Ponts Dimensionnels en Théorie des Catégories:
Une Étude des Limites et Colimites dans **Cat**

Pablo Bustillo Vazquez
Supervisé par Dorette Pronk et Martin Szyld (Dalhousie University, Canada)

Résumé

Nous introduisons une brève historique de la théorie des catégories et des théories supérieures. La dimension 2 est présentée comme un pont permettant de comprendre les enjeux des dimensions supérieures. Dans le but d'explorer ce pont, nous nous intéressons aux limites et colimites dans l'univers d'enrichissement de la théorie : **Cat**. Cela nous mène vers une étude de la construction de Grothendieck dans un nouveau setting *lax*, puis dans une étude du calcul de fractions et des bicatégories filtrées. Les liens avec la commutativité de limites et colimites, ainsi qu'avec l'étude des doctrines de limites est mentionné comme possible horizon. Enfin nous concluons sur l'efficacité de ce pont dimensionnel.

Table des matières

1 Introduction à la Théorie des Catégories

1.1 Premier Pas en Dimension 1

La théorie des catégories est née en septembre 1945 sous la plume de Samuel “Sammy” Eilenberg et Saunders Mac Lane dans l'article fondateur “General Theory of Natural Equivalences” [EM45]. Dans cet article, ils introduisent le concept de catégories et de ”foncteurs” dans le but de définir la naturalité en mathématiques. L'idée essentielle qui émergeait, à travers leur travail, est que pour comprendre une structure mathématique, il faut se focaliser non pas sur l'objet de cette structure, mais sur les transformations - ou morphismes - qui animent ces objets. Ainsi une construction qui est compatible avec ces morphismes est appellée *foncteur*, et une comparaison de deux constructions qui commute avec ces morphismes est dite *transformation naturelle.*

Définition 1.1 (Catégorie)**.** *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de :*

- *une collection d'**objets** $a, b, c, \ldots : \mathcal{C}$* [1]*,*
- *pour tout $a, b \colon \mathcal{C}$, une collection de **morphismes** $u, v, w, \ldots : a \to b$ de **domaine** a et de **codomaine** b (on dénome $a \to b$ ou $\mathcal{C}(a, b)$ cette collection),*
- *pour tout $a \colon \mathcal{C}$, un morphisme **identité** $1_a \colon a \to a$,*
- *pour tout $a, b, c \colon \mathcal{C}$, une **composition** (dont le symbole $\circ$ est souvent omis pour laisser place à une simple juxtaposition)*

$$\circ \colon (b \to c) \times (a \to b) \longrightarrow (a \to c)$$

tel qu'un certain nombre d'axiomes soient vérifiés :

(i) ***Unité à droite :*** *pour tout $u \colon a \to b$, $u1_a = u$*

(ii) ***Unité à gauche :*** *pour tout $u \colon a \to b$, $1_b u = u$*

(iii) ***Associativité :*** *pour tout $u \colon c \to d$, $v \colon b \to c$ et $w \colon a \to b$, $(uv)w = u(vw)$*

Remarque 1.2 (Exemples de catégories)**.** Par exemple, on a la catégorie **Set** dont les objets sont les ensembles et les morphismes les fonctions (cette définition dépend tout particulièrement des fondations utilisées pour notre théorie), ou encore la catégorie **Grp** des groupes et morphismes de groupes.

La théorie des catégories est née au départ de plusieurs motivations : donner un cadre théorique aux structures algébriques, formaliser la théorie de la cohomologie et des modules,... Elle fut essentiellement construite par les algébristes et les topologues tentant de formaliser leurs domaines. Un acteur très important dans le développement des catégories est bien sûr le français Alexandre Grothendieck, père fondateur de la géométrie algébrique moderne. Il développa les notions de faisceaux, de catégories abéliennes, de cohomologie, de fibrations,etc. toutes ayant pris une place centrale dans le domaine. Il fut aussi un des premiers visionnaires de la théorie des catégories infinies et de son importance en topologie, qu'il décrit dans son fameux manuscrit “A la poursuite des Champs” qu'il envoie à divers mathématiciens.

1.2 Les Dimensions Supérieures

L'idée de Saunders et Mac Lane - de glisser l'attention de l'objet vers le morphisme - est le pilier de la théorie des catégories. Vingt ans plus tard en 1965 [Ehr65], Charles Ehresmann comprend que cette idée peut s'appliquer à elle-même : quitte à se concentrer sur l'objet qu'est un morphisme, on devrait plutôt se concentrer sur les morphismes *entre* morphismes (appelés 2-cellules). Ainsi naît la notion de *2-catégorie.* Bien évidemment, il n'y a pas vraiment de raisons de s'arrêter là, et Ehresmann définit dans le même article la notion de *n-catégorie.*

1. On nomme l'appartenance d'un objet à une catégorie par le symbole “: ” et non “$\in$” qui a une connotation ensembliste trop marquée, en suivant l'esprit du typage en logique.

Illustration 1.3. *Voici une visualisation de la notion de cellules :*

un objet ou 0-*cellule*	un morphisme ou 1-*cellule*	2-*cellule*	3-*cellule*	...
$\bullet$	$\bullet \longrightarrow \bullet$	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Rrightarrow\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$	

Peu de temps après, Jean Bénabou en 1967 [Bén67], comprend que la généralisation d'Ehresmann aux dimensions supérieures est trop *stricte*. Il invente la notion de *bicatégorie*, qui est la généralisation appropriée à la dimension 2, et pour la première fois on observe un phénomène dangereux : la complexité de la définition semble augmenter exponentiellement avec la dimension. Si la définition de catégorie tient essentiellement en un paragraphe, la définition de bicatégorie semble demander une bonne page.

Dans les décennies qui ont suivi, beaucoup de tentatives de passer outre la dimension 2 ont été entreprises. En 1995, Robert Gordon, John Power et Ross Street [GPS95] publient la définition de *tricatégorie*, généralisation appropriée à la dimension 3, étalée sur 5 pages. Dans la même année, à la demande de Ross Street, Todd Trimble [Tri65] invente la définition de *tétracatégorie* qu'il ne publie pas et dont la définition s'étale sur une bonne vingtaine de pages. Dans la même période, il s'intéresse à la définition de *n-catégories faibles* en général. Comme énuméré presque exhaustivement par Tom Leinster en 2001 [Lei01], il existe une multitude de tentatives de définir les *n-catégories faibles*. Ces définitions ont pour but de généraliser les cas connus en basse dimension (1,2 et même idéalement 3, 4) mais aucune d'entre elles n'est considérée comme "la bonne". Il est en effet particulièrement compliqué de comparer ces définitions. Une autre famille de définitions tente quelque chose d'encore plus exotique : définir immédiatement des *catégories infinies*. De nouveau une grande famille de définitions existe et les liens entre ces définitions sont fort peu clairs. Parmi celles-ci, essentiellement seule la définition de $(\infty, 1)$-catégorie (un cas très particulier largement exploré par Lurie [Lur09], n'englobant même pas les bicatégories, ou toutes les n-cellules sont inversibles pour $n > 1$) a pu mettre la communauté d'accord.

Cette quête de la dimension supérieure fut tout particulièrement motivée par la topologie algébrique et la géométrie. En effet, par exemple, Grothendieck avait déjà remarqué qu'un espace topologique est essentiellement un ∞-groupoïde ou $(\infty, 0)$-catégorie. La théorie des Topos supérieures et de la géométrie dérivée algébrique de Lurie [Lur09] précise aussi l'idée qu'un espace géométrique est essentiellement une $(\infty, 1)$-catégorie. De nombreux développements existent maintenant en géométrie et topologie, poussant de plus en plus de chercheurs à s'intéresser aux catégories supérieures ou infinies. Les liens puissants avec la logique, et en particulier avec la théorie homotopique des types, poussent aussi les catégoriciens à concrétiser leurs désirs d'une théorie des catégories infinies.

Un curieux phénomène s'est établi dans le domaine. On parle assez régulièrement de catégories infinies sans en avoir ne serait-ce qu'une définition convaincante. Les catégoriciens pourraient écrire une longue liste de résultats qu'ils espèrent vrais dans une théorie des catégories infinies, dont ils sont même tous convaincus de la véracité, même si la théorie elle-même n'existe pas. Pour illustrer voici, par exemple, deux résultats considérés comme résultats "tests" que pourraient et devraient avoir une telle théorie :

- **Delooping Hypothesis :** Une catégorie monoïdale est une catégorie munie d'un produit sur ses objets. Une hiérarchie de la commutativité de ce produit peut être mise en évidence :
  - 1-monoïdal signifie non-commutatif
  - 2-monoïdal permet d'établir une relation de commutativité au niveau des objets, mais cette relation crée une non-commutativité au niveau des morphismes : on dit que la catégorie est tressée,
  - ...
  - ∞-monoïdal signifierait que le produit est parfaitement symétrique à tous les niveaux

  La **delooping hypothesis** prétend alors qu'une catégorie infinie n-monoïdale, est essentiellement la même chose qu'une catégorie infinie $(n-1)$-simplement connectée (à tous les niveaux $0, \ldots, n-1$ il existe essentiellement une unique cellule).

- **Stabilization Hypothesis :** Similaire à l'idée précédente, cette conjecture affirme qu'une catégorie de dimension finie n ne peut être monoïdale que de $n+2$ manières différentes.

Essentiellement, la théorie des catégories infinies ne devrait pas être si différente de la théorie des catégories classiques. Dans chacune des théories énoncées ci-dessus, si elles ont été suffisament développées, on a pu démontrer le lemme de Yoneda, définir les notions d'adjonctions, d'équivalences de catégories, de limites, de colimites,... et l'on s'attend aussi à ce que ces résultats apparaissent dans une potentielle théorie infinie. La difficulté cependant réside dans le fait que notre habitude en dimension 1 nous cache parfois la subtilité de certaines de ces notions dans des théories supérieures. Cette subtilité commence déjà à se dévoiler lorsque l'on étudie la moins bien connue théorie des bicatégories.

1.3 Théorie des Bicatégories : une zone de test

Pour comprendre précisément l'idée de catégories supérieures, il est important d'étudier comment certains concepts très basiques en dimension 1 se généralisent à d'autres dimensions. La théorie des bicatégories est un candidat idéal pour étudier ce genre de généralisations, puisqu'elle met en évidence les difficultés d'une telle généralisation (invisible dans la théorie des $(\infty,1)$-catégories par exemple), tout en conservant une simplicité permettant de les réaliser.

Définition 1.4 (Bicatégorie)**.** *Une bicatégorie $\mathcal{B}$ est la donnée de :*

- *une collection d'objets $a, b, c, \ldots : \mathcal{B}$,*
- *pour tout $a, b \colon \mathcal{C}$, une **catégorie** de morphismes $u, v, w, \ldots : a \to b$ de domaine a et de codomaine b (on dénomme $a \to b$ ou $\mathcal{C}(a,b)$ cette collection),*
- *pour tout $a \colon \mathcal{C}$, un morphisme identité $1_a \colon a \to a$,*
- *pour tout $a, b, c \colon \mathcal{C}$, une composition fonctorielle*

$$\circ \colon (b \to c) \times (a \to b) \longrightarrow (a \to c)$$

- *pour tout $u \colon a \to b$, un **unitor de droite** $r_u \colon u1_a \simeq u$ naturel en la variable u*
- *pour tout $u \colon a \to b$, un **unitor de gauche** $l_u \colon 1_b u \simeq u$ naturel en la variable u*
- *pour tout $u \colon c \to d$, $v \colon b \to c$ et $w \colon a \to b$, un **associator** $a_{u,v,w} \colon (uv)w \simeq u(vw)$ naturel en les variables u, v, w*

tel qu'un certain nombre d'axiomes soient vérifiés :

(i) ***Axiome d'unité :*** *pour tout $u \colon b \to c$ et $v \colon a \to b$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(u1_b)v \arrow[rr, "a_{u,v,w}"] \arrow[dr, "r_u \star v"'] & & y(1_b v) \arrow[dl, "u \star r_v"] \\
& uv &
\end{tikzcd}$$

(ii) ***Axiome du pentagone :*** *pour tout $k \colon d \to e$, $h \colon c \to d$, $g \colon b \to c$ et $f \colon a \to b$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
& (kh)(gf) \arrow[dr, "a_{k,g,gf}"] & \\
((kh)g)f \arrow[ur, "a_{kh,g,f}"] \arrow[d, "a_{k,h,g} \star f"'] & & k(h(gf)) \\
(k(hg))f \arrow[rr, "a_{k,hg,f}"'] & & k((hg)f) \arrow[u, "k \star a_{h,g,f}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.5 (Premiers aspects du principe d'équivalence)**.** On peut déjà remarquer un phénomène intéressant : ce qui était un *axiome* (égalité) en dimension 1, devient une *donnée* (2-cellule inversible) en dimension 2. Ce phénomène est précisément ce qui a motivé les définitions de tricatégories et tétracatégories.

Étrangement, un des grands avantages de la théorie des bicatégories est qu'elle est sensiblement plus technique à manipuler. Les mathématiciens anglophones reconnaitraient tout particulièrement le terme "*abstract nonsense*" dans cette théorie. Riches en diagrammes obscurs, en formules illisibles, en notations dantesques,... les articles en théorie des bicatégories ont tout pour traumatiser un novice. Pourtant, c'est précisément sa force. Cette apparente technicité met au grand jour des subtilités qui n'apparaissent tout simplement pas en théorie des catégories ordinaires ou même en théorie des $(\infty, 1)$-catégories (les deux théories les plus étudiées). Mais aussi, elle nous force à trouver des manières de la dépasser : les définitions classiques en théorie de catégories, en apparence innocentes, peuvent s'avérer d'une complexité absolument létale en dimension 2, ce qui force le chercheur à trouver des formulations "*sans-dimension*" de ces idées.

Dans les prochaines sections, nous décrivons plusieurs sujets, forts liés les uns aux autres, en théorie des catégories et la quête de leur adaptation à la dimension 2.

2 Limites et Colimites dans Set, Cat, Bicat,etc

Un aspect fondamental de la théorie des catégories est l'idée de limites et colimites. Ces notions sont parmi les premières à être enseignées aux étudiants, et sont centrales dans toute la théorie. Rappelons brièvement leurs définitions en théorie ordinaire des catégories :

Définition 2.1 (Limites et Colimites)**.** *Soit $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ des catégories, et $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur. On a naturellement un foncteur $\Delta\colon \mathcal{C} \to [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ qui associe à un objet c le foncteur constant prenant la valeur c. Un cône de D est la donnée d'une paire (a, α) où a est un objet de $\mathcal{C}$ et $\alpha\colon \Delta(a) \to D$ est une transformation naturelle. Une limite, ou cône limitant, est un cône (a, α) tel que, pour tout autre cône (b, β), il existe un unique morphisme $f\colon b \to a$ tel que*

$$\beta = \alpha \circ \Delta(f)$$

Duellement, les notions de cocônes et colimites sont les notions de cônes et limites associées à $D^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

L'étude des limites et colimites repose tout particulièrement sur notre capacité à calculer des limites et colimites dans **"l'univers d'enrichissement"**. Typiquement en théorie ordinaire des catégories, le fameux lemme de Yoneda nous donne un plongement

$$\mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$$

qui nous permet de faire un lien entre le comportement des limites dans une catégorie et dans **Set**, la catégorie des ensembles. Ce genre de foncteurs est très courant. Typiquement, une catégorie $\mathcal{C}$ peut être vue comme une théorie (les propriétés de base de la catégorie définissant le type de logique dans laquelle se formule cette théorie) et un foncteur peut être vu comme un modèle (quand il préserve ces propriétés). Ainsi les catégories de foncteurs de la forme $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$ (et certaines sous catégories à propriétés intéressantes) sont des catégories de modèles d'une théorie : la catégorie **Grp** mentionnée précédemment peut par exemple s'écrire comme une sous-catégorie de la forme. Comprendre les (co)limites dans **Set** permet ainsi de comprendre les (co)limites de structures algébriques par exemple. Similairement, en théorie des bicatégories, le lemme de Yoneda s'écrit

$$\mathcal{B} \longrightarrow [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat}]$$

ce qui nous encourage à étudier les notions de limites et colimites dans la 2-catégorie **Cat**.

En dimension supérieure, aucune définition de limite ou colimite n'est universellement reconnue comme étant la bonne. Une innocente généralisation de la définition ci-dessus donne la notion de *(co)limite conicale* qui est insuffisante pour pratiquer la théorie des bicatégories. Seules deux définitions de (co)limites en dimension 2 sont suffisamment complètes pour travailler : les *σ-(co)limites* développées par Martin Szyld [DDS18] qui jouent un rôle important dans certains résultats techniques, et les *(co)limites pesées* de pseudo-foncteurs entre bicatégories qui sont un formalisme général et puissant pour parler de (co)limites. D'autres notions incomplètes, telles que les *(co)limites lax*, apparaissent naturellement dans l'étude des dimensions supérieures. Cette situation illustre parfaitement le danger de la simplicité de la théorie des catégories ordinaires. En effet, jamais il ne viendrait à l'esprit d'un catégoricien, formellement concentré sur l'étude de la première dimension, de définir un poids. Pourtant, l'étude des poids apporte un formalisme très intéressant qui, même en dimension 1, simplifie certains résultats (par exemple, pour le lecteur averti, la notion de *foncteur initial* est bien plus naturelle dans l'étude des (co)limites pesées).

2.0.1 Limites dans Cat

Dans **Set**, un résultat très classique est que la limite de $D\colon \mathcal{I} \to \mathbf{Set}$ est l'ensemble des collections compatibles d'éléments des ensembles $D(i)$:

$$\left\{ (x_i)_{i\in\mathcal{I}_0} \in \prod_{i\in\mathcal{I}_0} D(i) \mid \forall u\colon i \to j,\ \ D(u)(x_i) = x_j \right\}$$

Cette formule semble particulièrement technique à généraliser en dimension 2. En effet, une définition explicite de la forme de la catégorie limite pourrait être bien plus pénible. Opportunément, il est connu que l'on peut la reformuler assez simplement par la forme suivante

$$\varprojlim D = [\mathcal{I}, \mathbf{Set}](\Delta(\star), D)$$

de l'ensemble des transformations naturelles du foncteur constant sur le singleton, vers le diagramme D. Cette formule se généralise tout simplement aux dimensions supérieures pour n'importe quelle notion de limites. On a notamment pour le cas σ

$$\varprojlim D = [\mathcal{I}, \mathbf{Cat}]_\sigma(\Delta(\star), D)$$

ou encore pour le cas pesé

$$\varprojlim D = [\mathcal{I}, \mathbf{Cat}](W, D)$$

Cette formule ne demande pas de long développement : elle fait essentiellement partie de la même famille de résultats que le lemme de Yoneda, ou le currying,... On retrouve la formule dans les travaux de Martin Szyld [DDS18] en théorie des 2-catégories strictes, et nous l'avons étendue à la théorie des bicatégories. Il s'agit d'un premier exemple de passage à une formule *sans-dimension*.

2.0.2 Colimites dans Cat

Dans **Set**, un résultat très classique est que la colimite de $D\colon \mathcal{I} \to \mathbf{Set}$ est l'union disjointe des ensembles $D(i)$, quotientée par une certaine relation assurant que chaque élément de la limite soit uniquement représenté :

$$\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}_0} D(i)/\sim$$

où $\sim$ est généré par $(i, x) \sim (j, D(u)(x))$ pour tout $u\colon i \to j$ et tout $x \in D(i)$.

Il est possible de généraliser (naïvement) cette formule à la dimension 2, en construisant une colimite de catégories comme étant une catégorie générée par une collection d'objets, une collection de morphismes, et une collection de relations entre ces morphismes. Cette approche pose différents problèmes. D'une part, elle est très technique et donc il est difficile de concevoir une généralisation facile à des dimensions plus élevées que 2. D'autre part, elle n'est pas très pratique à manipuler. Une autre approche est connue dans la théorie des 2-catégories strictes : il est possible d'écrire les colimites dans **Cat** comme étant des *localisations* de ce qu'on appelle des *constructions de Grothendieck*.

2.1 Construction de Grothendieck

La construction de Grothendieck est une manipulation très classique en théorie des catégories, qui associe à un pseudo-foncteur $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$ une catégorie $\int F$. Cette catégorie joue d'une certaine manière le rôle d'une "union disjointe de catégories", généralisant cette notion de **Set** à **Cat**. Elle est utilisée et étudiée dans le Séminaire de Géométrie Algébrique [AGV71] pour son intérêt dans l'étude des *stacks*. On remarquera ici que l'on a un *décalage dimensionnel* qui s'avèrera d'importance plus tard : $\mathcal{C}$ est de dimension 1 alors que **Cat** est de dimension 2. Cette construction a quelques propriétés intéressantes à généraliser en dimensions supérieures :

- (i) en tant que 2-foncteur $[\mathcal{C}, \mathbf{Cat}] \to \mathbf{Cat}/\mathcal{C}$, la construction est un plongement,
- (ii) l'image essentielle de ce plongement contient exactement ce qu'on appelle les *fibrations* et les *foncteurs cartésiens*
- (iii) la catégorie $\int F$ est exactement la colimite *lax* de F

La généralisation de ce concept à la dimension 2 est étudiée par Claudio Hermida en 1999 [Her99], puis plus récemment par Mitchell Buckley en 2014 [Buc13]. Dans ces travaux, Buckley définit la construction de Grothendieck associée à un *trihomomorphisme* d'une bicatégorie vers **Bicat**. Buckley démontre ainsi explicitement les deux premiers résultats $(i - ii)$. L'une des idées de notre travail est d'étendre les travaux de Buckley à une situation légèrement plus générale. L'intérêt de cet effort est qu'il permet d'incorporer une preuve très simple du fait que $(i) \Rightarrow (iii)$. Un autre intérêt de cette généralisation est qu'elle ouvre la voie à une manière plus fondamentale de démontrer les résultats autour de la construction de Grothendieck. En effet, une des idées que nous voulons explorer à l'avenir est celle de développer une généralisation des *extensions de Kan ponctuelles* en dimension 2 qui permettrait de démontrer (i), suivant certaines idées de Ross Street [Str74].

Le résultat de Buckley porte sur les objets (tricatégories), morphismes (trihomomorphismes), 2-cellules (trinatural transformations), 3-cellules (tridmodifications) et 4-cellules (perturbations) issues naturellement de la théorie des tricatégories developpée par Gordon, Power et Street [GPS95]. Or, quand on considère la construction de Grothendieck comme une formule, cette formule reste toujours valide dans un cadre plus général où moins d'hypothèses sont demandées sur ces cellules supérieures : le cas *lax*. Ainsi, la construction de Grothendieck en dimension 2 fait toujours sens avec des foncteurs lax, transformations naturelles lax, trimodifications et perturbations.

Cette nouvelle approche exploite le décalage dimensionnel inhérent à la construction de Grothendieck pour en dériver les définitions en dimension 3 à partir de celles en dimension 2, ce qui n'est pas sans intérêt vu la difficulté de passer d'une dimension à l'autre.

Utilisant ce nouveau résultat, nous avons établi une méthode permettant de calculer n'importe quelle forme de colimites dans l'univers d'enrichissement dès que l'on a établi une construction de Grothendieck *lax* respectant (i). La colimite s'écrit alors tout le temps comme une construction de Grothendieck "localisée" à une famille de morphismes. La localisation est une autre construction très fondamentale en théorie des catégories ordinaire : c'est ce qui remplace la notion de quotient dans **Set**. Malheureusement, il est particulièrement compliqué de décrire une localisation en général en dimension 2.

2.2 Calcul de Fractions et Bicatégorie Filtrée

Le *calcul de fractions* est l'une des méthodes les plus connues pour localiser une bicatégorie. La définition de calcul de fraction fut introduite en dimension 2 par Dorette Pronk [Pro96], puis améliorée un peu plus tard de nouveau par Pronk [PS21]. Sous sa supervision, nous avons développé une nouvelle définition que nous pensons être le niveau maximal de généralité possible :

Définition 2.2 (Calcul de Fractions)**.** *Soit $\mathcal{B}$ une bicatégorie et $\mathcal{W}$ une famille de morphismes de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{W}$ admet un calcul de fraction dès que*[2] *:*

- ***Weak :*** *pour tout $b\colon \mathcal{B}$, il existe $a\colon \mathcal{B}$ et $w\colon a \xrightarrow{\circ} b$,* **et** *pour toute paire composable de morphismes dans $\mathcal{W}$,*

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "v"] & c \arrow[r, "w"] & d \end{tikzcd}$$

il existe $a\colon \mathcal{B}$, $s \to b$ et $u \xrightarrow{\circ} d$ tel que $u \simeq (wv)s$

- ***Frac0 :*** *pour tout $a, b, c\colon \mathcal{B}$ et $w\colon a \xrightarrow{\circ} b$, $f\colon c \to b$, il existe un objet $d\colon \mathcal{B}$, des morphismes $h\colon d \to a$, $v\colon d \xrightarrow{\circ} c$ et une 2-cellule inversible $\alpha\colon fv \simeq wh$*

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[d, dotted, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\underset{\sim}{\Longrightarrow}}"] & a \arrow[d, "w"] \\ c \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

- ***Frac1 :*** *pour tout $b, c, d\colon \mathcal{B}$, $w\colon c \xrightarrow{\circ} d$, $f, g\colon b \to c$, et $\alpha\colon wf \to wg$, il existe un objet $a\colon \mathcal{B}$, un morphisme $u\colon a \xrightarrow{\circ} b$, et une 2-cellule $\beta\colon fu \to gu$ tels que $\alpha \star u = w \star \beta$:*

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[rr, bend left=50, "wf"] \arrow[rr, bend right=50, "wg"'] & c \arrow[r, "w"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & d \\ & {} & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[rr, dotted, bend left=50, "fu"] \arrow[rr, dotted, bend right=50, "gu"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"'] & b \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dotted, "u"] & b \arrow[r, bend left=50, "wf"] \arrow[r, bend right=50, "wg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & d \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, dotted, bend left=50, "fu"] \arrow[r, dotted, bend right=50, "gu"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c \arrow[r, "w"] & d \end{tikzcd}$$

- ***Frac2 :*** *pour tout $b, c, d\colon \mathcal{B}$, $w\colon c \xrightarrow{\circ} d$, $f, g\colon b \to c$, et $\alpha, \beta\colon f \to g$ tels que $w \star \alpha = w \star \beta$, il existe un objet $a\colon \mathcal{B}$ et un morphisme $u\colon a \xrightarrow{\circ} b$, tels que $\alpha \star u = \beta \star u$:*

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow\ \Downarrow\alpha"] & c \arrow[r, "w"] & d \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} a \arrow[r, dotted, "u"] & b \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow\ \Downarrow\alpha"] & c \end{tikzcd}$$

Etant donné qu'une localisation est nécessaire pour calculer des colimites, et que le calcul de fractions est un cas particulier de localisation bien étudié, il est naturel de se demander quelles colimites peuvent être calculées ainsi. La réponse à cette question est que l'on peut calculer toutes les colimites filtrées. La notion de colimites filtrées en dimension 2 est légèrement plus complexe que celle en dimension 1. Selon le type de colimites que l'on étudie (conicale, σ ou pesée), la notion de diagramme filtré varie.

Dans le cas conical, on obtient la notion de *bicatégorie filtrée* :

Définition 2.3 (Bicatégorie Filtrée)**.** *Soit $\mathcal{B}$ une bicatégorie. On dit que $\mathcal{B}$ est filtrée dès que :*

- ***F0 :*** *pour tout $a, b\colon \mathcal{B}$, il existe un objet $c\colon \mathcal{B}$ et un morphisme $u\colon a \to c\colon \mathcal{B}$, $v \to c\colon \mathcal{B}$*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ & c \\ b \arrow[ur, dotted, "v"'] & \end{tikzcd}$$

2. On marque ici les morphismes de $\mathcal{W}$ avec un $\circ$ pour alléger le texte.

- ***F1 :*** *pour toute paire de morphismes parallèles* $f, g\colon a \to b\colon \mathcal{B}$*, il existe un morphisme* $u\colon b \to c\colon \mathcal{B}$ *et une* 2*-cellule inversible* $\gamma\colon uf \simeq ug\colon a \to c\colon \mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[rr, dotted, bend left=60, "uf"] \arrow[rr, dotted, bend right=60, "ug"'] & B \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \wr\gamma"] & C \\ & & \end{tikzcd}$$

- ***F2 :*** *pour toute paire de* 2*-cellules parallèles* $\gamma_1, \gamma_2\colon f \to g\colon a \to b\colon \mathcal{B}$*, il existe un morphisme* $u\colon b \to c\colon \mathcal{B}$ *tel que* $u \star \gamma_1 = u \star \gamma_2$ *:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma_1"] & B \arrow[r, dotted, "u"] & C \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma_2"] & B \arrow[r, dotted, "u"] & C \end{tikzcd}$$

Dans le cas de σ-diagrammes pour les 2-catégories strictes, Szyld [DDS18] obtient une notion très similaire de bicatégorie σ-filtrée. Dans son article, il démontre aussi pour les 2-catégories strictes, que le cas pesé donnerait la notion de foncteur *plat*. Explorer ces deux aspects dans la théorie des bicatégories est un objectif à court terme de notre travail.

2.3 Conjectures : une approche plus diagrammatique

Il y a plusieurs manières de définir une catégorie filtrée en dimension 1 :

(*i*) une catégorie respectant essentiellement les axiomes **F0** et **F1**,

(*ii*) une catégorie où tout diagramme fini à un cocône,

(*iii*) une catégorie, vue comme forme de diagramme de colimite, dont les colimites commutent avec toutes les limites finies dans **Set**

Similairement, en dimension 2, on peut aussi définir une bicatégorie filtrée par ces deux premières manières. La similarité entre les axiomes **F0-2** et **Frac0-2** pousse à se poser la question suivante : est-ce possible de définir les calculs de fractions avec une forme axiomatique semblable à (*ii*) ? Nous avons répondu à cette question par l'affirmative en dimension 1, et sommes proches de finir la même approche en dimension 2. La difficulté réside dans le fait que nous aurions besoin de définir la localisation d'une bicatégorie par n'importe quelle famille de morphismes, et que ce résultat est particulièrement long à écrire. Néanmoins, en supposant que la localisation fonctionne comme conjecturé, nous pensons pouvoir démontrer que :

Conjecture 2.4 (Calcul de Fractions)**.** *Soit* $\mathcal{B}$ *une bicatégorie et* $\mathcal{W}$ *une famille de morphismes. Alors* $\mathcal{W}$ *est un calcul de fractions si et seulement si :*

- ***Frac :*** *pour toute bicatégorie* $\mathcal{I}$*, pour toute famille de morphisme* $\mathcal{W}_\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{I}$*, pour tout objet* $i_0\colon \mathcal{I}$*, pour tout* $W : \mathcal{I} \to \mathbf{Cat}$ *sous-poids fini de* $\mathcal{I}[\mathcal{W}_\mathcal{I}^{-1}](i_0, -)$*, pour tout diagramme* $F : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ *qui envoie les morphismes de* $\mathcal{W}_\mathcal{I}$ *sur ceux de* $\mathcal{W}$*, il existe un* W*-cône de* F *telle que la projection, si elle existe, correspondant à* 1_{i_0} *est dans* $\mathcal{W}$

Cette conjecture permet potentiellement d'établir un premier lien entre : poids finis, bicatégories filtrées et calcul de fractions. Ce lien ouvre la voie à se demander : est-ce possible de définir de nouvelles classes de calculs de fractions, associées à d'autres classes de colimites, en changeant le fait que la classe de poids considérée dans les définitions est celle des poids finis ? La définition (*iii*) est aussi intéressante à pousser en dimension 2. Serait-ce possible que les classes de colimites mentionnées ci-dessus, obtenues avec une nouvelle famille de poids, soient exactement celles commutant, dans **Cat**, avec les limites de la famille de diagrammes considérée ?

L'idée d'étudier des classes de limites et colimites, aussi appellées *doctrines*, a été initié par Adámek, Borceuxb, Lack et Rosický en 2000 en dimension 1 dans leur papier "A classication of accessible categories" [ABLR02]. En utilisant les outils développés en théorie des bicatégories, à travers ces travaux, nous espérons pouvoir nous pencher bientôt sur une étude similaire à la leur, en dimension 2.

3 Conclusion

La quête d'une théorie unificatrice et universelle des catégories infinies est maintenant presque considérée comme un mirage. Après des décennies de découvertes en dimensions supérieures, aucune théorie ne semble englober l'entièreté des cas, ou convaincre l'entièreté des mathématiciens. Finalement assez peu de propriétés d'une telle potentielle théorie sont connues. Il a été mentionné dans la section 1.2 des idées telles que la "delooping hypothesis" ou la "stabilization hypothesis", auxquelles on pourrait rajouter l'"homotopy hypothesis" de Grothendieck, que l'on considère comme étant des traits voulus d'une telle théorie. Pourtant certains aspects plus simples, tels que la manière correcte de définir des (co)limites, les adjonctions ou encore les extensions de Kan, ne font cependant pas l'unanimité. Un des objectifs personnels que je me suis fixé à travers cette étude, est de tenter de comprendre l'essence infinie-dimensionnelle derrière ces notions de bases. La notion de (co)limite, tout particulièrement, m'est apparue comme un sujet d'étude pertinent. En effet, c'est un concept très terre-à-terre mais dont l'étude a un impact significatif, et qui nécessite toutes ces autres notions complexes (construction de Grothendieck, localisation, extensions de Kan, adjonctions,...).

Lors de cette étude, j'ai pu observer cette notion de "ponts dimensionnels" à multiples reprises. Dans un premier temps dans l'intérêt du formalisme des poids, ensuite dans les approches pour établir des formules *sans-dimension* dans **Cat**, ou enfin dans la nouvelle définition du calcul de fractions. Viser une approche neutre dimensionellement à la théorie des catégories est peut-être un premier pas vers une tentative un peu différente de créer une théorie infinie, une tentative plus syntaxique. A long terme, j'espère pouvoir étudier ce qu'on pourrait appeler une "directed homotopy type theory" : une théorie parfaitement syntaxique des catégories infinies, dont le choix des constructeurs de types serait profondément inspiré par ces formules *sans-dimensions*.

En attendant, dans un objectif à court terme plus réaliste, je pense qu'il serait très intéressant d'explorer une version bicatégorique des doctrines de limites. L'objectif serait alors d'établir un formalisme unifiant toutes ces formules et définitions *sans-dimensions* déjà développées, et de consolider la compréhension de certaines notions (telle que la platitude d'un foncteur ou la commutativité de limites). La théorie des bicatégories est, à nouveau, une théorie "test" pratique pour cette étude, puisqu'elle force l'usage de poids et donc nécessite une généralisation du formalisme.

Références

[ABLR02] Jiři Adámek, Francis Borceux, Stephen Lack, and Jiři Rosický. A classification of accessible categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 175(1) :7–30, 2002. Special Volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly.

[AGV71] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1971.

[Bén67] Jean Bénabou. Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, pages 1–77, Berlin, Heidelberg, 1967. Springer Berlin Heidelberg.

[Buc13] Mitchell Buckley. Fibred 2-categories and bicategories, 2013.

[DDS18] M. E. Descotte, E. J. Dubuc, and M. Szyld. Sigma limits in 2-categories and flat pseudofunctors, 2018.

[Ehr65] Charles Ehresmann. *Catégories et Structures*. Paris : Dunod, 1965.

[EM45] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2) :231–294, 1945.

[GPS95] R. Gordon, A.J. Power, and R. Street. *Coherence for Tricategories*. Number no. 558 in American Mathematical Society : Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1995.

[Her99] Claudio Hermida. Some properties of fib as a fibred 2-category. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 134(1) :83–109, 1999.

[Lei01] T. Leinster. A survey of definitions of n-category. *arXiv : Category Theory*, 2001.

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory.* Princeton University Press, 2009.

[Pro96] Dorette A. Pronk. Etendues and stacks as bicategories of fractions. *Compositio Mathematica*, 102(3) :243–303, 1996.

[PS21] Dorette Pronk and Laura Scull. Bicategories of fractions revisited : towards small homs and canonical 2-cells, 2021.

[Str74] Ross Street. Fibrations and yoneda's lemma in a 2-category. In Gregory M. Kelly, editor, *Category Seminar*, pages 104–133, Berlin, Heidelberg, 1974. Springer Berlin Heidelberg.

[Tri65] Todd Trimble. Notes on tetracategories. `https://math.ucr.edu/home/baez/trimble/tetracategories.html`, 1965. Accessed : 2021-05-21.