa dimension cohomologique est un entier n_Γ tel que toute action propre de Γ sur une variété de dimension d satisfait $d \geq n_\Gamma$, avec égalité si et seulement si l'action est de plus cocompacte. Dans le cas où Γ est virtuellement sans torsion (comme nos groupes paraboliques), on montre que tous ses sous-groupes d'indice fini sans torsion ont la même dimension cohomologique, que l'on appelle *rang* de Γ .

Proposition 2.7 (lemme 6.2 de [CM14]). *M_ε^f est une réunion disjointe de parties ouvertes de M qui sont en bijection avec les classes de conjugaison des sous-groupes virtuellement nilpotents maximaux (pour l'inclusion) de Γ .*

Démonstration. On travaille dans Ω . Commençons par remarquer que pour tout $G < \Gamma$ sous-groupe, $\Omega_\varepsilon(G)$ est envoyé dans M_ε^f après passage au quotient par Γ . De plus, si $x \in \Omega$ est envoyé dans la partie fine de M , c'est qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $d(x, \gamma x) < \varepsilon$. Par le lemme de Margulis, le sous-groupe engendré par ces γ est virtuellement nilpotent, donc contenu dans un sous-groupe virtuellement nilpotent maximal G . Ainsi, $x \in \Omega_\varepsilon(G)$. Donc la partie fine est recouverte par les images dans M des $\Omega_\varepsilon(G)$ où G parcourt les sous-groupes de Γ virtuellement nilpotents maximaux.

On observe aussi que deux sous-groupes virtuellement nilpotents maximaux G et G' déterminent des ouverts d'adhérence disjointe dans Ω ($\overline{\Omega_\varepsilon(G)}$ et $\overline{\Omega_\varepsilon(G')}$ ne se rencontrent pas). En effet, un point x dans leur intersection satisfait, pour tout $\varepsilon' \in]\varepsilon, \varepsilon_n[$, à la fois $G_{\varepsilon'}(x)$ infini et $G'_{\varepsilon'}(x)$ infini. Comme ce sont deux sous-groupes de $\Gamma_{\varepsilon'}(x)$ qui est virtuellement nilpotent et discret, ils ont les mêmes points fixes à l'infini par la remarque 2.5. Ainsi, G et G' fixent soit la même géodésique, soit le même point à l'infini, et engendrent donc un sous-groupe virtuellement nilpotent par le lemme de Margulis (un point de Ω assez proche du point fixe dans $\partial\Omega$ sera déplacé aussi peu que voulu par les éléments de G et G'). Puisqu'ils sont maximaux, on a $G = G'$.

On conclut en remarquant que pour tout $\gamma \in \Gamma$, et pour tout sous-groupe G de Γ , $\Omega_\varepsilon(\gamma G \gamma^{-1}) = \gamma \Omega_\varepsilon(G)$, ce qui donne le résultat après passage au quotient par Γ . \square

Remarque 2.8. Dans M_ε^f , les composantes associées aux groupes hyperboliques sont relativement compactes, alors que celles associées aux classes de conjugaison de groupes paraboliques partent à l'infini (avec un diamètre qui tend vers 0). En géométrie hyperbolique, on appelle les premières des *tubes* et les secondes des *cusps*.

La partie cuspidale M_ε^c est la réunion des cusps de M , la partie non-cuspidale M_ε^{nc} est le complémentaire de M_ε^c dans M .

Un cusp est donc en général le quotient d'une partie de Ω (qui est le revêtement universel du cusp, et que l'on appellera *espace du cusp*) par un groupe parabolique de Ω (qui fixe donc un point à l'infini, appelé *singularité du cusp*). En géométrie hyperbolique, ils ont toujours la même structure : ils sont isométriques au quotient d'une horoboule hyperbolique par un groupe d'isométries paraboliques fixant le point de base de l'horoboule (leur rang peut varier cependant). On appelle ces cusps des *cusps standards*.

2.2. Points limites coniques et paraboliques. Parmi les propriétés dont Bowditch montre l'équivalence figure une caractérisation dynamique également, qui décompose l'ensemble limite en points coniques et points paraboliques bornés. On peut définir la notion de point conique en toute généralité (grâce au travail de Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK17]) grâce à la proposition suivante, élémentaire à vérifier.

Proposition 2.9. *Soit Ω un ouvert proprement convexe, $\Gamma < \text{Aut } \Omega$ discret et $x \in \Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$. On peut (par définition) choisir un point $o \in \Omega$, et une suite $(\gamma_n)_n \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ tels que $\gamma_n o \rightarrow x$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Tout rayon géodésique de direction x dans Ω s'accumule dans $\mathcal{C}(M)$;*
- (ii) *un rayon géodésique de direction x dans Ω s'accumule dans $\mathcal{C}(M)$;*
- (iii) *la suite $(\gamma_n o)_n$ reste à distance bornée de tout rayon géodésique de Ω de direction x ;*
- (iv) *la suite $(\gamma_n o)_n$ reste à distance bornée d'un rayon géodésique de Ω de direction x .*

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que x est un point conique de $\Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$.

La notion de points parabolique est plus problématique, car elle dépend de la dichotomie des groupes virtuellement nilpotents de Γ donnée au paragraphe précédent, et qui ne vaut que quand Ω est strictement convexe.

Elle ne joue pas un rôle en elle-même dans le théorème de Bowditch, car elle est trop générale. Il faut lui préférer la notion de point parabolique borné en géométrie hyperbolique (et même parabolique uniformément borné dans le cas strictement convexe, comme l'ont montré Crampon et Marquis).

Définition 2.10. *Soit Ω un ouvert strictement convexe, $\Gamma < \text{Aut } \Omega$ discret et $x \in \partial\Omega$. On dit que x est un point parabolique si le groupe $\Gamma_x = \text{Stab}_\Gamma(x)$ est un groupe parabolique.*

On dit que x est un point parabolique borné quand de plus Γ_x agit cocompactement sur $\Lambda_\Gamma^{\text{orb}} - \{x\}$.

x est parabolique uniformément borné si l'action de Γ_x sur l'ensemble $\overline{\mathcal{D}_x(\text{Conv } \Lambda_\Gamma^{\text{orb}})}$ est cocompacte.

Remarque 2.11. Il ne fait pas de doute que x est parabolique borné si et seulement si Γ_x agit cocompactement sur $\mathcal{D}_x(\Lambda_\Gamma^{\text{orb}})$. La différence entre les deux notions est plus subtile : un argument élémentaire (voir les propositions 7.8 et 7.17 de [CM14]) montre que l'un des sous-espaces affines maximaux A contenus dans $D = \overline{\mathcal{D}_x(\text{Conv } \Lambda_\Gamma^{\text{orb}})}$ est stable par Γ_x , et que D est à distance de Hausdorff bornée de A . Γ_x agit donc (par isométries affines, donc proprement discontinûment) sur cette variété de dimension $d \geq r$ où r est le rang de Γ_x . Puisque l'action de Γ_x sur A est cocompacte si et seulement si $d = r$, l'action de Γ_x sur D est cocompacte si et seulement si $d = r$.

Un point parabolique borné est donc uniformément borné si et seulement si $\mathcal{D}_x(\Lambda_\Gamma^{\text{orb}})$ reste dans un voisinage tubulaire d'un espace affine de dimension le rang de Γ_x . Il n'est pas difficile de voir alors qu'en géométrie hyperbolique, cette condition est automatiquement vérifiée. En effet, dans le modèle du demi-espace supérieur, puisque les isométries hyperboliques fixant ∞ agissent par isométrie euclidiennes sur chacune des horosphères (qui sont des hyperplans parallèles), tout sous-groupe parabolique fixera une direction de dimension son rang et stabilisera donc les espaces affines dirigés par elle, agissant cocompactement sur eux. La fermeture de l'ensemble limite et le fait que l'action est cocompacte sur ces espaces affines montre que l'ensemble limite reste à une distance bornée de l'un d'eux.

2.3. Finitude géométrique dans le cas strictement convexe à bord régulier. En 2014, Ludovic Marquis et Mickaël Crampon ont introduit une notion de finitude géométrique en géométrie projective convexe, en se concentrant sur le cas des ouverts strictement convexes et \mathcal{C}^1 . Ils sont parvenus à démontrer l'équivalence des 5 propriétés suivantes, analogues aux 5 propriétés du cas hyperbolique étudié par Bowditch. Nous ne présentons ici que le théorème de Crampon et Marquis, puisqu'il contient le cas hyperbolique.

Théorème 2.12 (théorème 8.1 de [CM14]). *Soit Ω un ouvert proprement convexe, strictement convexe et à bord \mathcal{C}^1 , $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ un sous groupe discret, et $M = \Omega/\Gamma$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (GF) *Tout point de $\Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$ est conique ou parabolique uniformément borné ;*
- (TF) *Le quotient $\mathcal{O}_\Gamma/\Gamma$ est une orbifold à bord composée d'une partie compacte et d'un nombre fini de quotients de cusps standards ;*
- (PEC) *La partie épaisse $\mathcal{C}(M)_\varepsilon^e$ du cœur convexe de M est compacte ;*
- (PNC) *La partie non-cuspidale $\mathcal{C}(M)_\varepsilon^{\text{nc}}$ du cœur convexe de M est compacte ;*
- (VF) *Le 1-voisinage du cœur convexe $\mathcal{C}(M)$ de M est de volume fini et Γ est de type fini.*

2.4. Pistes de généralisation. Puisque l'on ne sait pas bien décomposer les variétés projectives non strictement convexes en partie fine et partie épaisse, il n'est pas évident de généraliser un tel théorème au cas général. On peut cependant remarquer que les caractérisations (GF) et (VF) gardent un sens en toute généralité, bien que la possibilité de trouver de nouveaux types de cusps laisse à penser qu'il faudra probablement encore raffiner la condition sur les points paraboliques. Dans cette direction, (TF) pourrait donner des indications de ce à quoi peuvent ressembler les cusps que l'on cherche, une fois que l'on a trouvé de bons candidats à la finitude géométrique.

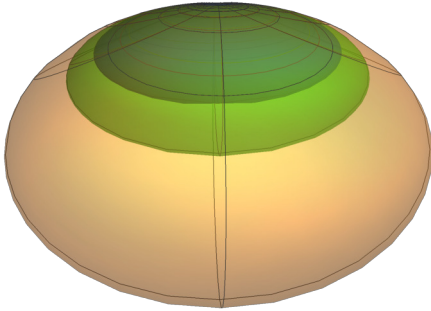
2.4.1. Les polytopes de Coxeter pour trouver de nouveaux cusps. La piste la moins douteuse donc, en l'absence de tout développement théorique précisant la notion de cusp, est d'utiliser (VF) telle qu'elle pour trouver des candidats. C'est là qu'entrent en jeu les pavages de Coxeter. Dans [Mar17], Ludovic Marquis a montré le théorème suivant, qui donne des exemples où Ω n'est pas nécessairement strictement convexe, ni à bord \mathcal{C}^1 .

Théorème 2.13 (théorème 6.2 de [Mar17]). *Soit P un polytope de Coxeter irréductible loxodromique dont les sommets sont elliptiques, paraboliques ou loxodromiques parfaits, alors Ω_P/Γ_P est géométriquement fini (pour (VF)).*

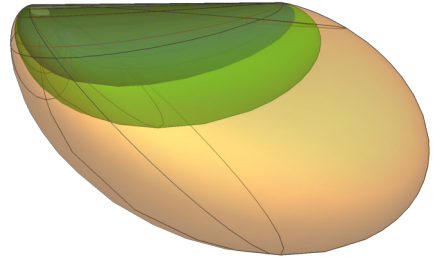
Remarque 2.14. Dès que P a un sommet loxodromique, Ω_P n'est ni strictement convexe, ni à bord \mathcal{C}^1 !

Il est en effet aisé de voir que si P a un sommet loxodromique, alors $\partial\Omega_P$ n'est pas \mathcal{C}^1 (c'est la proposition 1.5 combiné au théorème 1.21). Pour voir qu'un tel exemple n'est pas non-plus strictement convexe, observons d'abord que par le théorème 1.21, un sommet loxodromique p de P n'est pas dans $P \cap \text{Conv}(v_s)$. De plus, par le lemme combinatoire 1.24, pour tout $x \in P \cap \text{Conv}(v_s)$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_P - \{\text{id}\}$, $\gamma x \in \text{Conv}(v_s)$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \Gamma_P$, γP intersecte $\text{Conv}(v_s)$, donc Ω_P est un cône au voisinage de p , et n'est donc pas strictement convexe.

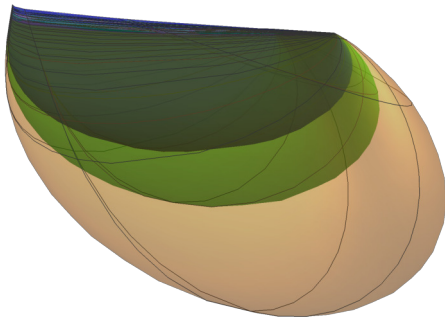
En travaillant sur cet article, je suis parvenu à en généraliser quelques arguments, ce qui permet d'élargir la classe d'exemples. Le fait que l'on ne demande plus à ce que P soit irréductible vient de ce que dans [Mar17], on travaille avec l'ensemble limite proximal, qui demande l'irréductibilité de P pour être bien défini.



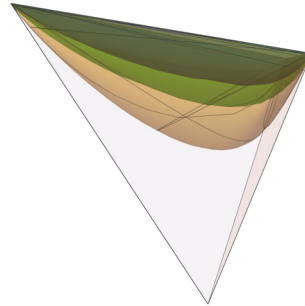
(A) Cusp standard (de type 0), dont le simplexe à l'infini est un point.



(B) Cusp de type 1, dont le simplexe à l'infini est un segment.



(C) Cusp de type 2, donc le simplexe à l'infini est un triangle.



(D) Cusp de type 3, isométrique à un demi-espace de \mathbb{R}^3 . Le simplexe à l'infini est un triangle.

FIGURE 4 – Le feuilletage par horosphères est représenté par les trois surfaces de couleurs distinctes. Ces figures sont issues de [BCL20a].

Théorème 2.15. *Soit P un polytope de Coxeter loxodromique dont tous les sommets sont elliptiques, paraboliques ou de type négatif. Alors P est géométriquement fini (VF) et n'a que des cusps standards si et seulement si toutes les faces non elliptiques de P qui ne sont pas des sommets sont de type négatif.*

Il faut noter cependant que la finitude du volume au niveau des sommets paraboliques est obtenue en montrant qu'ils donnent lieu à des cusps standards, qui sont de volume fini. Ce n'est donc pas ainsi que l'on pourra trouver de nouveaux cusps! En revanche, cette généralisation permet de faire apparaître un nouveau phénomène : si P a une face non elliptique qui n'est pas un sommet, cette face est contenue dans $\partial\Omega_P$, et pourrait rencontrer $\text{Conv}\Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$. Dans ce cas, si Ω_P satisfait (VF), on a trouvé un cusp d'un genre nouveau car la dimension de la singularité du cusp est supérieure à 1, alors que la singularité d'un cusp standard est ponctuelle.

2.4.2. *Cusps généralisés.* L'étude générale de ce à quoi pourrait ressembler un cusp en géométrie projective convexe menée par Cooper, Long et Tillman dans [CLT15 ; CLT18] a conduit Ballas, Cooper et Leitner [BCL20a ; BCL20b] à classifier les cusps de rang maximal en géométrie projective convexe.

Les espaces de cusps correspondants peuvent être compris comme des intermédiaires entre ceux d'un cusp standard et un demi-plan vu dans le modèle projectif (un simplexe) de l'espace euclidien : géométriquement, l'espace du cusp est donné par un feuilletage par des hypersurfaces lisses et strictement convexes (analogue au feuilletage par horosphère de l'espace d'un cusp standard, et le feuilletage par les hyperplans parallèles à l'hyperplan bordant le demi-espace dans le modèle projectif de l'espace euclidien) qui s'accumulent à l'infini sur un simplexe contenu dans le bord de l'espace du cusp, et appelé simplexe à l'infini de l'espace du cusp (voir figure 4). Dans le cas des cusp standard, le simplexe à l'infini est de dimension nulle, et dans le cas du demi-espace euclidien du simplexe, il est de codimension 1.

De façon intéressante, Ballas Cooper et Leitner montrent que tous les cusps généralisés ne sont pas de volume fini : ceux dont le simplexe à l'infini est de dimension maximal sont exactement ceux de volume infini. Cela tend à faire penser que (VF) ne sera plus qu'un cas particulier de la finitude géométrique à terme.

Très récemment, Adva Wolf (doctorante de Steven Kerckhoff) a montré dans sa thèse [Wol20] l'équivalence entre des analogues de (GF) et (TF), où elle adapte la notion de point parabolique borné (transformé dans son cas en ensemble parabolique) pour (GF), et permet aux cusps de (TF) d'être des cusps généralisés de Ballas-Cooper-Leitner. Remarquons qu'elle a toujours besoin d'une hypothèse affaiblie de stricte convexité.

Théorème 2.16 (théorème 6.2.5 de [Wol20]). *Soit Ω un ouvert proprement convexe, et $\Gamma < \text{Aut}(\Omega)$ un sous-groupe discret tel que Ω est strictement convexe en dehors de $\Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (GF) *Tout point de $\Lambda_\Gamma^{\text{orb}}$ est conique ou fait partie d'un ensemble parabolique ;*
- (TF) *Le quotient $\mathcal{O}_\Gamma/\Gamma$ est une orbifold à bord composée d'une partie compacte et d'un nombre fini de cusps généralisés ;*

Ce travail très intéressant ne résout pas la question dans son intégralité car il reste à traiter la question des cusps de rang non maximal, et à bien comprendre la décomposition en partie fine et partie épaisse quand Ω n'est pas strictement convexe.

RÉFÉRENCES

[Ahl66] Lars V. AHLFORS. « Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 55 (1966), p. 251-254. ISSN : 0027-8424 ; 1091-6490/e.

[BCL20a] Samuel A. BALLAS, Daryl COOPER et Arielle LEITNER. « Generalized cusps in real projective manifolds : classification ». English. In : *J. Topol.* 13.4 (2020), p. 1455-1496. ISSN : 1753-8416 ; 1753-8424/e.

[BCL20b] Samuel A. BALLAS, Daryl COOPER et Arielle LEITNER. « The Moduli Space of Marked Generalized Cusps in Real Projective Manifolds ». 2020.

[Ben00] Yves BENOIST. « Automorphismes des cônes convexes ». French. In : *Invent. Math.* 141.1 (2000), p. 149-193. ISSN : 0020-9910 ; 1432-1297/e.

[BM74] Alan F. BEARDON et Bernard MASKIT. « Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra ». English. In : *Acta Math.* 132 (1974), p. 1-12. ISSN : 0001-5962 ; 1871-2509/e.

[Bow93] Brian H. BOWDITCH. « Geometrical finiteness for hyperbolic groups ». In : *J. Funct. Anal.* 113.2 (1993), p. 245-317. ISSN : 0022-1236.

[Bow95] Brian H. BOWDITCH. « Geometrical finiteness with variable negative curvature ». English. In : *Duke Math. J.* 77.1 (1995), p. 229-274. ISSN : 0012-7094 ; 1547-7398/e.

[CLT15] Daryl COOPER, Darren LONG et Stephan TILLMANN. « On convex projective manifolds and cusps ». English. In : *Adv. Math.* 277 (2015), p. 181-251. ISSN : 0001-8708.

- [CLT18] Daryl COOPER, Darren LONG et Stephan TILLMANN. « Deforming convex projective manifolds ». English. In : *Geom. Topol.* 22.3 (2018), p. 1349-1404. ISSN : 1465-3060 ; 1364-0380/e.
- [CM13] Mickaël CRAMPON et Ludovic MARQUIS. « Un lemme de Kazhdan-Margulis-Zassenhaus pour les géométries de Hilbert ». French. In : *Ann. Math. Blaise Pascal* 20.2 (2013), p. 363-376. ISSN : 1259-1734.
- [CM14] Mickaël CRAMPON et Ludovic MARQUIS. « Finitude géométrique en géométrie de Hilbert ». French. In : *Ann. Inst. Fourier* 64.6 (2014), p. 2299-2377. ISSN : 0373-0956 ; 1777-5310/e.
- [DGK17] Jeffrey DANCIGER, François GUÉRITAUD et Fanny KASSEL. « Convex cocompact actions in real projective geometry ». arXiv :1704.08711. 2017.
- [Gre66] L. GREENBERG. « Fundamental polyhedra for Kleinian groups ». English. In : *Ann. Math. (2)* 84 (1966), p. 433-441. ISSN : 0003-486X ; 1939-8980/e.
- [Har93] Pierre de la HARPE. « On Hilbert's Metric for Simplices ». In : *Geometric Group Theory*. Sous la dir. de Graham A. NIBLO et Martin A. Editors ROLLER. T. 1. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1993, 97-119. DOI : 10.1017/CB09780511661860.009.
- [KM69] D. A. KAZHDAN et G. A. MARGULIS. « Beweis einer Vermutung von Selberg ». English. In : *Math. USSR, Sb.* 4 (1969), p. 147-152. ISSN : 0025-5734.
- [Mar17] Ludovic MARQUIS. « Coxeter group in Hilbert geometry ». English. In : *Groups Geom. Dyn.* 11.3 (2017), p. 819-877. ISSN : 1661-7207 ; 1661-7215/e.
- [Mar67] A. MARDEN. « On finitely generated Fuchsian groups ». English. In : *Comment. Math. Helv.* 42 (1967), p. 81-85. ISSN : 0010-2571 ; 1420-8946/e.
- [Mar74] Albert MARDEN. « The geometry of finitely generated Kleinian groups ». English. In : *Ann. Math. (2)* 99 (1974), p. 383-462. ISSN : 0003-486X ; 1939-8980/e.
- [Ser69] Jean-Pierre SERRE. « Cohomologie des groupes discrets ». French. In : *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A* 268 (1969), p. 268-271. ISSN : 0366-6034 ; 0302-8429.
- [Thu80] William THURSTON. *The geometry and topology of three-manifolds*. lecture notes. 1980. URL : <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [Ver05] Constantin VERNICOS. « Introduction aux géométries de Hilbert ». French. In : *Actes de séminaire de théorie spectrale et géométrie. Année 2004-2005*. St. Martin d'Hères : Université de Grenoble I, Institut Fourier, 2005, p. 145-168.
- [Vin72] Ernest B. VINBERG. « Discrete linear groups generated by reflections ». English. In : *Math. USSR, Izv.* 5 (1972), p. 1083-1119. ISSN : 0025-5726.
- [Wol20] Adva WOLF. « Convex Projective Geometrically Finite Structures ». Stanford University. Thèse de doct. 2020.

3. ANNEXE : EXEMPLES DE PAVAGES DE COXETER EN DIMENSION 2

La bibliothèque de calcul vectoriel Asymptote m'a permis de réaliser plusieurs figures afin d'illustrer la variété des pavages de Coxeter, et ce dès la dimension 2! En voici une sélection afin d'illustrer comment la position des polaires permet de dire le type d'une face, et par suite de décrire la géométrie du pavage.

Dans l'ordre, on trouve un carré dont les 2 sommets paraboliques, un elliptique, et un loxodromique; un carré dont tous les sommets sont loxodromiques; un carré qui pave l'espace hyperbolique (donc avec 4 sommets paraboliques); et un triangle ayant un sommet de chaque sorte.

Tous ces exemples sont géométriquement finis (VF) par le théorème 2.15.

