

Approche stochastique de la mécanique des fluides pour les modèles numériques du climat

Manolis PERROT

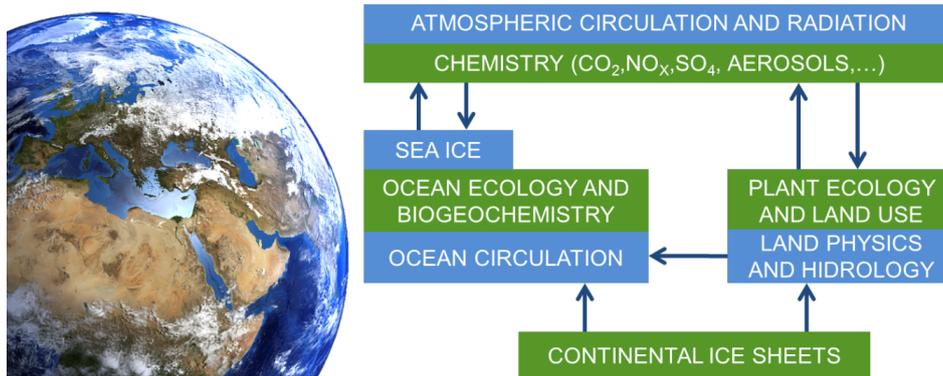
Mai 2021

Dans les modèles numériques du système Terre et de son climat, l'océan et l'atmosphère sont décrits par une discrétisation des équations de Navier-Stokes (ou plus précisément d'approximations de ces équations). Les effets des phénomènes physiques – dont la turbulence – qui surviennent à une échelle plus petite que celle du pas de discrétisation doivent impérativement être pris en compte afin de produire des simulations réalistes. Dans ce document on présente d'abord les modèles du système Terre et de son climat, en survolant les différents thèmes des mathématiques appliquées qui s'y rapportent. On introduit ensuite le problème de la fermeture des équations portant sur les variables résolues, et le concept de paramétrisation sous-maille. Enfin, on aborde un modèle stochastique de la mécanique des fluides qui traite les vitesses non résolues comme un bruit aléatoire, nommé modèle *sous-incertitude de position*.

1 Modéliser numériquement le système Terre et son climat

Le domaine de recherche en mathématiques appliquées dans lequel j'ai commencé à travailler s'insère de façon générale dans la modélisation du système Terre. Cette discipline tente de comprendre les états passés, présents et futurs de la Terre en étudiant les interactions physiques, chimiques, biologiques et humaines. Un des principaux outils d'analyse repose sur l'utilisation de simulations numériques par ordinateur. En pratique, le système Terre est découpé en composantes ou sphères – la biosphère, l'atmosphère, l'hydrosphère (incluant l'océan), la lithosphère, la cryosphère – et pour chacune de ces composantes un modèle numérique est développé, souvent basé sur la discrétisation d'équations aux dérivées partielles (EDP). Enfin, dépendant du degré de complexité souhaité, tout ou une partie de ces modèles sont couplés. Le développement de chaque composante requiert l'intégration de l'état de l'art dans la connaissance théorique de cette composante par des géoscientifiques, mais également le travail de mathématicien·ne·s, d'informaticien·ne·s et d'ingénieur·e·s de développement.

Ces modèles ont initialement été développés dans le but de comprendre la dynamique du climat, et les enjeux sociétaux qui y sont reliés restent un des moteurs principaux de leur développement. Ils constituent outil essentiel utilisé par le Groupe International



Composantes d'un modèle du système Terre en interaction (source : *climateurope.eu*)

d'Expert-e-s sur le Climat (GIEC) pour calculer les conséquences probables du changement climatique en réponse aux émissions anthropiques.

Ces modèles sont en constante évolution afin de réduire les biais présents en sortie, quantifier les incertitudes liées aux projections, accroître leur résolution en lien avec l'augmentation de la puissance de calcul, améliorer les projections au niveau local, etc. Dans la suite de ce mémoire, on va s'intéresser plus précisément aux composantes qui sont principalement décrites par la mécanique des fluides, c'est-à-dire l'atmosphère et l'océan. Les mathématiques y jouent un rôle à plusieurs niveaux.

- Tout d'abord, dans l'analyse mathématique des équations continues qui décrivent ces fluides, afin par exemple d'étudier leur caractère bien posé [CL14]; [CLT20]. Par ailleurs, les échelles d'intérêt pour la modélisation des fluides géophysiques permettent d'utiliser des approximations des équations de Navier-Stokes. Des études s'attachent alors à justifier rigoureusement ces approximations en montrant la cohérence des solutions lors du passage à la limite [LT19].
- Le calcul par ordinateur de solutions d'EDP requiert une discrétisation des équations. Des problèmes d'analyse numérique émergent alors naturellement dans la conception des schémas de discrétisation utilisés. Ils doivent assurer la stabilité des solutions du modèle et leur réalisme, par exemple en s'efforçant de respecter au mieux les lois de conservation du système physique. Ces questions interviennent par exemple également dans la formulation de d'algorithme de couplage utilisé entre l'océan et l'atmosphère [LBD15]. Par définition, aucun schéma n'est parfait. Par conséquent il en existe sont nombreux, chacun possédant des qualités propres et des défauts ; le choix d'un schéma particulier résulte de compromis et de l'application visée, de la résolution du modèle, de la géométrie du domaine discret de calcul (structuré, non structuré) etc.
- Les modèles du système Terre présentent diverses incertitudes dues par exemple aux approximations réalisées, aux méthodes de discrétisation, à la connaissance partielle ou biaisée de paramètres, aux fortes non-linéarités des processus

physiques, à la paramétrisation des phénomènes non résolus, à des lacunes dans la description théorique de processus... A la croisée entre systèmes dynamiques et statistiques, la Quantification d'Incertitudes s'attache à quantifier et réduire les incertitudes des modèles, en caractérisant par exemple la sensibilité d'un modèle à ses paramètres [Qia+16].

- A l'interface entre mathématique et informatique, des recherches sont entreprises afin d'optimiser et d'accélérer les temps de calcul qui se déroulent principalement sur des super-calculateurs. On peut évoquer par exemple l'utilisation de méthodes de calcul parallèle en espace [DF95], et des efforts encore au stade de recherche pour le calcul parallèle en espace.
- Enfin, la variabilité atmosphérique et océanique s'étend sur une large gamme d'échelle, depuis la micro échelle (millisecondes, millimètres) jusqu'à l'échelle globale (centaines d'années, dizaines de milliers de kilomètres). Toutes ces échelles sont en forte interaction et donc devraient être prises en compte afin de réaliser des simulations réalistes. Cependant, la résolution spatiale et temporelle finie des modèles (de l'ordre de 50 km sur l'horizontale et 1 h) implique de prendre en compte les échelles non résolues via des *paramétrisations sous-mailles*. D'un point de vue mathématique, cela couvre notamment des questions plus théoriques concernant les façons de séparer ou filtrer les échelles, et des questions plus appliquées de modélisation en lien avec la physique ou d'apprentissage de données pour calibrer ces paramétrisations. Le thème des paramétrisations sous-maille constitue le sujet actuel et futur de mes recherches, et la suite de ce mémoire a pour but d'en introduire quelques aspects.

2 Turbulence et échelles non résolues

2.1 Equations primitives

Pour fixer les idées, on s'intéressera par la suite au cas de l'océan. L'état de l'océan peut être décrit par différents champs spatio-temporels comme sa vitesse, sa pression, sa masse volumique, sa température et sa salinité. Les lois de conservations de la physique permettent ensuite de décrire la dynamique de ces champs au moyen d'un système d'équations aux dérivées partielles. Aux échelles d'intérêt pour les simulations du climat, les équations les plus fréquemment utilisées pour décrire la dynamique de l'océan sont les équations primitives. Elles consistent en une simplification des équations de Navier-Stokes en rotation, en utilisant le fait que les mouvements verticaux sont faibles par rapports au mouvement horizontaux (approximation hydrostatique), que les variations de densité sont faibles (approximation de Boussinesq) et que l'on peut négliger les effets dus à la composante horizontale (locale) de la rotation terrestre (nommée "approximation traditionnelle"). Concrètement, elles décrivent la dynamique de la vitesse du fluide $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, ainsi que de sa pression $p(x, y, z, t)$ et de sa flottabilité $b(x, y, z, t)$. Pour simplifier la présentation, on va adopter le point de vue des terre-

platistes (!) [] et négliger la sphéricité de la Terre. x représente donc la coordonnée longitudinale et u la vitesse longitudinale ; y représente donc la coordonnée latitudinale et v la vitesse associée ; z représente la coordonnée verticale et w la vitesse verticale.

$$\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_h + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_h = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \nu \Delta \mathbf{u}_h \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \partial_z p = b \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t b + \mathbf{u} \cdot \nabla b = K \Delta b \quad (4)$$

où $\mathbf{u}_h = (u, v)$ est la vitesse horizontale, et $\nabla_h = (\partial_x, \partial_y)$ est le gradient horizontal. Le terme de flotabilité $b = -g \frac{\delta \rho}{\rho_0}$ représente l'effet de la force de gravité $g \mathbf{e}_z$ sur une particule de fluide dont la densité est différente de $\delta \rho$ d'une densité de référence constante ρ_0 , et est en pratique reliée par une équation d'état à d'autres grandeurs thermodynamique (salinité, température, pression), non introduites ici pour plus de concision. Le terme $f(y) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_h$ représente la force de Coriolis. D'un point de vue analytique, ces équations sont une limite pour un rapport d'aspect petit des équations de Navier-Stokes [LT19], et leur caractère bien posé global a été montré dans [CLT20].

2.2 Quelques propriétés de la turbulence

La grande majorité des écoulements atmosphériques et océaniques sont turbulents. De par la nature complexe de la turbulence, il est difficile de donner une définition rigoureuse. Cependant, on peut citer les propriétés les plus généralement acceptées :

- imprévisibilité : bien que les écoulements soient décrits par des équations déterministes, les non-linéarités confèrent un comportement très chaotique et donc imprévisible dans le détail. C'est pourquoi des approches statistiques, ou bien en moyenne spatiale ou temporelles, ont été développées afin d'extraire seulement les comportements "de grande échelle" des écoulements.
- mélange et transport : les tourbillons de l'écoulement provoquent un mélange et un transport importants des propriétés du fluide
- dissipation : les tourbillons de grande échelle sont instables et se fractionnent en structures de plus petites échelles. Ce transfert d'énergie mécanique d'échelles en échelles est appelé *cascade directe* et survient jusqu'à la dissipation visqueuse.
- multi-échelles : de part les interactions non-linéaires, les fluctuations turbulentes surviennent sur une large gamme *continue* d'échelles de temps et d'espace.

2.3 Discrétisation et filtrage

Pour réaliser un calcul par ordinateur de solutions approchées des équations primitives, on procède à un maillage de l'océan afin d'obtenir un domaine discret dont le nombre

de points (x_1, \dots, x_N) est fini, puis on utilise un schéma de discrétisation des dérivées, schématiquement de la forme $\partial_x f(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}$. De même pour l'évolution temporelle, qui devient discrète $\partial_t f(t_n) \simeq \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\delta t}$. Si δx est la taille d'une maille, les variations des champs sur des échelles plus petites que δx ou des temps plus court que δt – dites "sous-maillages" – ne peuvent pas être représentés par la simulation. Cependant, de par la nature non-linéaires des équations, ces fluctuations sous-maillages influencent la variation grande échelle des champs et doivent être prises en compte. En effet une interprétation courante est que $f(x_i, t_n)$ représente une moyenne spatio-temporelle de $f(x, t)$ sur la maille. Il apparaît immédiatement la question de savoir comment calculer les termes non-linéaires $(\mathbf{u}u)(x_i, t_n)$, $(\mathbf{u}v)(x_i, t_n)$, $(\mathbf{u}b)(x_i, t_n)$. Pour aborder ce problème, on va considérer qu'il est nécessaire de filtrer les fluctuations sous-maillages directement sur les équations continues. Cela peut s'interpréter comme l'action implicite du schéma numérique, qui ne peut représenter les échelles sous-maille et les filtre naturellement. On peut également interpréter cela comme le besoin de simuler non pas toute la dynamique du champ f mais seulement l'évolution de sa moyenne vis-à-vis de fluctuations turbulentes sous-maillages.

Pour fixer les idées, on peut considérer le filtre spatial suivant

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{[0, T]} \int_V G_{\delta x, \delta t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} dt' \quad (5)$$

où $G_{\delta x}$ est une fonction de l'ordre de 1 pour $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta x$ et/ou $|t - t'| < \delta t$, nulle sinon et dont la moyenne est égale à 1, qui constitue un filtrage à l'échelle d'une maille. En pratique, différents filtres sont utilisés, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients propres : filtre spatial, filtre temporel, filtre dans l'espace de Fourier en espace. Les équations filtrées sont alors

$$\partial_t \bar{u} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla \cdot \tau_u - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x \bar{p} + \nu \Delta \bar{u}, \quad \tau_u := \overline{\mathbf{u}u} - \bar{\mathbf{u}} \bar{u} \quad (6)$$

$$\partial_t \bar{v} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \cdot \tau_v + f\bar{u} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_y \bar{p} + \nu \Delta \bar{v}, \quad \tau_v := \overline{\mathbf{u}v} - \bar{\mathbf{u}} \bar{v} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \partial_z \bar{p} = \bar{b} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (9)$$

$$\partial_t \bar{b} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{b} + \nabla \cdot \tau_b = 0, \quad \tau_b := \overline{\mathbf{u}b} - \bar{\mathbf{u}} \bar{b} \quad (10)$$

Les tenseurs τ_u, τ_v, τ_b représentent les effets des échelles sous-maillages (turbulence, ondes de petite échelle) sur les échelles résolues causés par les termes non-linéaires, qui contribuent à un transport supplémentaire. Les grandeurs filtrées (surmontées d'une barre) sont celles qui vont être calculées par le modèle. Cependant ces équations ne sont pas fermées pour les variables filtrées, et l'on doit pour espérer les résoudre spécifier la dépendance des tenseurs sous-maillages aux grandeurs résolues : ceci constitue le problème de la *fermeture turbulente*, qui est un des problèmes fondamentaux non résolus de la physique classique.

En pratique, quasiment tous les modèles de climat sont basés sur une notion légèrement différente : la *moyenne de Reynolds*. Omniprésente dans le domaine de la turbulence, elle requiert que le filtre utilisé vérifie $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$ et $\overline{f'g} = \overline{f}\overline{g}$. Par conséquent les fluctuations sous-maïlles, notées $f' = f - \overline{f}$ sont de moyenne nulle, $\overline{f'} = 0$; et les tenseurs sous-maïlles se réduisent à $\tau_f = \overline{u'f'}$. L'interprétation souvent avancée est que de part leur nature imprévisible, les écoulements turbulents sont décrits par des variables aléatoires, et qu'en pratique seule une description statistique de ces grandeurs est pertinente. La moyenne de Reynolds est donc une espérance (ou une moyenne d'ensemble) qui mène à la décomposition $f = \overline{f} + f'$, et les fluctuations turbulentes f' sont de moyenne nulle. Enfin, pour concilier les points de vue de la moyenne de Reynolds avec celle d'un filtrage spatio-temporel, on suppose que les flux turbulents $u'f'$ sont associés à des fluctuations sous-maïlles. Ce choix paraît discutable, mais ne semble pas vraiment débattu par la communauté, et suppose implicitement une hypothèse d'ergodicité à l'échelle de la maille ; c'est-à-dire que la moyenne statistique de Reynolds est égale à une moyenne spatio-temporelle à l'échelle de la maille [Gri04].

Le choix d'une relation de fermeture – également appelée paramétrisation – entre les tenseurs sous-maille et les grandeurs moyennes est nécessairement arbitraire, et dépend de la résolution du modèle et des phénomènes sous-maïlles que l'on souhaite représenter. Basé sur des observations, Boussinesq a proposé que l'effet "moyen" des tourbillons soit dissipatif, c'est-à-dire que l'énergie soit transférée des échelles résolues aux échelles turbulentes non-résolues. Cette description est également en accord avec la phénoménologie de la turbulence 3D décrite par Kolmogorov, qui indique qu'une cascade d'énergie a lieu des grandes échelles vers les petites échelles. Basé sur une analogie avec la diffusion moléculaire, le modèle de la viscosité turbulente est le plus répandu et suppose les relations :

$$\tau_u = -\nu_u(\mathbf{x}, t)\nabla\overline{u}, \quad \tau_v = -\nu_v(\mathbf{x}, t)\nabla\overline{v}, \quad \tau_b = -\nu_b(\mathbf{x}, t)\nabla\overline{b} \quad (11)$$

où ν_u, ν_v et ν_b sont appelées *viscosités et diffusivité turbulentes* respectivement. D'un point de vue pratique, cette dissipation est également nécessaire afin d'assurer la stabilité des schémas numériques, qui ont tendance à accumuler de l'énergie à la fréquence de coupure de la maille $\frac{1}{\delta x}$. Enfin, de nombreux modèles de complexité variables existent pour relier les viscosités turbulentes aux champs moyens, basés sur un mélange de théorie et d'observations empiriques. Les paramétrisations sous-maille constituent une des faiblesses des modèles numériques, car elles comportent nécessairement un lot de choix arbitraires tant dans leurs descriptions théoriques que dans la détermination des paramètres libres de chaque paramétrisation [Hou+17].

3 Modèles sous-incertitude de position

On propose dans cette section de présenter un formalisme alternatif au filtrage présenté précédemment, nommé modélisation sous-incertitude de position (*under location uncertainty* – LU) introduit par Etienne Mémin [Mém14]; [RMC17], et qui présente de

grandes similarités avec le formalisme *Stochastic Advection by Lie Transport* (SALT) introduit par Darryl Holm [Hol15]. Il repose sur la décomposition de la vitesse en une composante régulière représentant la grande échelle, et une composante de petite échelle oscillant rapidement et modélisée par un bruit aléatoire. Un des avantages de ce formalisme est qu'il introduit – sans hypothèse supplémentaire – un opérateur dissipatif directement lié à la statistique des échelles turbulentes sous-mailles ; un bruit multiplicatif représentant une rétrodiffusion d'énergie (*backscattering*) due aux petites échelles ; une modification de la vitesse d'advection reliée au phénomène de turbophorèse dans le cadre de la turbulence, ou à la dérive de Stokes dans le cadre d'un champs de vagues de petite échelle. De plus, ce formalisme constitue une paramétrisation qui peut être estimée directement à partir de données, potentiellement acquises en temps réel.

3.1 Vitesse lagrangienne d'une particule sous incertitude de position

L'idée de base est de considérer la position $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ de chaque particule de fluide initialement en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme un processus stochastique, dont le déplacement (lagrangien) est donnée par l'équation différentielle stochastique d'Itô:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}_t)dt + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{B}_t \quad (12)$$

où \mathbf{u} est un champ de vecteur, qui représente la vitesse lente et grande échelle du fluide, et le bruit $\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t$ représente une perturbation aléatoire oscillantes qui permet de représenter les petites échelles turbulentes, perçues comme décorréélées en temps par les grandes échelles. $\boldsymbol{\sigma}$ est un opérateur déterministe, appelé *opérateur de corrélation spatiale* ou *opérateur de diffusion* et est donné par son noyau matriciel $(\check{\sigma}_{ij})$:

$$\text{pour tout champ de vecteur } \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3, (\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})\mathbf{f})_i := \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} \check{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) f_j(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (13)$$

Il est important de noter que ce formalisme est a priori général et que l'interprétation du bruit dépend de la situation physique que l'on souhaite représenter : tourbillons de petite échelle, champ de vagues ...

Dans [CGH17] il est montré par des méthodes d'homogénéisation que cette décomposition peut-être obtenue à partir d'un flot déterministe dans la limite où le temps de corrélation de la vitesse de petite échelle tend vers zéro.

On va par la suite expliquer comment dériver des équations dynamique stochastiques pour les fluides à partir de cette hypothèse de décomposition.

3.2 Transport scalaire

On va d'abord exposer la dynamique d'un champ scalaire q qui est simplement transporté par le fluide. On peut s'imaginer par exemple qu'il représente la concentration de paillettes que l'on a déposées dans le fluide.

Dans le cadre classique de la mécanique des fluides déterministes, la position \mathbf{X}_t d'une particule de fluide initialement en x vérifie l'EDO $\frac{d}{dt}\mathbf{X}_t = \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)$. Le transport lagrangien du scalaire s'écrit par définition $q(\mathbf{X}_t, t) = q(x, t = 0) \quad \forall t$, c'est-à-dire que dans notre exemple la quantité de paillettes dans une particule de fluide qui évolue selon \mathbf{X}_t reste constante : les paillettes sont seulement *transportées* par l'écoulement. La loi de composition des dérivées mène directement à la fameuse équation de transport

$$\partial_t q + \mathbf{u} \cdot \nabla q = 0 \quad (14)$$

Considérons maintenant le cadre d'une dynamique sous incertitude de position, $d\mathbf{X}_t = \mathbf{u}dt + \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t$, et supposons que q est une semi-martingale continue, c'est-à-dire que le traceur est intrinsiquement aléatoire et vérifie $d_t q = fdt + \mathbf{g}d\mathbf{B}_t$. Puisque \mathbf{X}_t n'est pas dérivable en temps, et pour obtenir l'équation de transport stochastique associée, on doit utiliser non pas la règle de la chaîne mais la formule d'Itô-Wentzell, qui donne l'équation de transport stochastique:

$$d_t q + (\mathbf{u}^* dt + \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t) \cdot \nabla q - \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \nabla q \right) dt = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (16)$$

où $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) := (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top)(\mathbf{x}, t)$ est le tenseur de variance du bruit, et cette interprétation est donnée par l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t \right) \cdot \left(\int_0^t \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t \right) \right] = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^\top dt \quad (17)$$

Par la suite on notera \mathbb{D}_t l'opérateur de transport stochastique défini par

$$\mathbb{D}_t q := d_t q + (\mathbf{u}^* dt + \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t) \cdot \nabla q - \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \nabla q \right) dt \quad (18)$$

3.2.1 Interprétation des termes

- Le terme $\mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a}$ indique qu'une inhomogénéité spatiale du bruit modifie l'advection des traceurs. On retrouve ce type de terme dans le cadre des interactions vagues/courant (vitesse de Stokes due à une direction de vague privilégiée [Bau+20]), dans les paramétrisations des effets des tourbillons de méso-échelle (*eddy-induced velocity* dans la paramétrisation de Gent-McWilliams [Gen11]), ou encore en turbulence 3D comme le fait que les particules inertielles ont tendance à se déplacer vers des zones de plus faible turbulence (*turbophoresis* [Bro+92]).
- le terme $(\boldsymbol{\sigma}d\mathbf{B}_t) \cdot \nabla q$ représente l'advection par le bruit, qui constitue un backscattering d'énergie des petites échelles vers les grandes échelles. Cet apport d'énergie est directement lié au bruit, et on va voir dans la section suivante qu'il contrebalance exactement ce qui est perdu en terme d'information.

- le terme $\nabla \cdot (\frac{1}{2} \mathbf{a} \nabla q)$ correspond à de la diffusion sous-maille ou turbulente, due au fait que la présence de bruit fait perdre de l'information. Ce qui est notable est que cette forme de diffusion laplacienne est dérivée rigoureusement et est directement reliée à la statistique du bruit, dès lors que l'on a fait l'hypothèse d'incertitude de position (12). On retrouve ce type de terme dans les paramétrisations classique de mélange (hypothèse de Boussinesq), mais celle-ci repose sur une hypothèse *a priori* de la forme du flux turbulent $\overline{\mathbf{u}'q'} = -\kappa \nabla \bar{q}$. En fait, la présence de diffusion laplacienne est directement reliée au choix d'un mouvement brownien comme bruit.

3.2.2 Conservation de l'énergie statistique

Pour un scalaire transporté par le flot, $\mathbb{D}_t q = 0$, le cadre LU assure la conservation de "l'énergie statistique" du scalaire

$$d \int_V q^2 d\mathbf{x} = - \int_V (\mathbf{u}^* dt + \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{B}_t) \cdot \nabla q^2 / 2 d\mathbf{x} + \underbrace{dt \int_V q \nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla q) d\mathbf{x}}_{\text{énergie perdue par diffusion}} + \underbrace{dt \int_V \nabla q^\top \mathbf{a} \nabla q d\mathbf{x}}_{\text{gain d'énergie du au bruit}} = 0 \quad (19)$$

où l'énergie apportée par le bruit est exactement contrebalancée par l'énergie dissipée.

3.3 Equations de Navier-Stokes

La dérivation des équations de Navier-Stokes sous-incertitude de position suit globalement la même procédure que dans le cas déterministe classique, c'est-à-dire qu'en vertu de la seconde loi de Newton l'accélération matérielle du fluide est égale aux forces qui s'applique sur celui-ci. Pour un fluide incompressible, on obtient les équations de Navier-Stokes sous-incertitude de position :

$$\mathbb{D}_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p dt + dp_t) + \nu \nabla^2 (\mathbf{u} dt + \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{B}_t) \quad (20a)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{B}_t) = 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a}) = 0 \quad (20b)$$

dp_t est la contribution bruitée de la pression. Le caractère bien posé de ces équations reste à être démontré et des études sont en cours à ce sujet. Des approximations supplémentaires permettent de déduire de ces équations différents modèles de fluides géophysiques (équations primitives, quasi-géostrophiques, etc).

De même que dans le cas des traceurs, on peut montrer la conservation de l'énergie cinétique pour les équations de Navier-Stokes sous incertitude de position :

$$d_t \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0 \quad (21)$$

3.4 Paramétrisation du bruit

La paramétrisation centrale du formalisme LU se trouve dans la spécification de la statistique du bruit σdB_t . Tout d'abord, cela peut-être réalisé en utilisant des données haute-résolution (*ie* supérieure à la résolution du modèle) produites par un modèle numérique test, ou bien par des observations de fine échelle. Plusieurs méthodes basées sur des décompositions spectrales proposent d'estimer les modes propres du bruit à partir de la décomposition orthogonale propre (POD) des données.

D'autres approches basées sur une hypothèse d'auto-similarité (fréquemment employée dans les théories classiques de turbulence) – ne nécessitant pas l'utilisation de données – peuvent être aussi utilisées. Elles consistent alors à utiliser les propriétés statistiques de la vitesse résolue pour calibrer le bruit [RPF20].

3.5 Applications

Le formalisme LU introduit de l'aléatoire dans les équations des fluides, en supposant une séparation d'échelles dans la vitesse et en modélisant a priori les petites échelles par un bruit. Il permet notamment de relier de façon directe des observations de fine échelle aux paramétrisations.

C'est un outil intéressant afin de réaliser des *simulations d'ensemble*, qui consistent à réaliser plusieurs simulations d'un modèle non-linéaire dont on perturbe légèrement les paramètres afin d'obtenir une estimation du ou des états futurs probables du système. Par exemple, l'indice de confiance associé à chaque prévision donnée par Météo France est obtenu ainsi. En lien étroit avec les simulations d'ensemble, le développement de LU est motivé par des applications aux méthodes d'ensemble pour l'assimilation de données, dont le but est de produire une prévision combinant de façon optimale des observations partielles et des simulations.

Le formalisme LU est également un outil de modélisation physique qui peut être couplé avec des données, comme c'est le cas pour représenter la turbulence proche d'un mur [Pin+19], ou bien les effets d'un champ de vagues sur un écoulement moyen [Bau+20].

References

- [Bro+92] John W. Brooke et al. "Turbulent deposition and trapping of aerosols at a wall". In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 4.4 (Apr. 1992). Publisher: American Institute of Physics, pp. 825–834.
- [DF95] John Drake and Ian Foster. "Introduction to the special issue on parallel computing in climate and weather modeling". en. In: *Parallel Computing. Climate and weather modeling* 21.10 (Oct. 1995), pp. 1539–1544.
- [Gri04] Stephen M. Griffies. *Fundamentals of ocean climate models*. OCLC: ocm54487392. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2004.

- [Gen11] Peter R. Gent. “The Gent–McWilliams parameterization: 20/20 hindsight”. en. In: *Ocean Modelling*. Modelling and Understanding the Ocean Mesoscale and Submesoscale 39.1 (Jan. 2011), pp. 2–9.
- [CL14] Tomás Chacón Rebollo and Roger Lewandowski. *Mathematical and Numerical Foundations of Turbulence Models and Applications*. en. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. New York, NY: Springer New York, 2014.
- [Mém14] Etienne Mémin. “Fluid flow dynamics under location uncertainty”. en. In: *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 108.2 (Mar. 2014), pp. 119–146.
- [Hol15] Darryl D. Holm. “Variational principles for stochastic fluid dynamics”. en. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 471.2176 (Apr. 2015), p. 20140963.
- [LBD15] Florian Lemarié, Eric Blayo, and Laurent Debreu. “Analysis of Ocean-atmosphere Coupling Algorithms: Consistency and Stability”. en. In: *Procedia Computer Science*. International Conference On Computational Science, ICCS 2015 51 (Jan. 2015), pp. 2066–2075.
- [Qia+16] Yun Qian et al. “Uncertainty Quantification in Climate Modeling and Projection”. EN. In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 97.5 (May 2016). Publisher: American Meteorological Society Section: Bulletin of the American Meteorological Society, pp. 821–824.
- [CGH17] C. J. Cotter, G. A. Gottwald, and D. D. Holm. “Stochastic partial differential fluid equations as a diffusive limit of deterministic Lagrangian multi-time dynamics”. en. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 473.2205 (Sept. 2017), p. 20170388.
- [Hou+17] Frédéric Hourdin et al. “The Art and Science of Climate Model Tuning”. EN. In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 98.3 (Mar. 2017). Publisher: American Meteorological Society Section: Bulletin of the American Meteorological Society, pp. 589–602.
- [RMC17] Valentin Resseguier, Etienne Mémin, and Bertrand Chapron. “Geophysical flows under location uncertainty, Part II Quasi-geostrophy and efficient ensemble spreading”. In: *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 111.3 (2017). Publisher: Taylor & Francis, pp. 177–208.
- [LT19] Jinkai Li and Edriss S. Titi. “The primitive equations as the small aspect ratio limit of the Navier–Stokes equations: Rigorous justification of the hydrostatic approximation”. en. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 124 (Apr. 2019), pp. 30–58.
- [Pin+19] Benoît Pinier et al. “Stochastic flow approach to model the mean velocity profile of wall-bounded flows”. en. In: *Physical Review E* 99.6 (June 2019), p. 063101.

- [Bau+20] Werner Bauer et al. “Deciphering the Role of Small-Scale Inhomogeneity on Geophysical Flow Structuration: A Stochastic Approach”. en. In: *Journal of Physical Oceanography* 50.4 (Apr. 2020), pp. 983–1003.
- [CLT20] Chongsheng Cao, Jinkai Li, and Edriss S. Titi. “Global well-posedness of the 3D primitive equations with horizontal viscosity and vertical diffusivity”. en. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 412 (Nov. 2020), p. 132606.
- [RPF20] Valentin Resseguier, Wei Pan, and Baylor Fox-Kemper. “Data-driven versus self-similar parameterizations for stochastic advection by Lie transport and location uncertainty”. en. In: *Nonlinear Processes in Geophysics* 27.2 (Apr. 2020), pp. 209–234.
- [] *The Flat Earth Society*. en.