Introduction aux mathématiques financières

Olivier Salagnac

Mai 2021

Table des matières

1 Préambule

Le but de ce document est d'offrir un aperçu des mathématiques financières dont on pourrait dégager trois grandes thématiques. Le premier volet porte sur l'évaluation de prix de produits financiers, le second s'intéresse à la question des portefeuilles. Enfin, le dernier pan, fortement motivé par les dernières crises, tente de lier les deux précédentes autour de la problématique du risque de crédit.

La première partie étant à la fois la brique de base pour comprendre les développements actuels et sans doute celle contenant les idées clefs, il me semble naturel d'y consacrer ce document. Le résultat fondamental des mathématiques financières est sans doute la formule de Black et Scholes publiée en 1973. Depuis, l'essentiel de la recherche tente d'étendre leur résultat contraint par des hypothèses trop restrictives pour parfaitement correspondre à la réalité des marchés financiers.

Bien que cela aille à l'encontre de la chronologie des développements des mathématiques financières, ceux-ci ayant originellement une approche EDP, la présentation suivra une approche plus probabiliste, le lien se faisant par la réciproque du théorème de Feynman-Kac.

Mais tout d'abord, il nous faut apporter quelques définitions et un cadre probabiliste précis.

2 Marché financier et produits dérivés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t}$ et S une semi-martingale positive localement bornée. S sera notre actif risqué, typiquement le cours d'une action, que l'on suit à horizon de temps $T > 0$ fini.
La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sera dite historique au sens où elle capture la dynamique de l'actif sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et elle sera notre mesure de probabilité référence. Nous identifierons les variables égales $\mathbb{P}$ presque sûrement.
La filtration $\mathbb{F}$ est l'unique source d'aléatoire et on partira de la tribu triviale $\mathcal{F}_0$ qui croît jusqu'à la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$

Un produit dérivé est un flux financier dépendant d'un aléa sous-jacent, ici notre processus S. Le cas le plus simple, auquel nous nous attacherons ici est un produit de coût π payé à la date $t = 0$ qui rapportera à terme $f(S_T)$ à échéance $t = T$, la fonction f ayant une certaine régularité pour répondre à des besoins techniques ultérieurs. La problématique est de fixer un prix π à la date initiale.
Prenons un cas simple $f = id$. Pour posséder S_T presque sûrement à la date T, il suffit d'acheter l'action S à la date $t = 0$, ce qui a un coût initial de $\pi = S_0$. En effet si $\pi < S_0$, on pourrait vendre pour π le contrat en garantissant S_T à échéance et acheter une action valant S_0 tout en empochant la différence $\pi - S_0 > 0$. A terme, on peut bien donner l'action promise S_T. On ferait la stratégie inverse si on avait $\pi > S_0$.

Cet exemple contient les deux idées centrales :
(i) On ne peut pas gagner d'argent de façon presque sûre. On parle d'hypothèse de non arbitrage.
(ii) Si on trouve une stratégie garantissant l'obtention presque sûre de $f(S_T)$, le prix π est égal au coût de cette stratégie. L'hypothèse de complétude stipule qu'une telle stratégie existe toujours.

On parle de marché parfait lorsque ces deux hypothèses sont vérifiées. Si en pratique l'hypothèse de non arbitrage est raisonnablement vérifiée puisque suffisamment d'acteurs tentent de tirer profit de ces situations, ce qui fait disparaître celles-ci, l'hypothèse de complétude des marchés est une idéalisation. L'étude de modélisation d'un marché imparfait est un point actif de la recherche en mathématiques financières.

Il reste à expliciter comment construire notre stratégie de réplication. L'idée est de construire une probabilité $\mathbb{Q}$ dite risque-neutre équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle S est une martingale locale. Le théorème de représentation des martingales donnera une décomposition sous $\mathbb{Q}$ du processus S et il restera à utiliser le calcul d'Itô pour s'intéresser au processus $f(S)$ dont la valeur terminale $f(S_T)$ correspond exactement au flux financier à terme.

Formalisons cette idée. On considère pour $1 \leq p \leq \infty$ l'ensemble $X = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ des flux monétaires muni de sa topologie usuelle et M le sous-espace vectoriel, l'ensemble des flux possédant un prix π défini par notre principe d'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$\forall m \in M \ , \ m \geq 0 \ \mathbb{P} \ p.s \ \text{ et } \ \mathbb{P}[m > 0] > 0 \Rightarrow \pi(m) > 0$$

M contient tous les cas simples.
Soit H un processus borné prévisible adapté à des temps discrets $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ et soit $x \in \mathbb{R}$ un investissement initial, considérons la stratégie $m = x + \sum_{i=0}^{N} H_{t_i}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})$ qui est bien un élément de M et $\pi(m) = x$
π est clairement linéaire sur M, l'objectif étant donc d'étendre π par une application linéaire positive $\pi^\star$ sur X. Une telle extension repose sur le théorème de Hahn-Banach.
Géométriquement, on peut séparer deux convexes par absence d'opportunité d'arbitrage :
$\{m \in M \mid \pi(m) \leq 0\}$ et l'intérieur de $\{x \in X \mid x \geq 0\}$. Pour que cet intérieur soit non vide avec un univers Ω infini, il faut choisir $p = +\infty$. L'extension $\pi^\star$ est induite par un élément g du dual de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. L'absence d'opportunité d'arbitrage garantit $g > 0 \ \mathbb{P} \ p.s$, la normalisation vient du fait que $\pi^\star(1) = \pi(1) = 1$ car $1 \in M$.
Cependant, le dual de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ n'est pas $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, ce qui fait que g n'est pas nécessairement la

dérivée de Radon-Nikodym d'une probabilité $\mathbb{Q}$ avec $g = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.
Il faut donc une hypothèse technique supplémentaire pour la bonne construction de $\mathbb{Q}$ dite "no free lunch" qui renforce l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \ \text{ deux suites généralisées } (m_\alpha)_{\alpha \in I}\ , (m_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ telles que } :\\
&m_\alpha \in M\ ,\ \pi(m_\alpha) = 0\\
&h_\alpha \in X\ ,\ h \geq 0\\
&\underset{\alpha \in I}{lim}\ (m_\alpha - h_\alpha) = x
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un renforcement car si l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage n'est pas vérifiée pour un x, il suffit de choisir $m_\alpha = x$ et $h_\alpha = 0$.

Sous cette probabilité $\mathbb{Q}$, le processus S est une martingale. Pour le prouver, on utilise la caractérisation suivante :
Pour tout H, processus borné prévisible adapté à des temps discrets $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$,

$$\pi^\star\left(\sum_{i=0}^{N} H_{t_i}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})\right) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\sum_{i=0}^{N} H_{t_i}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})\right]$$

La réciproque est également vraie et on a donc le théorème suivant :
Soit S un processus à valeurs dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, on a équivalence entre l'hypothèse "no free lunch" et l'existence d'une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle S est une martingale.

Ce résultat est dû à D.Kreps en 1981. Une généralisation aux semi-martingales avec une hypothèse technique intermédiaire a été établie en 1994 par Delbaen et Schachermayer.

Tout le développement s'est fait ici sans taux d'intérêt, ce qui transparaît avec l'équation $\pi(1) = 1$ et donne immédiatement la normalisation. Si on ajoutait un taux d'intérêt r, on aurait $\pi(1) = \exp(-rT)$: $\exp(-rT)$ investi aujourd'hui au taux r garantit bien le flux monétaire $1 = \exp(rT)\exp(-rT)$ à la date T. Pour retomber sur une probabilité $\mathbb{Q}$, il faut donc normaliser par ce facteur d'actualisation et le théorème reste valide.

3 Filtration Brownienne et stratégie de réplication

On rajoute maintenant une hypothèse sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ pour pouvoir appliquer le théorème de représentation des martingales. On supposera donc que la filtration $\mathbb{F}$ est générée par un mouvement Brownien.
Il existe donc un processus prévisible φ tel que :

$$S_t = S_0 + \int_0^t \varphi_s dBs$$

Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$, on a par calcul d'Itô :

$$\begin{aligned}
df(S_t) &= f'(S_t)dS_t + \frac{f''(S_t)}{2} d < S >_t \\
&= f'(S_t)dS_t + \frac{f''(S_t)}{2} \varphi_t^2 dt \\
f(S_t) &= \int_0^t f'(S_s)dS_s + f(S_0) + \int_0^t \frac{f''(S_s)}{2} \varphi_s^2 ds \\
\pi^\star\left(f(S_T)\right) &= \pi^\star\left(\int_0^T f'(S_s)dS_s\right) + \pi^\star\left(f(S_0) + \int_0^T \frac{f''(S_s)}{2} \varphi_s^2 ds\right) \\
\pi^\star\left(f(S_T)\right) &= 0 + \pi^\star\left(f(S_0) + \int_0^T \frac{f''(S_s)}{2} \varphi_s^2 ds\right) \\
\pi^\star\left(f(S_T)\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(f(S_T)|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(f(S_T)|\mathcal{S}_0\right)
\end{aligned}$$

Le prix à la date 0 de notre produit dérivé délivrant $f(S_T)$ à terme est donné par l'espérance sous probabilité $\mathbb{Q}$. Ce calcul met également en lumière la manière dont on peut garantir à terme le flux financier partant du prix initial. Si à tout instant, on achète ou vend des actions S pour maintenir un stock $f'(S_t)$, le reste n'étant pas investi, on a bien à terme le flux financier désiré. On parle alors de portefeuille de réplication autofinançant.
De manière générale, si on ajoute un taux d'intérêt r, un portefeuille autofinançant est donné par deux processus $(V)_{0\leq t\leq T}$ et $(\Delta)_{0\leq t\leq T}$ correspondant respectivement à la valeur du portefeuille et au nombre d'actions S qu'il contient. On a d'une part la condition d'autofinancement :

$$dV_t = \Delta_t dS_t + (V_t - \Delta_t S_t) r dt$$

Par ailleurs, la formule d'Itô donne :

$$dV_t = \left(\partial_t V_t + \frac{1}{2} < S >_t \partial_{ss} V_t\right) + \partial_s V_t dS_t$$

En identifiant les termes, on peut poser $\Delta_t = \partial_s V_t$.
On a donc l'EDP suivante avec une condition terminale de la forme $V(s,T) = f(s)$

$$\partial_t V + \frac{1}{2} < S > \partial_{ss} V - rV + rS\partial_s V = 0$$

Cette approche EDP est équivalente au calcul d'espérance risque neutre sous réserve de régularité de la variation quadratique de S par le théorème de Feynman-Kac. Historiquement, les travaux de Black et Scholes s'intéressaient davantage à cette optique mais les hypothèses techniques semblent plus naturelles avec le point de vue probabiliste.

4 Modèle Black-Scholes

Quel que soit le point de vue pris, aucun calcul ne peut être réalisé sans modéliser la dynamique de S sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Cela permet soit d'évaluer des espérances, soit de résoudre l'EDP en connaissant la variation quadratique de S.
Le modèle le plus célèbre, base de tous les travaux d'améliorations successives, vient des travaux de Black et Scholes. Ils se fixent un taux d'intérêt r et cherchent étonnamment à décrire la loi de S sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. Ils considèrent qu'un investisseur ne se présente que s'il existe une prime de risque $\mu > r$ et que sous $\mathbb{P}$, S suit la dynamique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

avec $\tilde{W}$ un $\mathbb{P}$ mouvement Brownien et σ un paramètre strictement positif dit volatilité.
Le théorème de Girsanov permet dans ce cas de construire explictement la probabilité risque neutre en effectuant le changement de probabilité suivant :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = exp\left(\int_0^t \frac{r-\mu}{\sigma} d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 ds\right)$$

Sous $\mathbb{Q}$, la dynamique de S est de forme similaire :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec W un $\mathbb{Q}$ mouvement Brownien.
Par un changement de variable en log, on trouve classiquement un mouvement Brownien géométrique :

$$S_t = S_0\ exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

La formule de Black-Scholes correspond au prix d'une option d'achat à un seuil K : $f(s) = \max(s-K, 0)$.
Dans ce cas, en calculant l'espérance sous $\mathbb{Q}$ et en n'oubliant pas le facteur de normalisation $\exp(-rT)$:

$$\pi(\max(S_T - K, 0)) = S_0\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_-)$$

où $\mathcal{N}()$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où :

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

L'importance de cette formule tient à plusieurs éléments :
- Les options d'achat sont parmi les produits financiers les plus courants, ils servent donc de base de calibration des modèles.
- Le prix ne dépend que d'un paramètre facilement interprétable et ce de façon monotone.
- Toute la gamme de prix non immédiatement arbitrable (de 0 à S_0) est accessible par la formule.

Le succès du modèle Black-Scholes tient en deux points : il est facilement interprétable avec son unique paramètre représentant l'intensité du bruit Brownien et il donne de nombreux résultats analytiques, la loi de l'actif risqué S étant suffisamment simple.
Le défaut principal de cette approche tient à la calibration médiocre qu'elle engendre. En effet, si on cherchait à inverser la formule de Black-Scholes, on obtiendrait une fonction implicite $\sigma(K)$ qui n'a pas de raison d'être constante.

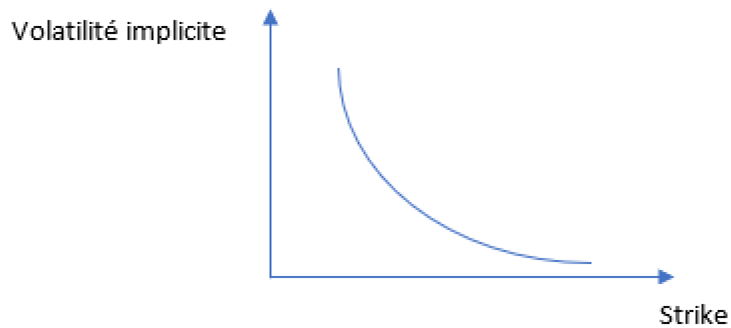

Illustration du caractère non constant de la volatilité implicite en fonction du "strike" K

Traditionnellement, on a une volatilité implicite convexe en fonction du "Strike" K, avec soit une décroissance continue comme ci-dessus, soit une forme parabolique. La raison intuitive en est que le bruit Gaussien a des queues de distribution trop faibles, sous-estimant les probabilités de krach boursier et éventuellement également de flambée des cours.
La connaissance de la volatilité implicite nous permet de connaître la loi de S_T. En effet, si on note $p(s,T)$ sa densité, on a pour tout $K \geq 0$:

$$\pi(\max(S_T - K, 0)) = e^{-rT} \int_K^{+\infty} (s-K)p(s,T)ds$$

Sous réserve de régularité suffisante, on peut dériver par rapport à K et permuter dérivée et intégrale :

$$\partial_K \pi(\max(S_T - K, 0)) = -e^{-rT} \int_K^{+\infty} p(s,T)ds$$
$$\partial_{K,K} \pi(\max(S_T - K, 0)) = e^{-rT} p(K,T)$$

Le travail de modélisation qui anime toujours la recherche en mathématiques financières porte sur le remplacement du paramètre de volatilité σ, visant à enrichir le modèle. Différentes propositions avec leurs avantages et leurs défauts proposent une modélisation plus souple, qui font par exemple de σ une fonction ou un processus stochastique, la dynamique étant alors de la forme :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t(t, S_t) S_t dW_t$$

Les modèles ayant une composante stochastique se prêtent à des simulations Monte Carlo et ont le vent en poupe grâce à leur vitesse de convergence relativement indépendante de la dimension. Cependant pour développer le concept de la volatilité implicite, nous allons plutôt détailler une approche dite à volatilité locale - σ étant alors une fonction déterministe. Cette approche fut proposée par Dupire en 1994 et repose sur l'EDP de portefeuille autofinançant.

5 Un exemple d'extension : un modèle à volatilité locale

On cherche une fonction $\sigma(t,s) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$ qui permette de calibrer les prix des options d'achat à chaque instant et à chaque seuil, telle que la dynamique soit :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t$$

Repartons de l'EDP combinant autofinancement et formule d'Itô, en notant que notre condition terminale doit être vérifiée dorénavant à chaque instant :

$$\begin{aligned}
&\partial_t V + \frac{1}{2} < S > \partial_{ss} V - rV + rS\partial_s V = 0 \\
&V(K,t) = \max(S_t - K, 0)
\end{aligned}$$

On remplace la variation quadratique pour introduire notre fonction de volatilité :

$$\begin{aligned}
&\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma(s,t)^2 s^2 \partial_{ss} V - rV + rS\partial_s V = 0 \\
&V(s,t) = \max(s - K, 0)
\end{aligned}$$

On ne peut pas directement isoler $\sigma(s,t)$ dans la première équation ci-dessus car les dérivées de V ne sont pas connues, seules les données aux points de la forme (S_t, t) étant accessibles.

L'idée de Dupire est de partir plutôt de l'équation de Fokker-Planck portant sur la densité de probabilité $p(s,t)$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t p(s,t) + r\partial_s(sp(s,t)) - \frac{1}{2}\partial_{s,s}(s^2\sigma(s,t)^2 p(s,t)) = 0 \\
&p(s,0) = \delta(S_0 - s)
\end{aligned}$$

Partons de la définition du prix comme espérance et introduisons l'équation de Fokker-Planck :

$$\begin{aligned}
\partial_t V(K,t) &= \int_K^{+\infty} (s-K)\partial_t p(s,t) ds \\
&= -r\int_K^{+\infty} (s-K)\partial_s(sp(s,t))ds + \frac{1}{2}\int_K^{+\infty}(s-K)\partial_{s,s}(s^2\sigma(s,t)^2 p(s,t))ds \\
&= rV(K,t) + rK\int_K^{+\infty} p(s,t)ds + \frac{1}{2}K^2\sigma(K,t)^2 p(K,t)
\end{aligned}$$

Cette dernière étape repose sur des intégrations par parties et nécessite des queues de distribution assez fines pour que les termes de bords disparaissent.
On peut enfin remplacer $p(K,t)$ par $\partial_{K,K}V(K,t)$ pour obtenir l'équation de Dupire :

$$\partial_t V(K,t) = r\left[V(K,t) - K\partial_K V(K,t)\right] + \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K,t)\partial_{K,K}V(K,t)$$

Notons que $V(K,t) = e^{rt}\pi^\star(\max(S_t - K, 0))$.
La convexité des prix, par arbitrage, nous garantit que l'on peut isoler $\sigma(K,t)$.
Il existe donc une unique fonction de volatilité locale compatible avec les prix de marché, donnée par :

$$(K,t) \to \sigma(K,t) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial e^{rt}\pi^\star(\max(S_t-K,0))}{\partial t} - r\left(e^{rt}\pi^\star(\max(S_t-K,0)) - K\frac{\partial e^{rt}\pi^\star(\max(S_t-K,0))}{\partial K}\right)}{K^2\frac{\partial^2 e^{rt}\pi^\star(\max(S_t-K,0))}{\partial K^2}}}$$

6 Autres paradigmes

Les développements précédents montrent qu'il existe une approche assez naturelle pour évaluer les densités de probabilité à un instant donné T. La démarche est la suivante :
- On observe les prix disponibles sur le marché comme base de calibration.
- En inversant la formule de Black-Scholes, on accède à la volatilité implicite.
- La loi étant connue à cette date, on peut alors, par intégration numérique, évaluer les prix de différents flux financiers à cette date T.

Deux grandes catégories de problèmes restent donc à traiter et n'ont pas de réponses explicites.
Premièrement, si on ne s'intéresse plus à un seul actif risqué, mais à plusieurs $(S_T^i)_{1\leq i\leq N}$, la méthodologie précédente ne donne accès qu'aux marginales et n'importe quelle copule permettra de les calibrer. Il faut soit chercher sous une forme spécifique, soit chercher de nouvelles propriétés plus restrictives pour établir une loi jointe. Mon mémoire de M2 portait sur une telle question, en prenant pour chaque S^i un taux de change, ce qui impose des conditions supplémentaires de la forme $S^i \times S^j = S^k$ $p.s.$
L'autre grande thématique est la question de la loi du processus $(S_t)_{0\leq t\leq T}$, certains produits financiers faisant intervenir le chemin et pas seulement la valeur du cours à échéance. La connaissance des lois à chaque instant t ne suffit alors pas. Toute une série de modèles dits à volatilité stochastique a été développée à cette fin, l'objectif étant de pouvoir inclure une auto-corrélation. Ils se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1\\
&d\sigma_t = \alpha_{S,t}dt + \beta_{S,t}dW_t^2\\
&< W^1, W^2 >= \rho
\end{aligned}$$

Enrichir les modèles permet naturellement de mieux calibrer les données observables, mais cela engendre une perte d'interprétation possible des différents paramètres. Le risque de modélisation par overfitting est un point crucial, car ce ne sont pas seulement les prix qui sont impactés, mais également la gestion de risque. Grossièrement, celle-ci se résume à évaluer les pertes potentielles si on se trouve à un certain quantile de la queue de distribution (95%, 99%, ...) à une certaine échelle de temps et à conserver un fond de valeur au moins équivalente. Si la précision de la calibration permet une bonne maîtrise du coeur de la distribution, la question des événements rares reste problématique. Même si l'on est confiant sur nos queues de distribution pour couvrir tel ou tel produit, il subsiste un problème potentiel, celui de la faillite de la contre-partie de notre stratégie de réplication.
Pour cette raison, un pan des mathématiques financières que je n'ai pas développé ici entreprend de se poser la question des risques de crédit et de toute autre forme d'ajustements que le simple calcul d'espérance du flux financier ne peut pas percevoir. Soit une probabilité de défaut $PD(t)$, on a typiquement pour le crédit une perte potentielle :

$$\int_0^T e^{-rt}\max(0, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)|\mathcal{F}_t])d\ PD(t)$$

Toute la difficulté de l'évaluation de ce type de formules vient de la possible corrélation entre la densité et l'espérance conditionnelle.
Le dernier grand champ d'études actuel questionne les hypothèses fondamentales du développement présenté. Si on retire l'hypothèse de complétude du marché, on perd l'unicité de la probabilité sans risque $\mathbb{Q}$. Certains développements récents proposent de remplacer le bruit Brownien par un Brownien fractionnaire, l'exposant de Hölder $1/2-\epsilon$ semblant un peu trop régulier pour les données observées.
Avec des liens importants avec l'informatique, les mathématiques financières sont donc un domaine actif de recherche avec plusieurs directions explorées simultanément du plus théorique au plus concret.

7 Bibliographie

Bachelier L. (1964). Théorie de la Spéculation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17, 21–86 (1900) English translation in : The Random Character of stock market prices (P. Cootner, editor), MIT Press.

Black F, Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy 81, 637–659.

Delbaen F, Schachermayer W. (1994). A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. Mathematische Annalen 300, 463– 520.

Dupire B. (1994). Pricing with a smile. Risk 7(1), pp. 18-20.

Kreps D.M. (1981). Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities. Journal of Mathematical Economics 8, 15– 35.

Schachermayer W. (2010). The fundamental theorem of asset pricing. Survey article (18 pages), Encyclopedia of Quantitative Finance, Vol. 2 (2010), pp. 792-801.