Introduction au domaine de recherche : Propriété de Pinsker faible et filtrations dynamiques

Séverin Benzoni

Encadrant : Thierry De La Rue

7 mai 2021

Résumé

En 2018, Tim Austin [1] a démontré que tout système dynamique ergodique vérifie le propriété de Pinsker faible : le système est isomorphe au produit cartésien d'un schéma de Bernoulli et d'un système d'entropie arbitrairement petite. L'étude du système peut être réduite à l'étude du facteur d'entropie petite. On propose de faire cela au travers de la notion de filtration facteur, qui désigne les suites décroissantes de tribus invariantes. En effet, en itérant la décomposition donnée par Austin, on construit une filtration facteur pour laquelle l'entropie est successivement divisée par 2. Les filtrations ainsi construites sont appelées les *filtrations de Pinsker* du système.

Dans [5], on voit que la classification usuelle des filtrations d'un espace de probabilité ne suffit pas à étudier les filtrations facteur, et il est proposé de développer une classification « dynamique » des filtrations. L'objectif principal (mais pas encore atteint) est de caractériser les filtrations dynamique standard, c'est-à-dire les filtration qui proviennent d'un produit de systèmes dynamiques indépendants. Appliquer cette classification aux filtrations de Pinsker devrait nous fournir de nouvelles informations sur le système sous-jactent.

En particulier, on projette de s'intéresser aux suspensions de Poisson (action d'une transformation sur les configurations d'un processus de Pois-

son), motivés par la question de l'existence de suspensions de Poisson qui seraient des K-systèmes non-Bernoulli.

Sommaire

1 Théorie ergodique et entropie

1.1 Premières définitions

1.1.1 Objets étudiés

La théorie ergodique est le cadre abstrait de l'étude des systèmes dynamiques mesurés : on se donne un ensemble X muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et d'une mesure de probabilité μ sur $\mathscr{F}$ tels que $(X, \mathscr{F}, \mu)$ soit un espace de Lebesgue. Sur cet espace de probabilité, vient agir une transformation T qui est une application mesurable, inversible et d'inverse mesurable. On suppose que T préserve la mesure : pour tout $A \in \mathscr{F}$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Autrement dit, la mesure image de μ par T, $T_*\mu$, est égale à μ. On appellera *système dynamique* le quadruplet $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$.

Si on se donne $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques, comment peut-on comparer leurs structures ? On dit que $(Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ est un facteur de $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ s'il existe une application $\pi : X \longrightarrow Y$ mesurable telle que

(i) π envoie μ sur ν : $\pi_*\mu = \nu$,

(ii) et $\pi \circ T = S \circ \pi$.

On dit que π est une *application facteur*. De plus, si π est bijective, on dit que $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ sont isomorphes.

On peut montrer qu'un facteur de $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$, comme décrit ci-dessus, est caractérisé, à isomorphisme près [1], par la tribu engendrée par π. Ainsi, l'étude des facteurs du système revient à étudier les sous-tribus T-invariantes de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire les tribus $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ telles que $T^{-1}\mathscr{C} = T\mathscr{C} = \mathscr{C}$. Pour cette raison, de telles tribus seront, par la suite, aussi appelées facteurs du système.

1.1.2 Entropie de Kolmogorov-Sinaï

En 1958, Kolmogorov et Sinaï [4] ont introduit l'entropie en théorie ergodique : on se donne un système dynamique $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ et une v. a. ξ_0. On veut alors déterminer l'évolution des valeurs prises par ξ_0 lorsqu'on applique T, on cherche donc à étudier le *processus* engendré par ξ_0 :

$$\xi := (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ où } \xi_n := \xi_0 \circ T^n.$$

L'entropie de ξ, notée $h(\xi, \mu, T)$, mesure l'« imprédictibilité » du processus ξ : c'est la quantité d'information donnée par ξ_0 qui n'était pas donnée par le passé de ξ (c'est-à-dire $\xi_{]-\infty,0[}$). En particulier, si l'entropie est nulle, ξ_0 est $\xi_{]-\infty,0[}$-mesurable. Au contraire, un processus de grande entropie est très peu prédictible.

Enfin, comme le processus ξ ne détermine pas nécessairement le système $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ dans son ensemble, on définit l'entropie du système par :

$$h(\mathscr{F}, \mu, T) := \sup\{h(\xi, \mu, T) \text{ ; } \xi \text{ processus } \mathscr{F}\text{-mesurable}\}. \tag{1}$$

On voit alors que l'entropie est monotone par passage au facteur : pour tout facteur $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, on a $h(\mathscr{G}) \leq h(\mathscr{F})$. Ainsi, deux systèmes isomorphes sont nécessairement de même entropie : c'est un invariant.

1. si π' est une application facteur qui engendre la même tribu, il existe un isomorphisme φ tel que $\pi' = \pi \circ \varphi$.

1.2 K-systèmes

La première classe de systèmes reliée à l'entropie est due à Kolmogorov (en 1958) :

Définition 1.1. $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ est un K-système si tout processus ξ sur X est d'entropie non-nulle.

De manière équivalente, c'est un K-système s'il existe un processus ξ sur X générateur qui vérifie la loi du $0-1$: la tribu de queue

$$\Pi := \bigcap_{n \leq 0} \sigma\left(\xi_{]-\infty,n]}\right) {}^{2},$$

est triviale $\mod \mu$, c'est-à-dire que tout élément de la tribu de queue est de mesure 0 ou 1.

Une preuve de cette équivalence, et plus de détails sur ces systèmes se trouvent dans les notes de cours [2].

1.3 Schémas de Bernoulli

Définition. Soit (A, γ) un espace de probabilité fini ou dénombrable. On construit alors le système

$$(A^{\mathbb{Z}}, \mathscr{C}, \gamma^{\otimes \mathbb{Z}}, T_A),$$

où T_A est le décalage vers la gauche, et $\mathscr{C}$ est la tribu cylindrique, c'est-à-dire la tribu engendrée par $(\alpha_n : (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Un système de cette forme est appelé *schéma de Bernoulli*.

Ainsi, tout processus ξ dont les coordonnées sont indépendantes engendre un schéma de Bernoulli. Dans ce cas, on dira, abusivement, que ξ est un schéma de Bernoulli.

Classification. La classification des schémas de Bernoulli, prouvée par Ornstein en 1970, marque l'un des grands succès de l'entropie en théorie ergodique : en effet, il montre que deux schémas de Bernoulli sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même entropie (voir [7] et [8]).

De plus, bien que l'entropie soit, en générale, difficile à calculer, elle s'obtient facilement pour les schémas de Bernoulli :

$$h(\alpha, \gamma^{\otimes \mathbb{Z}}, T_A) = H_\gamma(\alpha_0).$$

2. Pour toute v.a. ρ, $\sigma(\rho)$ est la tribu engendrée par ρ.

Loi du $0-1$. Un résultat bien connu de Kolmogorov (Loi du $0-1$ de Kolmogorov, 1933) prouve que tous les schémas de Bernoulli vérifient la loi du $0-1$, et ce sont donc des K-systèmes. En revanche, la classe des K-systèmes est beaucoup plus vaste que celle des schémas de Bernoulli, et, notamment, la classification donnée ci-dessus ne s'étend pas aux K-systèmes. Les premiers exemples de K-systèmes non-Bernoulli sont dus à Ornstein ([10] et [9]).

1.4 Propriété de Pinsker faible

1.4.1 Définition

Les schémas de Bernoulli forment une famille de systèmes que l'on comprend bien, et il est donc naturel de se demander s'ils permettent de mieux décrire des classes plus générales de systèmes. Dans ce but, Thouvenot introduit en 1977, dans [11], la propriété de Pinsker faible :

Définition 1.2. On dit qu'un système ergodique [3] $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ vérifie la *propriété de Pinsker faible* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un schéma de Bernoulli $\mathcal{B}$ et un système $\mathbf{Y}$ tels que $h(\mathbf{Y}) = \varepsilon$ et

$$(X, \mathscr{F}, \mu, T) \cong \mathbf{Y} \times \mathcal{B}.$$

Le nom de cette propriété vient d'une conjecture antérieure, formulée par Pinsker, selon laquelle tout système vérifie une propriété similaire mais plus ambitieuse : cette conjecture affirmait que l'on pouvait écrire tout système ergodique comme le produit d'un K-système [4] et d'un système d'entropie nulle.

1.4.2 Théorème d'Austin

Au cours de années 1970, les développements qui ont suivi la preuve de la classification des schémas de Bernoulli par Ornstein (qui constituent la théorie d'Ornstein) ont été très fructueux, et ont révélé une grande diversité dans les structures des systèmes dynamiques mesurés. Pour cette raison, lorsque Thouvenot introduit la propriété de Pinsker faible, il ne pense pas que tous les systèmes la vérifient. Cependant, en 2018, Tim Austin prouve [1] que c'est le cas :

3. Un système est ergodique si tout ensemble T-invariant est mesure 0 ou 1.

4. Lorsque Pinsker a formulé cette conjecture, les exemples de K-systèmes non-Bernoulli n'étaient pas encore connus.

Théorème 1.1. *[Théorème d'Austin] Soit* $\pi : (X, \mathscr{F}, \mu, T) \longrightarrow (Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ *une application facteur entre systèmes ergodiques. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un processus* φ *tel que* $h(\varphi, \mu, T) \leq \varepsilon$ *et* (X, μ, T) *est relativement Bernoulli par rapport à* $\pi \vee \varphi$*, c'est-à-dire qu'il existe un schéma de Bernoulli* $\mathcal{B}$ *tel que*

$$(X, \mathscr{F}, \mu, T) \cong X/_{\pi \vee \varphi} \times \mathcal{B},$$

où $X/_{\pi \vee \varphi}$ *est le facteur engendré par* $\pi \vee \varphi$*, et* $\pi \vee \varphi$ *est l'application jointe* $x \mapsto (\pi(x), \varphi(x))$*.*

Remarque 1.1. Ce théorème prouve bien que tout système vérifie la propriété de Pinsker faible : il suffit d'appliquer le résultat avec un facteur π de petite entropie.

L'étude de la preuve de ce théorème et des outils qu'elle utilise a été le sujet de mon mémoire de M2. L'objectif de ma thèse sera de mieux comprendre les informations que ce résultat donne sur la structure des systèmes dynamiques, notamment au travers de la notion de filtration dynamique, introduite plus bas.

2 Filtrations et théorie de Vershik

Dans cette section, il ne sera pas question de systèmes dynamiques, mais simplement de théorie des probabilités usuelle. Ainsi, dans toute cette partie, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité.

2.1 Filtrations

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ un intervalle. Une filtration sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est une suite $\mathscr{F} := (\mathscr{F}_n)_{n \in I}$ croissante de tribus $\mathscr{A}$-mesurables, c'est-à-dire que, pour tout $n \in I$, $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$.

En probabilité, ces objets apparaissent principalement dans la théorie des martingales avec $I := \mathbb{N}$. En revanche, les filtrations en temps négatif, c'est-à-dire lorsque $I = \mathbb{Z}^-$, possèdent des propriétés plus étonantes et ont sucité l'intérêt des mathématiciens.

L'étude des filtrations en temps négatif, initiée par Vershik dans les années 1970, a donné naissance à de nombreux outils que je présente ci-dessous.

2.2 Isomorphisme et immersion

L'objectif étant de classifier les filtrations, il nous faut une notion d'« isomorphisme de filtrations ». On se donne un processus[5] $X := (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. La filtration engendrée par X est

$$\forall n \in \mathbb{Z}^-,\ \mathscr{F}_n := \sigma(X_m\,;\ m \leq n).$$

Il est facile de voir que c'est bien une suite croissante.

Définition 2.1. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega^*, \mathscr{A}^*, \mathbb{P}^*)$ deux espaces de probabilité munis de filtrations $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *isomorphes* s'il existe deux processus X et Y qui engendrent $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ respectivement tels que

$$\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(Y),$$

où $\mathscr{L}$ désigne la loi des processus.

Une autre notion centrale dans la classification des filtrations est l'*immersion*, qui traduit l'idée de « sous-filtration » :

Définition 2.2. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux filtrations sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que $\mathscr{F}$ *est immergée dans* $\mathscr{G}$ si

(i) $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{G}_n$,

(ii) et $\mathscr{F}_{n+1}$ est indépendante de $\mathscr{G}_n$ sachant $\mathscr{F}_n$, c'est-à-dire que pour toute v.a. ξ mesurable par rapport à $\mathscr{F}_{n+1}$ on a

$$\mathbb{E}[\xi \,|\, \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\xi \,|\, \mathscr{G}_n],$$

où $\mathbb{E}[\cdot \,|\, \cdot]$ désigne l'espérance conditionnelle.

De plus, on dit que $\mathscr{F}$ est immersible dans $\mathscr{G}$ s'il existe $\mathscr{F}'$ isomorphe à $\mathscr{F}$ et immergée dans $\mathscr{G}$. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ soient définies sur le même espace de probabilité.

5. Ici, le terme processus désigne simplement une suite quelconque de v.a.

2.3 Familles principales et classification

La théorie de Vershik a pour but de classifier les filtrations selon les familles suivantes :

(i) Type produit : une filtration est de *type produit* si elle est engendrée par un processus indépendant, c'est-à-dire un processus dont les coordonnées sont mutuellement indépendantes.

(ii) Standard : une filtration $\mathscr{F}$ est *standard* si elle immersible dans une filtration de type produit.

(iii) Kolmogorovienne : une filtration $\mathscr{F}$ est dite *kolmogorovienne* si $\bigcap_{n\leq 0} \mathscr{F}_n$ est triviale.

Certaines implications sont connues : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). En revanche, les implications réciproques sont fausses. L'un des points de départ essentiel des travaux de Vershik sur le sujet a été la construction d'une filtration kolmogorovienne non-standard (voir [12] ou [3]).

Dans ses travaux, Vershik a aussi introduit un critère (qu'on appelle critère de Vershik) qui permet de caractériser les filtrations standard. Ensuite, en se basant sur les travaux de Vershik, dans [3], Émery et Schachermayer développent un autre critère de standardité, appelé « I-confort », que je présente rapidement dans la section suivante.

2.4 I-confort

Le I-confort repose sur la notion de couplage : on se donne deux copies de $\mathscr{F}$, qu'on note $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$, définies sur un même espace de probabilité et on s'intéresse au couple $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$.

Couplage en temps réel. Pour une filtration donnée, il va souvent exister un très grand nombre de couplages possibles. Dans le cadre du I-confort, on s'intéresse aux couplages $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$ tels que les filtrations $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont toutes deux immergées dans $\mathscr{F}' \vee \mathscr{F}''$. La propriété (i) de la Définition 2.2 est clairement vérifiée, et le point important réside donc dans la propriété (ii). Il s'agit d'une propriété délicate à interpréter, mais heuristiquement, elle signifie que le couplage respecte la structure temporelle des filtrations : la tribu $\mathscr{F}''_n$ ne doit pas fournir d'informations sur le futur de $\mathscr{F}'$ qui ne sont pas déjà contenues dans $\mathscr{F}'_n$. Pour cette raison un tel couplage est appelé *couplage en temps réel* de $\mathscr{F}$.

Énoncé. On dit que $\mathscr{F}$ vérifie le I-confort si pour tout alphabet fini A et pour toute v.a. $\mathscr{F}_0$-mesurable $\xi : \Omega \longrightarrow A$, pour tout $\delta > 0$, il existe $n_0 \leq 0$ et un couplage en temps réel $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$ tels que $\mathscr{F}'_{n_0}$ et $\mathscr{F}''_{n_0}$ sont indépendantes et

$$\tilde{\mathbb{P}}(\xi' \neq \xi'') \leq \delta,$$

où $\tilde{\mathbb{P}}$ est mesure de probabilité de l'espace sur lequel $(\mathscr{F}', \mathscr{F}'')$ est défini. L'énoncé ci-dessus signifie en un sens très fort que l'information contenue dans $\mathscr{F}_0$ dépend très peu de $\mathscr{F}_{n_0}$, si n_0 est assez proche de $-\infty$.

Résultat. Comme je l'avais annoncé, le I-confort est un critère de standardité : c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ est standard si et seulement si elle vérifie le I-confort. On peut trouver une preuve de ce résultat utilisant le critère de Vershik dans [3, Corollary 5] ou une preuve directe donnée plus tard par Stéphane Laurent dans [6, Theorem 4.9].

3 Filtrations dynamiques

On a expliqué plus haut que l'étude des facteurs d'un système dynamique se fait par l'étude de ses tribus invariantes. Par conséquent, il est naturel de vouloir étudier les filtrations dont tous les éléments sont des tribus invariantes : de telles filtrations sont appelées *filtration dynamique* ou *filtration facteur*. Plus précisément :

Définition 3.1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ un système dynamique. Une *filtration dynamique* (ou *filtration facteur*) est une filtration $\mathscr{F}$ sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ pour laquelle chaque tribu $\mathscr{F}_n$ est T-invariante.

3.1 Nouvelle classification

On peut appliquer les notions d'isomorphisme et de standardité de Vershik à ces filtrations, mais cela ne prend en compte leurs caractéristiques dynamiques. Il faut donc adapter les notions de la théorie de Vershik à ce cadre nouveau. Ce travail a été initié récemment dans la thèse de Paul Lanthier [5].

Pour établir une classification dynamique de ces filtrations, il faut commencer par définir une notion d'isomorphisme dynamique de filtrations. Pour cela, il suffit d'adapter la Définition 2.1 comme suit :

Définition 3.2. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques munis de deux filtrations facteur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *dynamiquement isomorphes* s'il existe deux processus $(\varphi_n)_{n\leq 0}$ et $(\psi_n)_{n\leq 0}$ qui engendrent $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ respectivement, de même loi et tels que chaque φ_n et ψ_n sont des applications facteur.

Ensuite, on dit qu'une filtration facteur $\mathscr{F}$ est de *type produit dynamique* s'il existe un processus indépendant $(\varphi_n)_{n\leq 0}$, dont chaque φ_n est une application facteur, et qui engendre $\mathscr{F}$. Il existe alors une notion naturelle de « standardité dynamique » :

Définition 3.3. Une filtration facteur $\mathscr{F}$ est dite *dynamiquement standard* s'il existe une filtration $\mathscr{G}$ de type produit dynamique et une filtration $\mathscr{F}'$ dynamiquement isomorphe à $\mathscr{F}$ immergée dans $\mathscr{G}$.

Dans [5], on voit l'intérêt de cette nouvelle classification : on y trouve un exemple de filtration facteur qui est de type produit au sens de Vershik mais qui n'est pas dynamiquement standard.

On peut poursuivre le parallèle avec la théorie de Vershik et définir le *I-confort dynamique* : on reprend la définition donnée dans la Section 2.4, et il suffit de supposer que les copies $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont des filtrations facteur *dynamiquement* isomorphes à $\mathscr{F}$. Muni de ces définitions, dans [5], Paul Lanthier démontre qu'une filtration dynamiquement standard vérifie le I-confort. Cependant, la réciproque, qui est vraie dans le cadre classique, n'est pas claire dans ce cadre dynamique et reste une question ouverte :

Question 3.1. *Est-il vrai que toutes les filtrations vérifiant le I-confort dynamique sont dynamiquement standard ? Sinon, peut-on trouver d'autres critères de standardité dynamique ?*

Contrairement au cadre classique, dans le cadre dynamique, la question suivante est aussi ouverte :

Question 3.2. *Existe-t-il une filtration dynamiquement standard qui ne soit pas de type produit dynamique ?*

3.2 Filtrations de Pinsker

On se donne un système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ d'entropie positive (par exemple $h(X) \geq 1$). Voyons comment une filtration dynamique émerge natuellement du Théorème d'Austin. Pour cela, on pose $\mathscr{F}_0 := \mathscr{A}$ et on procède par récurrence : pour $n \leq 0$, on applique le Théorème d'Austin à $X/_{\mathscr{F}_n}$ pour construire une tribu facteur $\mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n$ d'entropie 2^{n-1} telle qu'il existe un schéma de Bernoulli $\mathcal{B}_n$ tel que

$$X/_{\mathscr{F}_n} \cong \mathcal{B}_n \times X/_{\mathscr{F}_{n-1}}. \tag{2}$$

On appelle une telle filtration une *filtration de Pinsker* du système. Malheureusement, le choix de $\mathscr{F}_n$ à chaque étape de cette construction n'est pas unique, et il n'y a donc pas une unique filtration de Pinsker. Le seul résultat connu est que, si $\mathscr{G}$ est une autre filtration de Pinsker de X, alors, pour tout $n \leq 0$, les facteurs engendrés par $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{G}_n$ sont isomorphes (cela découle de [1, Theorem 16.1]). En revanche, on ne sait pas si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont isomorphes (au sens de la Définition 3.2) et il s'agit d'une de nos principales questions ouvertes sur le sujet :

Question 3.3. *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ un système dynamique. Toutes les filtrations de Pinsker de X sont-elles dynamiquement isomorphes ?*

L'étude des filtrations dynamiques peut nous permettre d'en apprendre plus sur la structure des systèmes dynamiques mesurés. Par exemple, un système dynamique est isomorphe à un schéma de Bernoulli si et seulement s'il possède une filtration de Pinsker de type produit, et c'est un K-système si et seulement si toutes ses filtrations de Pinsker sont kolmogoroviennes. Ainsi, l'existence de K-systèmes non-Bernoulli prouve l'existence de filtrations de Pinsker kolmogoroviennes mais pas de type produit, mais il serait intéressant de construire une telle filtration de manière plus explicite. De plus, si la réponse à la Question 3.2 est positive, il est naturel de se demander :

Question 3.4. *Que peut-on dire d'un système possédant une filtration de Pinsker dynamiquement standard ?*

3.3 Application aux suspensions de Poisson

Les suspensions de Poisson sont une famille particulière de systèmes dynamiques, d'origine probabiliste. On part d'un système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ pour lequel μ n'est pas nécessairement une mesure de probabilité, mais seulement une mesure σ-finie. On regarde l'espace X^* des configurations dénombrables de points sur X muni d'une mesure de probabilité μ^*, carctérisée par les propriétés suivantes :

(i) pour tout ensemble $A \subset X$ mesurable, le nombre de points dans A suit une loi de Poisson d'intensité $\mu(A)$,

(ii) et si $A_1, ..., A_k$ sont des ensembles 2 à 2 disjoints, les nombres de points contenus dans chacun de ces ensembles forment des variables mutuellement indépendantes.

Sur l'espace (X^*, μ^*) agit la transformation T_* obtenue en appliquant T à tous les points d'une configuration de X^*. Le système (X^*, μ^*, T_*) est ce qu'on appelle une suspension de Poisson.

Remarque 3.1. La mesure μ^* décrite ci-dessus est la loi d'un *processus ponctuel de Poisson* sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$, un objet bien connu en probabilité. On renvoie le lecteur aux notes de cours [2] pour plus de détails sur ces notions

L'intérêt de ces systèmes vient, entre autre, du fait qu'ils constituent un pont entre la théorie ergodique en mesure infinie et le cas des mesures de probabilités. Par exemple, cela permet de définir l'*entropie de Poisson* du système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ comme l'entropie de sa suspension de Poisson, (X^*, μ^*, T_*).

En particulier, la description des suspension de Poisson qui sont des K-systèmes reste un problème largement ouvert, et l'étude des filtrations de Pinsker de ces systèmes pourrait nous éclairer sur la question suivante, encore ouverte :

Question 3.5. *Existe-t-il une suspension de Poisson qui serait un K-système non-Bernoulli ?*

Références

[1] Tim Austin. Measure concentration and the weak Pinsker property. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 128 :1–119, 2018.

[2] T. de la Rue. Introduction à la théorie ergodique. Notes de cours, disponibles à l'adresse `https://delarue.perso.math.cnrs.fr/te.html`. Université de Rouen Normandie.

[3] M. Émery and W. Schachermayer. On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness. In *Séminaire de Probabilités XXXV*, pages 265–305. Berlin : Springer, 2001.

[4] A. N. Kolmogorov. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 119 :861–864, 1958.

[5] Paul Lanthier. *Aspects ergodiques et algébriques des automates cellulaires*. PhD thesis, Université de Rouen Normandie, 2020.

[6] Stéphane Laurent. On standardness and I-cosiness. In *Séminaire de Probabilités XLIII, Poitiers, France, Juin 2009*, pages 127–186. Berlin : Springer, 2011.

[7] D. Ornstein. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Adv. Math.*, 4 :337–352, 1970.

[8] Donald Ornstein. Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic. *Adv. Math.*, 5 :339–348, 1971.

[9] Donald S. Ornstein. A K-automorphism with no square root and Pinsker's conjecture. *Adv. Math.*, 10 :89–102, 1973.

[10] Donald S. Ornstein. An example of a Kolmogorov automorphism that is not a Bernoulli shift. *Adv. Math.*, 10 :49–62, 1973.

[11] J.-P. Thouvenot. On the stability of the weak Pinsker property. *Isr. J. Math.*, 27 :150–162, 1977.

[12] A. M. Vershik. The theory of decreasing sequences of measurable partitions. *St. Petersbg. Math. J.*, 6(4) :1–68, 1994.