Des matrices aléatoires aux opérateurs aléatoires

Martin Malvy

25 mai 2021

Table des matières

Introduction

Les premiers modèles de matrices aléatoires apparaissent dans les travaux du statisticien Wishart dans les années 1920. Plus tard, vers les années 1950, Wigner s'intéresse à d'autres modèles matriciels dans l'optique d'étudier les niveaux d'énergie d'atomes lourds. Le théorème de Wigner donne des informations macroscopiques sur les valeurs propres, en grande dimension.
Pour des modèles de matrices possédant des propriétés de symétrie supplémentaires, comme par exemple le *Gaussian Unitary Ensemble* (GUE), il est possible d'aller plus loin et d'analyser le comportement microscopique asymptotique des valeurs propres. Pour ce faire, on choisit un niveau d'énergie et on regarde autour de ce niveau d'énergie le comportement local des valeurs propres, en zoomant de manière appropriée.
Dumitriu et Edelman ont proposé dans [3] des modèles matriciels dont les valeurs propres suivent la loi des β-ensembles, des objets très étudiés notamment dans l'étude des gaz en mécanique statistique. Cette approche contient notamment le cas du GUE. Edelman et Sutton ont proposé une interprétation de ces modèles matriciels en terme de discrétisation d'opérateurs différentiels dans [4], jetant les bases de l'étude des opérateurs aléatoires vus comme limite de modèles matriciels. Selon la zone du spectre étudié et selon le modèle matriciel choisi, on retrouve des opérateurs différents (*hard edge, soft edge, bulk*,...) mais qui revêtent un caractère universel.
On présente dans ce document les opérateurs apparaissant dans les β-ensembles, et on s'attache surtout à décrire le processus ponctuel des valeurs propres associés. Il existe des caractérisations en termes de processus de diffusions stochastiques qui permettent d'obtenir des asymptotiques très précises sur des statistiques associées.

1 Matrices Aléatoires

On rappelle des concepts de base de matrices aléatoires, en suivant les lignes de [1]. On s'intéresse à des modèles matriciels à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_N(\mathbb{K})$ des matrices autoadjointes $N \times N$ (c'est-à-dire les matrices symétriques ou hermitiennes selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Cela assure en particulier que les valeurs propres sont réels et peuvent être ordonnées.

1.1 Le théorème de Wigner

Une matrice de Wigner est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{H}_N(\mathbb{K})$, dont les coefficients sont indépendants les uns des autres, en dehors des contraintes d'auto-adjonction. Plus précisément, on appelle famille de matrices de Wigner une suite de matrices aléatoires $(X^N)_{N\geq 1}$ telles que $X^N = (X^N)^*$ p.s , $\{X_{ij}^N, 1 \leq i < j \leq N\}$, $\{X_{ii}^N, 1 \leq i \leq N\}$ sont deux familles i.i.d. indépendantes de variables aléatoires, et

$$\mathbb{E}[X_{ij}^N] = 0, \quad \mathbb{E}[(X_{ij}^N)^2] = 1 \text{ dès que } i \neq j, \quad \mathbb{E}[(X_{ij}^N)^k] < +\infty \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Pour une telle famille $(X_N)_{N\geq 1}$ (à coefficients réels ou complexes), on considère

$$W^N = \frac{1}{\sqrt{N}} X^N,$$

et on note $\lambda_1^N \geq ... \geq \lambda_N^N$ ses valeurs propres ordonnées. On rappelle qu'une suite μ_n converge étroitement vers μ dans l'espace $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ des mesures de probabilité réelles si pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int f \mathrm{d}\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \mathrm{d}\mu.$$

Théorème 1.1 (Théorème de Wigner, Th 2.1.1, [1]). *Presque-sûrement, la mesure spectrale $L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$ converge étroitement vers la loi du demi cercle σ, donnée par la formule*

$$\sigma(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{|x|<2}\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, $L_N \underset{N\to\infty}{\Longrightarrow} \sigma$ p.s.

La preuve standard de ce résultat passe par de la combinatoire des graphes. La loi de σ est caractérisée par ses moments, donnés par

$$m_k = \int x^k \sigma(\mathrm{d}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair}, \\ C_k = \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} & \text{si } k \text{ pair}. \end{cases}$$

C_k est le k-ième nombre de Catalan, et c'est en particulier le nombre d'arbres plans à k arêtes.
Pour montrer la convergence des moments de L_N vers ceux de σ, on montre leur convergence en espérance et la décroissance suffisamment rapide de leur variance (en $O(1/N^2)$), pour conclure grâce à Borel-Cantelli. L'espérance des moments est, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int x^k L_N(\mathrm{d}x)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \lambda_i^k\right] \\ &= \frac{1}{N^{k/2+1}}\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}X^k\right] \\ &= \frac{1}{N^{k/2+1}} \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)} \mathbb{E}\left[X_{i_1 i_2} ... X_{i_k i_1}\right], \end{aligned}$$

où la somme porte sur les multi-indices à valeurs dans $\{1, ..., N\}$, avec éventuelles répétitions. On peut associer de manière unique à chaque multi-indice $(i_1, ..., i_k)$ un graphe orienté numéroté, de sommets $\{i_1, ..., i_N\}$ et d'arêtes orientées $\{(i_j, i_j + 1), 1 \leq j \leq k\}$ (avec $i_{k+1} = i_1$ par convention). Seuls la contribution des multi-indices dont le graphe sous-jacent est un arbre (avec nécessairement $k/2+1$ sommets) n'est pas tuée par le facteur $\frac{1}{N^{k/2+1}}$. Si k est impair, il n'existe pas de tel multi-indice, d'où la convergence vers 0. Si k est pair, le terme sous l'espérance vaut 1 pour les arbres, et il y a $C_{k/2}N(N-1)...(N-k/2) \sim C_{k/2}N^{k/2+1}$ choix possibles d'arbres plans numérotés à $k/2+1$ sommets, d'où la convergence vers le nombre de Catalan. L'estimation pour la variance se fait par des méthodes combinatoires similaires et plus fines.

1.2 Un modèle de Wigner unitairement invariant : le GUE

Parmi les exemples largement étudiés de matrices de Wigner, on retrouve l'*Ensemble Unitaire Gaussien* (*GUE*). Il a pour loi

$$GUE^N \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\xi_{11} & \xi_{12}+i\eta_{12} & \xi_{13}+i\eta_{13} & \cdots \\ \xi_{12}-i\eta_{12} & \sqrt{2}\xi_{22} & \xi_{23}+i\eta_{23} & \cdots \\ \xi_{13}-i\eta_{13} & \xi_{23}-i\eta_{23} & \sqrt{2}\xi_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

où $(\xi_{ij})_{1\leq i\leq j\leq N}$ et $(\eta_{ij})_{1\leq i<j\leq N}$ sont deux familles de variables $\mathcal{N}(0,1)$ toutes indépendantes. Presque-sûrement, la mesure empirique L_N de $\frac{1}{\sqrt{2N}}M$ converge étroitement vers la loi du demi-cercle. Une autre propriété remarquable du GUE est son invariance par conjugaison par le groupe unitaire : pour toute matrice $U \in \mathbb{U}(N) = \{U \in M_N(\mathbb{C}) : UU^* = Id\}$ fixée,

$$U^* \left(GUE^N\right) U \overset{(d)}{=} GUE^N.$$

Soit $\mathrm{d}X^N$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}_N(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(\Delta_{ii}, \Delta_{ij}+\Delta_{ji}, i\Delta_{ij}-i\Delta_{ji})$, avec $\Delta_{ij} = (\delta_{ij})_{ij}$. On remarque qu'alors

$$GUE^N(\mathrm{d}X^N) \overset{(d)}{=} \frac{1}{Z^N} e^{-\frac{1}{2}tr(X^N)^2}\mathrm{d}X^N,$$

où Z^N est une constante de normalisation. Puisque $tr(U^*X^NU)^2 = tr(X^N)^2$ et que $\det U = 1$, l'application $X^N \mapsto U^*X^NU$ préserve bien la mesure du *GUE*. Le GUE est l'unique modèle matriciel unitairement invariant qui soit aussi une matrice de Wigner. D'autres exemples de modèles unitairement invariants sont donnés par des lois à densité $e^{-trP(X^N)}$, avec P un polynôme.
En considérant le difféomorphisme local

$$\mathbb{R}^N \times \mathcal{H}_{N,0}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_N(\mathbb{C}), \qquad (z,A) \mapsto \left(e^{iA}U_0\right)^* \mathrm{diag}(z) \left(e^{iA}U_0\right),$$

où $\mathcal{H}_{N,0}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes à diagonale nulle, et $U_0 \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})$, on peut montrer :

Théorème 1.2 (Valeurs propres du GUE)**.** *Soit $(\lambda_1,...,\lambda_N)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ de loi*

$$c_N \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}\,\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_N,$$

où c_N est une constante de normalisation. Alors $(\lambda_1,...,\lambda_N)$ suit la loi des valeurs propres du GUE. Plus précisément, si U est indépendante des $(\lambda_1,...,\lambda_N)$ et suit la loi de Haar sur $U(N)$, alors

$$U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} U \sim GUE^N.$$

Remarque 1.3. *Il est important de noter que dans le cas du GUE, la distribution uniforme des vecteurs propres selon la mesure de Haar de $U(N)$ est un cas de délocalisation des vecteurs propres. A l'inverse,* *lorsque les vecteurs propres ont des marginales concentrées dans certaines zones, on parle de localisation. Ces phénomènes sont très étudiés, notamment dans le cas des opérateurs aléatoires dont nous parlerons ci-après. Nous resterons focalisés sur les valeurs propres dans la suite, bien que ces phénomènes de localisation sont un des objets d'études centraux du domaine.*

La loi des valeurs propres du GUE est un cas particulier des β-ensembles, définis comme les variables de loi

$$c_N^\beta \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta e^{-\frac{\beta}{4}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \, \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_N,$$

où c_N^β est à nouveau une constante de normalisation. Les β-ensembles fournissent un modèle commode pour étudier des particules en interaction (le gaz de Coulomb à température $\frac{1}{\beta}$), et le facteur de Vandermonde $\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$ induit de la répulsion. Pour les valeurs singulières $\beta = 1, 2, 4$, la loi des β-ensembles est celle, respectivement, des valeurs propres du GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*, équivalent du GUE dans $\mathbb{R}$), du GUE et du GSE (*Gaussian Symplectic Ensemble*, cette fois-ci pour le corps des quaternions).
Réécrivons le GUE sous la forme

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & \xi^t \\ \xi & B \end{pmatrix},$$

où $a \sim \mathcal{N}(0,2)$, $\xi, \eta \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, I_{N-1})$, $B \sim GUE^{N-1}$ sont toutes indépendantes. En choisissant une matrice unitaire $N-1 \times N-1$ H telle que $H\xi = e_1$, on voit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & H^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & H \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & \|\xi\|_2 e_1^t \\ \|\xi\|_2 e_1 & H^*BH \end{pmatrix}.$$

Par indépendance de H et de B, $H^*BH \sim GUE^{N-1}$ et est indépendante de a et $\|\xi\|_2$. En outre, $\|\xi\|_2$ suit une loi χ de paramètre $2(N-1)$ (c'est la norme d'un vecteur gaussien standard de dimension $2(N-1)$). Par induction, on aboutit à la forme tridiagonale

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,2) & \chi_{2(N-1)} & & \\ \chi_{2(N-1)} & \mathcal{N}(0,2) & \chi_{2(N-2)} & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \chi_2 & \mathcal{N}(0,2) \end{pmatrix}$$

Ce fait, remarqué par Dumitriu et Edelman, les a conduit à introduire dans [3] les modèles de matrices tridiagonaux

$$H_N^\beta \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,2) & \chi_{\beta(N-1)} & & & \\ \chi_{\beta(N-1)} & \mathcal{N}(0,2) & \chi_{\beta(N-2)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \chi_{2\beta} & \mathcal{N}(0,2) & \chi_\beta \\ & & & \chi_\beta & \mathcal{N}(0,2) \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres suivent la loi des β-ensembles pour tous les $\beta > 0$. Ce résultat est à l'origine de nombreux développements dans l'étude des β-ensembles, notamment en ce qui concerne les limites microscopiques et les convergences vers des opérateurs aléatoires.

2 Géométrie hyperbolique et le Carrousel brownien

Travailler dans le cadre hyperbolique donne une bonne formulation du problème des valeurs propres pour comprendre les comportements microscopiques limites, et permet d'en avoir une interprétation géométrique au travers d'objets probabilistes hyperboliques.
On rappelle d'abord quelques éléments de géométrie hyperbolique du plan hyperbolique $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et du disque de Poincaré $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Le bord du demi-plan $\mathbb{H}$ est donné par $\mathbb{R} \cup \infty$

et celui du disque $\mathbb{U}$ par $\{|z| = 1\}\}$. Les géodésiques sont données par les cercles ou les droites coupant perpendiculairement le bord du modèle, et les angles sont les angles euclidiens. La distance entre deux points s'obtient en intégrant $\mathrm{Im}(z)^{-1}$ et $\frac{2}{1-|z|^2}$ respectivement pour $\mathbb{H}$ et $\mathbb{U}$.
Les deux modèles sont isométriques via la transformation de Cayley U qui envoie $i \mapsto 0$ et $\infty \mapsto 1$:

$$U : \mathbb{H} \to \mathbb{U}, \quad U(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad U^{-1}(w) = i\frac{w+1}{-w+1}.$$

Les isométries de ces deux modèles sont données par des transformations de Möbius. Pour le demi-plan $\mathbb{H}$, elles sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; ab - cd = 1.$$

Elles induisent une action de $Sl(2)$ sur $\mathbb{H}$ dite par *homographie*, que l'on peut étendre à $Gl(2)$ quitte à perdre le caractère isométrique. Dans le cas du disque $\mathbb{U}$, elles sont de la forme

$$z \mapsto e^{i\phi}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \;\; |a| \neq 1.$$

Dans les deux cas, deux couples de points $z_1 \neq z_2$ et $w_1 \neq w_2$ déterminent uniquement une isométrie qui envoie $z_1 \mapsto w_1$ et $z_2 \mapsto w_2$.
On va maintenant introduire le *carrousel brownien*, dû à B.Valko et B.Viràg dans [8]. C'est une diffusion réelle centrale dans leur étude de certains opérateurs aléatoires.
On considère un mouvement brownien hyperbolique B dans $\mathbb{U}$, c'est-à-dire satisfaisant l'équation stochastique

$$\mathrm{d}B = \frac{1-|B|^2}{2}\mathrm{d}Z,$$

où Z est un mouvement brownien complexe avec des parties réelles et imaginaires standards. Vu dans le plan hyperbolique via la transformation de Cayley U, il satisfait l'EDS

$$\mathrm{d}\tilde{B} = \mathrm{Im}(\tilde{B})\mathrm{d}\tilde{Z},$$

avec les notations évidentes. Le mouvement brownien hyperbolique a la propriété remarquable de converger vers un point du bord, peu importe le modèle dans lequel on l'étudie. On renvoit à [5] pour une construction et une étude détaillée de celui-ci.
Donnons nous une fonction réelle f positive et intégrable, et un point $z_0 \in \partial\mathbb{U}$. Le carrousel hyperbolique associé à un paramètre $\lambda > 0$ est la courbe $t \mapsto e^{i\gamma_\lambda(t)} \in \mathbb{S}^1$ issue de $e^{i\gamma_0} = z_0$, qui tourne autour de $B(t)$ à vitesse angulaire $\lambda f(t)$.
Pour $b \in \mathbb{U}$, on note R_b^α la rotation hyperbolique de centre b et d'angle α. En particulier, R_0^α est la multiplication par $e^{i\alpha}$. Soit T la transformation de Möbius

$$T : z \mapsto \frac{z-b}{1-\overline{b}z}, \quad T^{-1} : w \mapsto \frac{w+b}{1+\overline{b}z}.$$

Elle envoie b sur 0, et on a l'égalité

$$R_b^\alpha = T^{-1} \circ R_0^\alpha \circ T.$$

On en déduit que, $z \in \overline{\mathbb{U}}$, quand α tend vers 0,

$$R_b^\alpha(z) = z + i\alpha\left(\frac{z-b-z\overline{b}(z-b)}{1-|b|^2}\right) + o(\alpha).$$

Sur le bord du disque, c'est-à-dire pour $z = e^{i\theta}$, cela devient

$$R_b^\alpha(e^{i\theta}) = e^{i\theta}\left(1 + i\alpha\frac{|e^{i\theta}-b|^2}{1-|b|^2}\right) + o(\alpha) = \exp\left(i\left(\theta + \alpha\frac{|e^{i\theta}-b|^2}{1-|b|^2}\right)\right) + o(\alpha).$$

On voit dans cette expression que opérer une rotation d'angle infinitésimal α à un point $e^{i\theta}$ autour du point b revient à en faire une d'angle $\alpha\frac{|e^{i\theta}-b|^2}{1-|b|^2}$ autour de 0. On remarque l'apparition du noyau de Poisson

$$\mathrm{Poi}(e^{i\theta}, b) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}-b}{e^{i\theta}+b} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|b|^2}{|e^{i\theta}-b|^2},$$

qui est la densité de la mesure harmonique du disque vu depuis b, qui apparaît dans l'étude du problème de Dirichlet.

Plus formellement, si on fait tourner un point $e^{i\tilde{\gamma}}$ issu de z_0 autour de 0 à vitesse angulaire constante α, c'est-à-dire que $\tilde{\gamma}' = \alpha$, alors

$$e^{i\tilde{\gamma}(t)} = R_0^{\alpha t}(z_0).$$

Opérer une rotation autour de $b \in \mathbb{U}$ à vitesse angulaire constante α en partant de z_0 revient donc à considérer la courbe

$$e^{i\tilde{\gamma}(t)} = R_b^{\alpha t} z_0 = z_0 \exp\left(i\alpha\frac{|e^{i\tilde{\gamma}(t)}-b|^2}{1-|b|^2}t\right) + o(t).$$

L'équation qui gouverne l'évolution $\tilde{\gamma}$ est donnée par

$$\partial_t\tilde{\gamma} = \alpha\frac{|e^{i\tilde{\gamma}}-b|^2}{1-|b|^2}.$$

Dans le cas du carrousel brownien, à l'instant t, on opère cette rotation pour les paramètres $\alpha = \lambda f(t)$, $b = B(t)$. L'EDO vérifiée par γ_λ est donc

$$\partial_t\gamma_\lambda = \lambda f\frac{|e^{i\gamma_\lambda}-B|^2}{1-|B|^2}.$$

On peut reformuler de manière plus commode le carrousel en considérant l'angle α_λ entre $e^{i\gamma_\lambda}$, B et z_0. On définit la transformation de Möbius $T(\cdot,\omega)$ qui envoie ω sur 0 et z_0 sur 1. Explicitement, on a

$$T(z,\omega) = \frac{S(z,\omega)}{S(z_0,\omega)}, \qquad S(z,\omega) = \frac{z-\omega}{1-\overline{\omega}z}.$$

On obtient donc $e^{i\alpha_\lambda} = T(e^{i\gamma_\lambda}, B)$. En prenant le logarithme de cette expression puis en appliquant Itô, on obtient l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}\alpha_\lambda = \lambda f \mathrm{d}t + \mathrm{Re}\left((e^{-i\alpha_\lambda}-1)\,\mathrm{d}Z\right), \qquad \alpha_\lambda(0) = 0, \tag{1}$$

où Z est à nouveau un mouvement brownien complexe avec parties réelles et imaginaires standards.

Finalement, on définit le *carrousel brownien* de paramètre $\beta > 0$ comme le carrousel hyperbolique associé à la fonction

$$f(t) = \frac{\beta}{4}e^{-\frac{\beta t}{4}}.$$

Dans un approche similaire, on peut s'intéresser à l'évolution d'un point du bord $r_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sous l'effet d'une translation par rapport à un point du bord qui évolue continûment. On se place cette fois-ci dans le modèle du demi-plan hyperbolique, et $r_\lambda \in \mathbb{R}\cup\infty$. L'équation d'évolution de r_λ sous l'effet d'une translation à vitesse constante λ par rapport à $+\infty$ ($+\infty$ est l'unique point fixe) est donnée par

$$r_\lambda' = \lambda,$$

soit $r_\lambda(t) - r_\lambda(0) = \lambda t$. Regardons comment cette EDO évolue lorsque l'on conjugue localement la translation par une isométrie du demi-plan hyperbolique, de la même manière que pour le carrousel brownien. On note $h_\lambda : z \mapsto z+\lambda$, et S une isométrie de $\mathbb{H}$. On peut trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$, tels que

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad S^{-1}(\omega) = \frac{d\omega-b}{-c\omega+a}.$$

Alors,

$$S^{-1}h_\lambda S(z) = \frac{z+\lambda(d^2+cdz)}{1-\lambda(c^2z+cd)}.$$

Pour $z \in \partial\mathbb{H}$, quand λ tend vers 0,

$$S^{-1}h_\lambda S(z) = z + \lambda(cz+d)^2.$$

La transformation $S^{-1}h_\lambda S$ est une translation par rapport au point du bord $-\frac{d}{c}$, qu'elle laisse invariant. L'EDO satisfaite par r_λ sous l'effet d'une translation qui évolue continûment est donc de la forme

$$r'_\lambda(t) = \lambda(r_\lambda(t)c(t) + d(t))^2. \tag{2}$$

3 Limites microscopiques et opérateurs aléatoires

Le théorème de Wigner offre un aperçu du comportement macroscopique asymptotique des β-ensembles. Pour comprendre le comportement microscopique, on peut zoomer autour d'un certain niveau d'énergie E de telle sorte que l'écart typique entre les valeurs propres soit constant. Cela revient à étudier le processus ponctuel limite de l'ensemble

$$\left(\rho(N)\left(E - \frac{1}{\sqrt{N}}\lambda_i\right) : 1 \leq i \leq N\right) \tag{3}$$

où $\rho(N)$ est un rescaling adapté. Comme on peut s'y attendre par la convergence vers la loi du demi-cercle, le processus limite est l'ensemble vide pour tout niveau d'énergie en dehors $[-2,2]$. Autrement, on distingue des comportements différents selon que l'on se place sur l'*edge*, c'est-à-dire pour $E = \pm 2$, ou dans le *bulk* pour $|E| < 2$. L'ensemble (3) est exactement l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur

$$\rho(N)\left(EId - \frac{1}{\sqrt{N}}H_N^\beta\right).$$

3.1 Le soft edge et l'opérateur d'Airy beta

Dans le cas de l'edge, c'est-à-dire pour $E = 2$, le bon rescaling est $\rho(N) \propto N^{-2/3}$. Intuitivement, comme le nombre de valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{N}}H_N^\beta$ dans l'intervalle $[2-\delta, 2]$ pour $\delta > 0$ est donné par $NL_N([2-\delta,2])$, avec L_N la mesure spectrale associée, on peut approximer cette quantité par

$$\frac{N}{\pi}\int_{2-\delta}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = O(N\delta^{3/2}).$$

Ici, δ ne peut pas dépendre de N mais heuristiquement, de manière à ce que les distances entre les valeurs propres soient d'ordre constant, on est tentés de regarder l'intervalle $[2-\delta, 2]$ pour le choix $\delta = N^{-2/3}$, ce qui revient à choisir $\rho(N) = N^{2/3}$. Il se trouve que c'il s'agit du bon rescaling. En terme d'opérateurs, on étudie donc

$$\tilde{H}_N^\beta = N^{2/3}\left(2Id - \frac{1}{\sqrt{N}}H_N^\beta\right) = N^{1/6}\left(2\sqrt{N}Id - H_N^\beta\right). \tag{4}$$

La forme tridiagonale des β-ensemble permet de voir $\tilde{H}_N^\beta$ comme la discrétisation d'opérateurs différentielles. En utilisant l'approximation de la loi χ pour n grand

$$\frac{1}{\beta}\chi_{\beta(N-k)} \simeq \sqrt{N-k} + \frac{1}{\sqrt{2}}h_k \simeq \sqrt{N} - \frac{k}{2\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{2}}h_k,$$

où les h_k sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes, on peut approximer $\tilde{H}_N^\beta$ par

$$n^{2/3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{2n^{1/3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & \\ & 2 & 0 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} - \frac{n^{1/6}}{\sqrt{2\beta}}\begin{pmatrix} 2g_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2g_2 & h_2 & & \\ & h_2 & 2g_3 & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où les g_i sont aussi des gaussiennes centrées réduites indépendantes de toutes les autres variables impliquées. Par un argument heuristique, on peut en déduire la forme la forme de l'opérateur limite. Etant donnée une fonction réelle f suffisamment lisse, on fait agir les matrices $N \times N$ sur le vecteur $f_{N^{1/3}} = (f(1/N^{1/3}), f(2/N^{1/3}), ..., f(N/N^{1/3}))^t$. En notant B' un bruit blanc gaussien, i.e. la dérivé au sens des distributions d'un mouvement brownien standard, on voit que $\tilde{H}_N^\beta$ converge vers l'opérateur

$$\mathcal{H}_\beta = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x - \frac{2}{\sqrt{\beta}}B',$$

au sens où $\|\tilde{H}_N^\beta f_{N^{1/3}} - (\mathcal{H}_\beta f)_{N^{1/3}}\|_\infty \to 0$. Cette démarche heuristique a été proposée par Edelman et Sutton dans [4], en traitant rigoureusement le cas à température infinie, c'est-à-dire $\beta = \infty$. La convergence a été établie par Rider, Ramirez et Viràg dans [7], en terme de la convergence des plus petites valeurs propres : si $\lambda_1^N \leq \cdots \leq \lambda_k^N$ sont les k-plus petites valeurs propres de $\tilde{H}_N^\beta$ et $\Lambda_1 \leq ... \leq \Lambda_k$ celles de $\mathcal{H}_\beta$, alors

Théorème 3.1 (Théorème 1.1, [7])**.** *Pour tout $k \geq 0$, quand $N \to \infty$,*

$$(\lambda_1^N, \cdots, \lambda_k^N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\Lambda_1, ..., \Lambda_k).$$

Ils ont baptisé cet opérateur le *Stochastic Airy Operator* (SAE_β) par analogie avec l'opérateur d'Airy $SAE_\infty = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x$.
La loi de Tracy-Widom TW_β de paramètre β est la loi limite de (l'opposé) de la plus petite valeur propre de $\tilde{H}_N^\beta$, et c'est donc la loi de (l'opposé) de la plus petite valeur propre de $\mathcal{H}_\beta$ en vertu du théorème précédent. Cette loi apparaît comme limite de statistiques de modèles probabilistes variés.
Les valeurs propres et les fonctions propres de $\mathcal{H}_\beta$ sont les solutions de

$$\mathcal{H}_\beta f = \lambda f. \tag{5}$$

Dans [2], L.Dumaz, Y.Li et B.Valkó ont montré que H_β était un opérateur de Sturm-Liouville généralisé sur $[0, +\infty)$, c'est-à-dire de la forme

$$H_\beta u = \frac{1}{r}(-(p_1 u' - q_0 u)' - q_0 u' + p_0 u),$$

pour les choix $r(x) = p_1(x) = 1$, $q_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}B(x)}$, $p_0(x) = x$. Sous certaines conditions de régularité des coefficients et d'intégrabilité de solutions particulières, satisfaites par H_β, on peut rendre de tels opérateurs auto-adjoints sur un sous-domaine explicite de $L^2([0,\infty), r(x)\mathrm{d}x)$. Les valeurs propres sont donc réels, et il existe une plus petite valeur propre (ce qui permet de justifier la convergence en terme des plus petites valeurs propres). Ce cadre de travail confortable est vrai dans le cas du comportement à l'edge, mais cela n'est plus vrai à l'intérieur du *bulk* ($E \in (-2,2)$).
On peut réécrire (5) comme

$$f" = (x - \lambda)f - \frac{2}{\sqrt{\beta}}B'f.$$

Cette expression permet de voir que f' est différentiable, puisque le terme de droite est la dérivée d'une fonction continue.
En appliquant la transformation de Riccati $p = \frac{f'}{f}$, (5) devient

$$\begin{cases} p'(x) &= x - \lambda - p^2 + \frac{2}{\sqrt{\beta}}B' \\ p(0) &= +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

La solution p peut exploser (vers $-\infty$) en temps fini, et elle démarre à nouveau de $+\infty$ après chacune de ces explosions. En fait, les explosions comptent le nombre de valeurs propres de $\mathcal{H}_\beta$ plus petites que λ. Au sens d'Itô, la diffusion se réécrit (en remplaçant (p, λ) par (X, a)) :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_a(t) & = (t - a - X_a^2(t))\mathrm{d}t + \frac{2}{\sqrt{\beta}}\mathrm{d}B(t) \\ X(0) & = +\infty, \end{cases}$$

On peut alors exprimer la fonction de répartition de TW_β sous la forme

$$\mathbb{P}(TW_\beta < a) = \mathbb{P}(X_a \text{ explose en temps fini}). \tag{7}$$

Cette caractérisation en terme d'explosion d'un processus de diffusion permet d'obtenir des estimations sur les queues de TW_β, voir à nouveau (RRV) :

Théorème 3.2 (Théorème 1.3, [7]). *Pour $a \to +\infty$,*

$$\mathbb{P}(TW_\beta > a) = \exp\left(-\frac{2}{3}\beta\, a^{3/2}(1 + o(1))\right),$$
$$\mathbb{P}(TW_\beta < -a) = \exp\left(-\frac{1}{24}\beta\, a^{3}(1 + o(1))\right).$$

Remarque 3.3. *Dans le cas de l'edge des β-ensemble (aussi appelés β-ensembles de Hermite), on parle de soft edge. En effet, il existe d'autres modèles de particules pour lesquels Edelman et Dumitriu ont aussi fourni des modèles matriciaux tridiagonaux, où le comportement à l'edge est différent : on parle de hard edge. Les deux processus ponctuels associés, ainsi que celui en vigueur dans le bulk, peuvent apparaître comme limite de l'autre, voir à nouveau ([2]) pour un exemple.*

Dans le papier [9], les auteurs s'inspirent du travail réalisé pour le bulk pour donner une interprétation hyperbolique de l'opérateur d'Airy. On note u_1 et u_2 les solutions de $\mathrm{SAE}_\beta u = 0$, pour les conditions initiales $(u_1(0), u_1'(0)) = (1, 0)$ et $(u_2(0), u_2'(0)) = (0, 1)$, et on définit

$$Q(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Pour λ fixé, on se donne une solution v de $\mathrm{SAE}_\beta v = \lambda v$, et on définit

$$y(t) = Q^{-1}(t)(v(t), v'(t))^t.$$

Alors, le ratio $r_\lambda(t) = y_1(t)/y_2(t)$ satisfait l'EDO aléatoire

$$r_\lambda'(t) = \lambda(u_1(t)z + u_2(t))^2. \tag{8}$$

On voit qu'il s'agit de l'action d'une translation continûment modifiée, exactement comme dans (2), où les coefficients u_1, u_2 sont des variables aléatoires. La translation infinitésimale associée à (8) à l'instant t admet pour unique point fixe $-\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$. A l'instar du carrousel brownien, il serait intéressant de regarder si cette quantité est reliée à un processus du demi-plan hyperbolique.

3.2 Le bulk et le processus Sine beta

A l'intérieur du *bulk*, autour d'un niveau d'énergie $|E| < 2$, on considère cette fois-ci le scaling

$$\left(\sqrt{N}(\lambda_i - E\sqrt{N}I_d) : 1 \leq i \leq N\right).$$

A nouveau dans [8], Valkó et Virág montrent la convergence en loi de cet ensemble de points vers le processus ponctuel Sine_β, dont ils donnent une caractérisation géométrique via le *Carousel brownien*. On rappelle l'EDS du carrousel brownien

$$\mathrm{d}\alpha_\lambda = \lambda f \mathrm{d}t + \mathrm{Re}\left((e^{-i\alpha_\lambda} - 1)\,\mathrm{d}Z\right), \qquad \alpha_\lambda(0) = 0, \tag{9}$$

où Z est un mouvement brownien complexe avec parties réelles et imaginaires standards, et $f(t) = \frac{\beta}{4}e^{-\beta t}4$. Comme on peut s'y attendre puisque le drift est tué exponentiellement, et que la contribution brownienne s'annule en $\alpha_\lambda = 0$, on a que $\lim_{t\to\infty} \alpha_\lambda(t)$ existe pour tout $\lambda > 0$ p.s., et que

$$\frac{\alpha_\lambda(\infty)}{2\pi} \in \mathbb{N}.$$

On définit $N(\lambda)$ comme le nombre de tours complets réalisés par l'angle α_λ, c'est-à-dire $\frac{\alpha_\lambda(\infty)}{2\pi}$.
Lorsque l'on considère le couplage de (9) pour les $\lambda > 0$, l'inégalité $N(\lambda_1) \leq N(\lambda_2)$ tient p.s. dès que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, et N est donc la fonction de comptage d'un processus ponctuel. En fait, c'est la fonction de comptage associée à $Sine_\beta$, et pour tout $\lambda > 0$,

$$\#Sine_\beta([0,\lambda]) \stackrel{(d)}{=} N(\lambda). \tag{10}$$

$Sine_\beta$ est un processus invariant par translation : $\alpha_\lambda - \alpha_\mu$ est solution de l'EDS

$$\mathrm{d}(\alpha_\lambda - \alpha_\mu) = (\lambda - \mu) f \mathrm{d}t + \mathrm{Re}\left((e^{-i(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)} - 1)\mathrm{d}(e^{-i\alpha_\mu} Z)\right),$$

qui est exactement l'équation du *Sine process* avec le brownien complexe standard $e^{-i\alpha_\mu}Z$, pour laquelle les solutions sont uniques en loi. Cette propriété, combiné au fait que la queue de $N(1)$ est exponentielle, permet de montrer que $Sine_\beta$ est un processus simple p.s.

Théorème 3.4 (Théorème 1, [8]). *Soient $\beta > 0$, $E \in (-2,2)$. Quand N tend vers l'infini,*

$$\left(\sqrt{(4-E^2)N}\left(\lambda_i - E\sqrt{N}Id\right) : 1 \leq i \leq N\right) \Longrightarrow Sine_\beta, \tag{11}$$

où la convergence est en loi pour la topologie vague des fonctions de comptage de processus ponctuels.

A nouveau, le facteur de normalisation prend en compte la densité locale de la loi du demi-cercle. Ce résultat généralise les convergences déjà connues pour les valeurs $\beta = 1, 2, 4$. On doit à Dyson la caractérisation de $Sine_2$ en termes de processus ponctuel déterminental de noyau $\frac{sin(x-y)/2}{(x-y)\pi}$, ce qui rend plus accessible les calculs, et permet par exemple d'obtenir les fonctions de corrélation. Le processus $Sine_2$ est aussi au coeur d'une conjecture de Montgomery, concernant les zéros de la fonction ζ de Riemann :

Conjecture 3.5. *Si $1/2 + iZ$ est l'ensemble des zéros de ζ sur la droite critique $Re(z) = 1/2$, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, alors quand $t \to \infty$*

$$(Z - tU)\log t \Longrightarrow Sine_2.$$

à nouveau pour la topologie vague des fonctions de comptage de processus ponctuels.

L'équation du Sine process (9) permet, à l'instar de la diffusion de l'opérateur d'Airy, d'obtenir des asymptotiques sur les statistiques de $Sine_\beta$. A λ fixé, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha_\lambda &= \lambda f \mathrm{d}t + \mathrm{Re}\left((e^{-i\frac{\alpha_\lambda}{2}} - e^{i\frac{\alpha_\lambda}{2}})e^{-i\frac{\alpha_\lambda}{2}}\mathrm{d}Z\right) \\
&= \lambda f \mathrm{d}t + 2\sin(\alpha_\lambda/2)\mathrm{Im}\left(-e^{-i\frac{\alpha_\lambda}{2}}\mathrm{d}Z\right) \\
&= \lambda f \mathrm{d}t + 2\sin(\alpha_\lambda/2)\mathrm{d}W,
\end{aligned}$$

où W est un mouvement brownien réel standard. En considérant le changement de variable $R(t) = \log\tan\alpha_\lambda(t)/4$ et en appliquant Itô, on obtient la diffusion

$$\mathrm{d}R = \left(\frac{\lambda}{2}f\cosh(R) + \frac{\tanh(R)}{2}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W, \qquad R(0) = -\infty.$$

Après chaque explosion, R revient en $-\infty$, et le nombre de tours de α_λ correspond exactement au nombre d'explosions de R. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(Sine_\beta[0,\lambda] \geq k) = \mathbb{P}(R \text{ explose au moins } k \text{ fois}).$$

Il faut garder à l'esprit que la procédure aboutissant à cette diffusion se fait à λ fixé, et qu'on perd l'information liée au couplage, i.e. les informations de corrélations. Néanmoins, cette diffusion permet d'obtenir des asymptotiques portant sur le comportement de $Sine_\beta$ sur :

Théorème 3.6 (Théorème 5, [8]). *Etant donné $k \geq 0$, lorsque $\lambda \to \infty$,*

$$\mathbb{P}\left(\#Sine_\beta[0,\lambda] \leq k\right) = \exp\left(-\lambda^2\left(\frac{\beta}{64} + o(1)\right)\right).$$

En fait, dans le cas des *large gap probabilities*, c'est-à-dire quand $k = 0$, Valkó et Viràg améliorent le résultat dans [10] en :

Théorème 3.7 (Théorème 1, [10]). *Quand $\lambda \to \infty$,*

$$\mathbb{P}(Sine_\beta[0,\lambda] = \emptyset) = (k_\beta + o(1))\,\lambda^{\gamma_\beta} \exp\left(-\lambda^2\frac{\beta}{64} + \lambda\left(\frac{\beta}{8} - \frac{1}{4}\right)\right),$$

où k_β est une constante indéterminée, et où $\gamma_\beta = \frac{1}{4}(\frac{\beta}{2} + \frac{2}{\beta} - 3)$.

Ces estimations reposent sur le théorème de Girsanov, qui permet par exemple dans le dernier théorème d'estimer la distribution de la diffusion conditionnée à ne pas exploser. En fait, on ne peut que l'approcher, et les auteurs le font de manière très précise en rajoutant un terme de drift négligeable à l'équation de diffusion et en le choisissant précautionneusement.
Outre l'intérêt relatif à l'étude de $Sine_2$, le processus $Sine_\beta$ est attendu comme un objet universel puisque limite continue d'objets discrets centraux. Dans [6], Kritchevsky, Balkó et Virág étudient deux modèles de discrétisations d'équations 1d de Schrödinger aléatoire de la forme

$$(H_N\phi)_l = \phi_{l-1} + \phi_l v_l + \phi_{l+1},$$

$\phi_0 = \phi_N = 0$, pour les deux choix $v_l = \sigma\omega_l/\sqrt{N}$ et $v_l = \sigma\omega_l/\sqrt{l}$. Les variables ω_l sont indépendantes, de moyenne 0 de variance 1.
Ces modèles correspondent à des perturbations de la matrice d'adjacence d'une boîte 1-dimensionnel, au niveau de la transition entre le régime où les vecteurs propres sont localisés ($\mathrm{Var}\omega_k = O(1)$) et celui où ils sont délocalisés.
L'ensemble des valeurs propres du second modèle, autour d'un niveau d'énergie dans le *bulk*, et pour un rescaling adapté, convergent effectivement vers le processus $Sine_\beta$. De manière surprenante, ce n'est pas le cas pour le premier modèle, où le processus ponctuel limite, appelé Sch_τ, s'exprime aussi en terme du carrousel brownien mais possède une répulsion entre valeurs propres moins forte :

$$\mathbb{P}(Sch_\tau[\mu,\mu+\epsilon] \geq 2) \leq 4\exp\left(-(\log(\tau/\epsilon) - \tau)^2/\tau\right), \qquad \mathbb{P}(Sine_\beta[\mu,\mu+\epsilon] \geq 2) \sim \epsilon^{\beta+2}.$$

Il serait intéressant de vérifier la seconde asymptotique grâce à la diffusion, initialement mentionnée dans les cas singuliers des GOE, GUE et GSE. On trouve aussi dans cet article un théorème central limite pour $Sine_\beta$:

Théorème 3.8 (Théorème 17, [6]). *Quand $\lambda \to \infty$,*

$$\frac{1}{\sqrt{\log\lambda}}\left(Sine_\beta[0,\lambda] - \frac{\lambda}{2\pi}\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{2}{\beta\pi^2}).$$

Démonstration. Reprenons l'équation du *sine process* à λ fixé, avec Z un mouvement brownien réel standard

$$\mathrm{d}\alpha_\lambda = \frac{\lambda\beta}{4} e^{-\frac{\beta t}{4}} \mathrm{d}t + 2\sin(\alpha_\lambda/2)\mathrm{d}Z, \qquad \alpha_\lambda(0) = 0. \tag{12}$$

On remarque que $\tilde{\alpha}_\lambda = \alpha(\cdot + T)$ satisfait l'EDS précédente avec $\lambda = \frac{4}{\beta}$ pour le choix $T = \frac{4}{\beta}\log\frac{\beta\lambda}{4}$. Dès lors, quand $\lambda \to \infty$,

$$\frac{\tilde{\alpha}_\lambda(\infty)}{\sqrt{\log\lambda}} = \frac{\alpha_\lambda(\infty) - \alpha_\lambda(T)}{\sqrt{\log\lambda}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Il suffit donc d'établir le TCL pour $\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_\lambda(T)-\lambda}{\sqrt{\log\lambda}}$. En intégrant (12) entre 0 et T, il vient

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda(T) - \lambda + \frac{\beta}{4} &= 2\int_0^T \sin(\alpha_\lambda/2)\mathrm{d}Z \\ &\overset{(\mathrm{d})}{=} \tilde{B}\left(4\int_0^T \sin(\alpha_\lambda(t)/2)^2 \mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

où $\tilde{B}$ est un mouvement brownien réel standard, et où on a utilisé le théorème de Dubins et Schwartz dans le seconde ligne. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $(\log\lambda)^{-1}4\int_0^T \sin^2(\alpha_\lambda(t)/2)\mathrm{d}t \to 8/\beta$ en probabilités. Or,

$$\frac{4\int_0^T \sin^2(\alpha_\lambda(t)/2)\mathrm{d}t}{\log\lambda} = \frac{\frac{8}{\beta}\log\frac{\beta\lambda}{4}}{\log\lambda} - \frac{2\int_0^T \cos(\alpha_\lambda(t))\mathrm{d}t}{\log\lambda}.$$

Le premier terme à droite tend comme voulu vers $8/\beta$. Il reste à montrer que l'intégrale converge vers 0 en probabilités. Pour ce faire, on écrit par Itô

$$\begin{aligned}\frac{4}{i\beta\lambda\log\lambda}\mathrm{d}\left(e^{i\alpha_\lambda + \frac{\beta t}{4}}\right) =& \frac{1}{\log\lambda}e^{i\alpha_\lambda}\mathrm{d}t + \frac{8}{\beta\lambda\log\lambda}e^{i\alpha_\lambda + \frac{\beta t}{4}}\sin(\alpha_\lambda/2)\mathrm{d}Z \\ &- \frac{16}{i\beta\lambda\log\lambda}e^{i\alpha_\lambda+\frac{\beta t}{4}}\sin^2(\alpha_\lambda/2)\mathrm{d}t + \frac{1}{i\lambda\log\lambda}e^{i\alpha_\lambda+\frac{\beta t}{4}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On considère l'égalité précédente intégrée de 0 à T. La partie réelle du premier terme à droite est la quantité que l'on veut borner. A gauche, l'intégrale est en $O((\log\lambda)^{-1})$, tout comme les deux derniers termes à droite. Le second terme de droite, par la formule des moments, est bornée en norme L^2 par $CO((\log\lambda)^{-1})$), et on en déduit que l'intégrale voulue converge vers 0 en probabilités. □

Remarque 3.9. *Dans [9], B. Valkó et B. Virág ont construit un opérateur auto-adjoint dont les valeurs propres suivent la loi du* Sine_β*, de la forme*

$$\tau u(t) = R^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & 0 \end{pmatrix} u,$$

avec

$$R(t) = \frac{1}{2y}X(t)^t X(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) \\ 0 & y(t) \end{pmatrix},$$

où $x(t) + iy(t)$ *est un mouvement brownien hyperbolique dans le demi-plan.*

4 Conclusion

L'étude microscopique des β-ensembles, et plus généralement celle d'autres familles dérivées de valeurs propres de modèles matriciels, conduit naturellement à l'étude des opérateurs aléatoires et des processus ponctuels limites. Les caractérisations de la loi des valeurs propres au travers de processus de diffusion réels permettent d'obtenir des informations précises quant aux données statistiques de ces valeurs propres. Dans le cas de processus Sine_β, il serait dans un premier intéressant de reprendre l'asymptotique de la probabilité d'avoir deux points dans un petit intervalle, i.e.

$$\mathbb{P}(\mathrm{Sine}_\beta[0,\epsilon] \geq 2) \sim \epsilon^{2+\beta}.$$

Jusqu'ici, l'étude du processus de diffusion associé à Sine_β, c'est-à-dire le carrousel brownien, s'est limité à l'équation obtenue à λ fixé. Bien que cela permette de se ramener à une diffusion plus facilement exploitable, cela entraîne aussi la perte de l'information de corrélation. En 1981, Haldane conjecture une formule pour la fonction de corrélation $\rho^{(2)}$ de Sine_β :

$$\rho^{(2)}(r) \underset{r\to\infty}{=} 1 - \frac{1}{\beta\pi^2 r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos(2\pi m r)}{r^{4m^2/\beta}} + o(r^{-2}).$$

La fonction de corrélation $\rho^{(2)}$ est la densité de la loi jointe de deux valeurs propres, i.e.

$$\mathbb{P}(x \in \mathrm{d}x, y \in \mathrm{d}y) = \rho^{(2)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puisque Sine_β est invariant par translation, elle est en fait fonction de $r = |x-y|$, d'où la formulation précédente. Utiliser le couplage en λ du carrousel brownien pourrait être une bonne piste pour attaquer cette conjecture.

Références

[1] Greg W Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Number 118. Cambridge university press, 2010.

[2] Laure Dumaz, Yun Li, and Benedek Valkó. Operator level hard-to-soft transition for β-ensembles. *Electronic Journal of Probability*, 26 :1–28, 2021.

[3] Ioana Dumitriu and Alan Edelman. Matrix models for beta ensembles. *Journal of Mathematical Physics*, 43(11) :5830–5847, 2002.

[4] Alan Edelman and Brian D Sutton. From random matrices to stochastic operators. *Journal of Statistical Physics*, 127(6) :1121–1165, 2007.

[5] Jacques Franchi and Yves Le Jan. *Hyperbolic dynamics and Brownian motion : an introduction*. Oxford University Press, 2012.

[6] Evgenij Kritchevski, Benedek Valkó, and Bálint Virág. The scaling limit of the critical one-dimensional random schrodinger operator. *arXiv preprint arXiv :1107.3058*, 2011.

[7] Jose Ramirez, Brian Rider, and Bálint Virág. Beta ensembles, stochastic airy spectrum, and a diffusion. *Journal of the American Mathematical Society*, 24(4) :919–944, 2011.

[8] Benedek Valkó and Bálint Virág. Continuum limits of random matrices and the brownian carousel. *Inventiones mathematicae*, 177(3) :463–508, 2009.

[9] Benedek Valkó and Bálint Virág. The sine β operator. *Inventiones mathematicae*, 209(1) :275–327, 2017.

[10] Benedek Valkó, Bálint Virág, et al. Large gaps between random eigenvalues. *The Annals of Probability*, 38(3) :1263–1279, 2010.