Fondements microstructurels de la volatilité

Gregoire Szymanski

21 mai 2021

Résumé

A l'instar de la physique théorique, deux mondes s'affrontent dans les mathématiques financières : celui de la microstructure du marché et celui des modèles de hedging en temps long. Ces deux mondes utilisent des outils très différents qui visent à répondre aux besoins précis de chacun. Cependant, d'un point de vue théorique, il est nécessaire d'essayer de réconcilier ces deux mondes afin de pouvoir avoir la garantie que ces modèles sont cohérents. L'approche présentée ici consiste à chercher des limites d'échelles au modèles de microstructure pour retrouver les modèles de hedging classiques.

Table des matières

1 Histoire de la modélisation financière

L'histoire des marchés financiers est très ancienne et on retrouve des traces de marchés organisés dès le XVIe siècle. Cependant, il faut attendre la fin du XIXe siècle pour qu'on s'y intéresse enfin d'un point de vue mathématique par exemple à travers l'ouvrage fondateur [2]. Au cours du XXe siècle, de nouveaux marchés apparaissent et un besoin de modèles mathématiques se fait ressentir. Le plus important nouveau marché est celui des dérivés. Pour faire simple, un produit dérivé est une sorte d'assurance dont la prime est payée aujourd'hui et où on recevra à terme un flux d'argent appelé payoff. Les options les plus courantes sont les options d'achats. L'acheteur d'une telle option reçoit le droit, mais pas l'obligation, d'acheter un sous-jacent (typiquement une option, une certaine quantité de matière première ou une obligation) à la maturité de l'option à un prix K fixé aujourd'hui. Si S_t désigne le prix du sous-jacent à l'instant t, le payoff reçu en T est donc $(S_T - K)_+$. Plus généralement, le payoff d'une option (européenne) peut s'écrire sous la forme $f(S_T)$ pour une certaine fonction f. On pourrait aussi considérer des payoffs qui dépendent du passé de l'actif, on parle alors d'options paths dépendant.

Une question naturelle se pose alors : comment donner un prix à ces options ? En fait, la bonne question d'un point de vue financier serait plutot l'approche duale qui est au cœur de la recherche quantitative dans les banques : Comment trouver une stratégie de couverture pour ces options ? Ces deux questions sont intrinsèquement liées et nous nous concentrerons ici sur la première.

Au cours des années 70, Black, Scholes et Merton ont montré (par exemple dans [5]) que sous certaines hypothèses financières, le prix en t d'une option d'achat de maturité T et de strike K pouvait s'écrire sous la forme suivant :

$$C_t(T, K) = S_t \mathcal{N}(d_+) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \tag{1}$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, où r est le taux d'intérêt sur les marchés financiers, où $d_\pm = \frac{1}{\sigma(T-t)} \left(\ln\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K} \right) \pm \frac{\sigma^2 (T-t)}{2} \right)$ et où σ est la volatilité de l'actif considéré. Cette expression peut être obtenue de plusieurs façon. L'une d'entre elle[1] consiste à supposer que le cours de l'actif S suit une diffusion stochastique de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t$$

où W est un mouvement Brownien. Le prix de l'option d'achat en t est alors donné par $C_t(T, K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^t \left[(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t \right]$.

Avant de continuer, on peut remarquer que le taux d'intérêt ne joue aucun rôle particulier ici et pour simplifier les expressions, nous considérerons désormais que le taux d'intérêt est 0. En fait, la principale inconnue dans l'équation 1 est la variable cachée σ. Black, Scholes et Merton pensaient que la volatilité d'une action etait fixe et qu'elle ne varierait pas beaucoup avec le temps. Mais au cours de la succèssion de crises financières au cours des années 70 et 80, de nombreuses évidences ont montrées que celle ci n'etait absolument pas stable et variait avec le temps, ce qui a conduit à introduire des modèles où la volatilité dépend du temps :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t.$$

Une myriade de modèles s'est alors dévolopée. Par exemple Dupire propose de prendre $\sigma_t =$

1. Il ne s'agit pas de la manière la plus naturelle car cela ne donne pas d'informations intrinsèque sur les raisons menant à la formation de ces prix. Cependant, il s'agit mathématiquement de la façon la plus facilement généralisable.

$\sigma(t, S_t)$ et propose dans [10] une façon de trouver cette fonction σ. Ce modèle permet alors, pour une option donnée, de calculer le prix et de se couvrir vis-à-vis des changements de prix du sous-jacent. Cependant, certains effets pour d'autres options ne sont pas couverts et il faut pour cela introduire des modèles plus complexes dits à volatilité stochastiques, c'est à dire des modèles où la volatilité dépend d'un aléa stochastique supplémentaire. On retrouve par exemple, le modèle CIR (voir [7] pour une présentation dans le cadre des taux d'intérêts) qui postule que $d\sigma_t = k\left(\theta - \sigma_t\right) dt + \alpha\sqrt{\sigma_t} d\widehat{W}_t$ où $\widehat{W}$ est un mouvement Brownien de correlation ρ_t (souvent supposé constant) avec W. Un autre modèle souvent utilisé est celui dit de Heston (introduit dans [14]) de dynamique $\sigma_t = \sqrt{\nu_t}$ et $d\nu_t = \kappa\left(\theta - d\nu_t\right) dt + \xi\sqrt{d\nu_t} d\widehat{W}_t$.

En fait, Jim Gatheral, Thibault Jaisson et Mathieu Rosenbaum ont montrés dans [13] que la volatilité σ_t n'est pas $\left(\frac{1}{2} - \eta\right)$-Hölder comme nous nous y attendrions si la volatilité suivait une diffusion stochastique. Au lieu de ça, la volatilité est très rugueuse et n'est que H-Hölder pour $H \approx 0.1$.

Suite à cela, il a fallu repenser tous les modèles classiques de volatilité stochastiques et au cours des dernières années, toute une littérature s'est developpée sur le sujet. Un modèle populaire est le modèle dit de rough Heston introduit par exemple dans [12] et [1] où le mouvement Brownien est remplacé par un mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \approx 0.1$ afin d'obtenir la bonne dynamique. Rappelons qu'un mouvement Brownien fractionnaire est l'unique processus Gaussien W_t^H qui soit à la fois centré et de matrice de covariance

$$\operatorname{Cov}\left(W_t^H, W_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Ces processus ont des propriétés multifractales remarquables et ont été introduit en finance et étudiés par Benoît Mandelbrot dans [20] sans connaître grand succès au démarage.

Aujourd'hui, même si tout n'est pas encore connu à propos des modèles de rough Heston, beaucoup de problèmes ont déjà été résolu, comme la question du pricing des options Européennes.

Tout ces modèles sont loin d'être parfaits et ne permettent que de s'intéresser au comportement long terme des actifs. En effet, à l'échelle de la microstructure des marchés financiers, les prix ne sont plus continus et les modèles stochastiques ne peuvent plus s'appliquer. En fait, lorsqu'on regarde les cours des actifs, on se rend compte que ceux-ci sautent plus souvent dans la direction inverse du saut précédent que dans la même direction que celui-ci. Cette propriété que l'on pourrait assimiler à une propriété de retour à la moyenne détruit l'hypothèse comme quoi, au moins à l'échelle de la microstructure, les prix sont des martingales. Des méthodes permettent de définir un modèle de microstructure à partir d'un modèle long terme existant. Par exemple, Christian Robert et Mathieu Rosenbaum ont introduit dans [21] un modèle répondant à toutes ces contraintes pour retrouver les prix du point de vue de la microstructure.

Cependant, un tel modèle n'est pas totalement satisfaisant. En effet, la microstructure ne se résume pas uniquement aux prix : il faudrait aussi prendre en compte les carnets d'ordres et les différents prix (best bid, best ask, mid bid ask, etc). Mais plus important encore que cela, les prix sont formés par la microstructure et non pas pas la macrostructure. Il serait donc plus naturel d'essayer de comprendre réellement ce qu'il se passe à l'échelle de la microstructure et voir quels modèles macrostructurels en découlent.

2 Processus de Hawkes et modèles de pricing

2.1 Définition et existence des processus de Hawkes

Les processus de Hawkes forment une généralisation des processus de Poisson dont l'intensité ne serait plus supposée constante, ni même déterministe mais plutot dépendante du passé du processus observé par un phénomène d'autoexcitation. Concretement, $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Hawkes d'intensité $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ si d'une part

$$\mathbb{P}\left(Z_t \text{ saute dans l'intervalle } [t_0, t_0 + \Delta t] | \mathcal{F}_{t_0}\right) \approx \lambda_{t_0} \Delta t \tag{2}$$

où $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(Z_s)_{0\leq s\leq t}$ et si d'autre part l'intensité λ vérifie.

$$\lambda_t = h\left(\int_0^{t-} \varphi(t-s) dZ_s\right)$$

où h est une fonction positive et φ est un noyau d'autoexcitation.

De tels processus existent. Pour s'en convaincre, on peut représenter Z comme la solution d'une équation différentielle stochastique Poissonnienne. Soit π une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On dira que Z est un processus de Hawkes s'il verifie

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{z\leq h\left(\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u\right)} \pi\left(dsdz\right). \tag{3}$$

On pourra se convaincre que l'équation 3 implique 2 puisque le compensateur de Z vérifiant l'équation 3 est

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{z\leq h\left(\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u\right)} dzds = \int_0^t h\left(\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u\right) ds = \int_0^t \lambda_s ds$$

On peut alors verifier que :

Lemme 1. *Supposons que h soit L-Lipschitzienne. Alors, il existe un et un seul processus Z vérifiant l'équation 3 pour une mesure de Poisson π donnée.*

Proof. Montrons d'abord l'unicité. Supposons que Z et $\widetilde{Z}$ vérifient tout deux l'équation 3. Alors on peut définir $\Delta_t = \int_0^t \left|d\left(Z_s - \widetilde{Z}_s\right)\right|$ et on peut montrer que $\delta_t := \mathbb{E}\left[\Delta_t\right] \leq L\int_0^t \varphi\left(t-s\right)\delta_s ds$. Par conséquent, on peut utiliser une inégalité du type Gronwall pour les convolutions. (voir par exemple le lemme 23 de [9]).

Pour l'existence, on procede par un argument de point fixe : On définit $Z_t^{(0)} = 0$ puis $Z_t^{(k+1)} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{z\leq h\left(\int_0^{s-} \varphi(s-u) dZ_u^{(k)}\right)} \pi\left(dsdz\right)$. On peut alors étudier $\Delta_t^{(k)} = \int_0^t \left|d\left(Z_s^{(k+1)} -_s^{(k)}\right)\right|$ et son espérance $\delta_t^{(k)} = \mathbb{E}\left[\Delta_t^{(k)}\right]$ par les mêmes mécanismes que précédemment. □

En fait, cette construction peut se généraliser au cas multidimensionnel. Dans ce cas, les différents processus de Hawkes sont en interaction les uns les autres. Nous pourrions considérer des graphes eventuellement infinis comme dans [9] mais nous n'utiliserons que le cas $\mathbb{R}^d$ par la suite donc nous allons nous restreindre à ce cas.

Définition 1. *Un processus de Hawkes N en d dimension est un processus de Poisson inhomogène* *dont l'intensité λ est donnée par*

$$\lambda_t = h\left(\int_0^{t-} \varphi(t-s)dZ_s\right)$$

où φ est une fonction à valeurs matricielles et h est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^d$.

Un cas particulier de fonction h est celui où $h(x) = \mu + x$. Dans ce cas, on parle de processus de Hawkes linéaire. On pourra en effet remarquer que si N_1 et N_2 sont deux processus de Hawkes linéaires partageant le même noyau d'autoexcitation φ, alors $N_1 + N_2$ est toujours un processus de Hawkes et son intensité est la somme des intensités de N_1 et de N_2. Par la suite, nous nous concentrerons exclusivement sur le cas des processus de Hawkes linéaires.

2.2 Propriétés des processus de Hawkes

L'un des grands avantages des processus de Hawkes linéaires en modélisation est de pouvoir faire tous les calculs de manière explicite. Considérons le cas d'un processus de Hawkes d dimensionnel N d'intensité $\lambda_t = \mu + \int_0^{t-} \varphi(t-s)dN_s$.

Notons également $M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ qui est une martingale car $\int_0^t \lambda_s ds$ est le compensateur de N. De plus, on a que $[M]_t = N_t$ car N est un processus de comptage. On va utiliser M pour réécrire λ sous une forme plus adéquate. Cependant, il nous faut d'abord introduire une nouvelle notation. On notera ψ la somme des convolées itérées de φ. Plus précisément, on note $\varphi^{(1)} = \varphi$ et $\varphi^{(k+1)} = \varphi^{(k)} * \varphi$, puis $\psi = \sum_{k\geq 1} \varphi^{(k)}$. On a alors :

Lemme 2. *Pour tout $0 \leq t \leq T$, on a :*

$$\begin{cases} \lambda_t & = \left(1 + \int_0^t \psi(s)ds\right)\mu + \int_{[0;t[} \psi(t-s)dM_s, \\ \int_0^t \lambda_s ds & = \mu t + \int_0^t \psi(t-s)\mu s ds + \int_0^t \psi(t-s)M_s ds. \end{cases}$$

En utilisant ce lemme et le fait que M soit une martingale, on peut calculer les espérances de λ et de N de manière explicite à partir de ψ :

Lemme 3. *Pour tout $0 \leq t \leq T$, on a :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\lambda_t\right] & = \left(1 + \int_0^t \psi(s)ds\right)\mu, \\ \mathbb{E}\left[N_t\right] & = \left(t + \int_0^t (t-u)\psi(u)du\right)\mu. \end{cases}$$

2.3 Un modèle de prix basés sur des processus de Hawkes

Nous allons maintenant introduire un modèle de prix basés sur des processus de Hawkes. Ce modèle a tout d'abord été introduit par Emmanuel Bacry et Jean-François Muzy en 2013 dans [4] puis étendu en fonctions des besoins de modélisation (voir par exemple [3]).

Plaçons-nous dans le cadre le plus simple. Le prix sur un marché financier provient de la différence entre des hausses de prix provoquées par des ordres d'achat et des baisses de prix provoquées par des ordres de vente. On peut compter ces ordres, ce qui nous donne deux processus de comptage N^+ et N^-. Il est assez naturel de munir ces processus de comptage d'une structure de processus de Hawkes, d'une part car il semble naturel de penser que les ordres vont créer d'autres ordres (les agents s'influencent les uns et les autres et les ordres d'achat influencent également les ordres de vente) et d'autre part car une fois les paramètres des processus de Hawkes bien choisis, il est possible de se retrouver un grand nombre d'effets observés sur les marchés.

Dans un tel modèle, le prix est alors donné par

$$P_t = N_t^+ - N_t^-$$

tandis que la volatilité cumulée est donnée par

$$V_t = N_t^+ + N_t^-.$$

Il est alors naturel de se demander si de tels modèles de prix microscopiques peuvent engendrer les modèles macroscopiques décrits en section 1. Ces questions sont étudiées depuis plusieurs années, notamment par Thibaut Jaisson et Mathieu Rosenbaum dans [17] et [18] et nous allons présenter ces travaux en section 3

3 Comportement asymptotique des processus de Hawkes

3.1 Le modèle

Même si Thibaut Jaisson et Mathieu Rosenbaum dans [17] et [18] ne se concentrent que sur une renormalisation temporelle des processus de Hawkes, d'autres approches plus générales sont possibles et permettent de se généraliser à d'autres applications, comme par exemple les neurosciences (voir [11]).

Introduisons donc tout d'abord un cadre général permettant d'étudier les comportements limites d'une suite de processus de Hawkes.

Pour chaque $n \geq 1$, considérons $N^{(n)}$ un processus de Hawkes d-dimensionel d'intensité $\lambda^{(n)}$ donnée par :

$$\lambda_t^{(n)} = \mu^{(n)} + \int_0^{t-} \varphi^{(n)}(t-s) dN_s^{(n)}.$$

On considère également une suite $a_n \to 0$ et on va chercher des conditions pour que la suite de processus $a_n N^{(n)}$ converge.

3.2 Résultats de convergence

Pour chaque $n \geq 0$, on note $M^{(n)}$ la martingale définie par $M_t^{(n)} = N_t^{(n)} - \int_0^t \lambda_s^{(n)} ds$. Comme $\left[M^{(n)}\right]_t = N_t^{(n)}$, on peut montrer (par exemple en utilisant le théorème VI-4.13 de [16]) que $\sqrt{a_n} M^{(n)}$ sera C-tendue des que $a_n N^{(n)}$ l'est [2]. Il est alors facile de montrer que $a_n M^{(n)}$ converge vers 0 et dans ce cas la limite de $a_n N^{(n)}$ n'est d'autre que celle de $a_n \int_0^t \lambda_s^{(n)} ds$. On peut ensuite utiliser le lemme 2 pour identifier la limite.

Avant de présenter les résultats principaux de cette section, introduisons une denière notation. On écrira $\mathcal{F}\varphi$ la transformée de Fourier probabiliste de φ, c'est à dire la fonction $\mathcal{F}\varphi(\xi)$ définie par

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\xi x} dx.$$

Lorsque φ est à valeurs matricielles, cette transformation peut alors toujours être définie composante par composante. $\mathcal{F}\varphi(\xi)$ est alors également à valeurs matricielles.

2. Une suite de processus càdlàg est dit C-tendue s'ils sont tendus dans l'espace de Skorohod et si ils ne chargent que des limites continues

On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Supposons que le rayon spectral de la matrice* $\left\|\varphi^{(n)}\right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ *soit plus petit que* 1 *(strictement) et que* $\mathcal{F}\varphi^{(n)}$ *puisse s'écrire de la façon suivante :*

$$\mathcal{F}\varphi^{(n)}(\xi) = A - B(\xi)\sqrt{a_n} + o\left(\sqrt{a_n}\right)$$

où A *et* $B(\xi)$ *sont des matrices telles que* $I - A$ *ne soit pas inversible et telles que soit* $A = I$, *soit* $\operatorname{tr}(\operatorname{adj}(I-A)\,B(\xi))$ *est non nul. Supposons également que* $\xi \mapsto B(\xi)$ *soit continue. Enfin, supposons que la suite* $\sqrt{a_n}\mu^{(n)}$ *converge vers une constante* μ *dans* $\mathbb{R}_+^d$.

Alors la suite de processus $\left(a_n N^{(n)}, \sqrt{a_n} M^{(n)}\right)$ *est* C *tendue et si* (X, Z) *est la limite d'une sous-suite de* $\left(a_n N^{(n)}, \sqrt{a_n} M^{(n)}\right)$ *, alors* Z *est une martingale continue dont le crochet est donné par :*

$$\left[Z^i, Z^j\right]_t = \begin{cases} 0 & \textit{if } i \neq j, \\ X^i & \textit{if } i = j. \end{cases}$$

De plus, X *peut s'écrire sous la forme :*

$$X^i(t) = \int_0^t K^i(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t Z^j_{t-s}\nu^{i,j}(ds) \tag{4}$$

où ν *est la matrice de mesures dont la matrice des transformée de Fourier est donnée par :*

$$\mathcal{F}\nu(\xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{adj}(I-A)}{\operatorname{tr}(\operatorname{adj}(I-A)B(\xi))} & \textit{si } A \neq I, \\ \frac{1}{B(\xi)} & \textit{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

et où $K^i(t) = \sum_{j=1}^d \nu^{i,j}([0,t])\,\mu^j$.

La preuve peut se découper en plusieurs parties. Tout d'abord, remarquons que les hypothèses sur $\varphi^{(n)}$ permettent de s'assurer que la suite de mesures $\nu^{(n)}$ définies par leur densités $\sqrt{a_n}\psi^{(n)}$ convergent bien etroitement vers ν sur $\mathbb{R}_+$. En effet, comme $\left\|\varphi^{(n)}\right\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ a un rayon spectral plus petit que 1 strictement, il en va de même de $\mathcal{F}\varphi^{(n)}(\xi)$ pour chaque ξ. On peut ensuite utiliser la propriété remarquable que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g$ (qui reste vraie même quand f et g sont à valeurs matricielles) pour montrer que la transformée de Fourier de $\nu^{(n)}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\nu^{(n)} = \sqrt{a_n}\left(I - \mathcal{F}\varphi^{(n)}\right)^{-1}\mathcal{F}\varphi^{(n)}.$$

L'hypothèse concernant l'écriture de $\mathcal{F}\varphi^{(n)}$ permet alors d'identifier la limite ponctuelle de $\mathcal{F}\nu^{(n)}$ comme étant bien $\mathcal{F}\nu$ définie dans l'équation 5. La continuité du dénominateur et le théorème de continuité de Levy permet alors de conclure quand à la convergence étroite de $\nu^{(n)}$ vers ν sur $\mathbb{R}_+$.

Au vu de ces considérations, le théorème 1 est une conséquence immédiate du théorème 2 ci dessous. Cependant, ce dernier est strictement plus général car il permet d'intégrer des cas où la limite étroite $\nu^{(n)} \to \nu$ est valable sur $[0, T]$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 2. *Supposons que la suite de mesure* $\nu^{(n)}$ *définies par leur densités* $\sqrt{a_n}\psi^{(n)}$ *sur* $[0, T]$ *convergent étroitement vers une mesure* ν. *Supposons également que la suite* $\sqrt{a_n}\mu^{(n)}$ *converge vers une constante* μ *dans* $\mathbb{R}_+^d$.

Alors les conclusions du théorème 1 restent valables. Plus précisément, la suite de processus $\left(a_n N^{(n)}, \sqrt{a_n} M^{(n)}\right)$ *est C tendue et si* (X, Z) *est la limite d'une sous-suite de* $\left(a_n N^{(n)}, \sqrt{a_n} M^{(n)}\right)$ *, alors Z est une martingale continue dont le crochet est donné par :*

$$\left[Z^i, Z^j\right]_t = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ X^i & \text{if } i = j. \end{cases}$$

De plus, X peut s'écrire sous la forme :

$$X_t^i = \int_0^t K^i(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t Z_{t-s}^j \nu^{i,j}(ds)$$

avec toujours $K^i(t) = \sum_{j=1}^d \nu^{i,j}([0,t])\, \mu^j$.

La preuve n'est pas difficile et repose avant tout sur la preuve (calculatoire) que les suites de variables $a_n N_T^{(n)}$ et $a_n \int_0^T \lambda_s^{(n)} ds$ sont toutes deux bornées dans L^1. On peut alors utiliser le lemme technique 8 pour obtenir leur tension.

La tension de $\sqrt{a_n} M^{(n)}$ se déduit de celle de $a_n N^{(n)}$ et l'identification de la limite repose essentiellement sur les lemmes 2 et 9.

3.3 Etude de la limite et dérivabilité

Le théorème 1 est un grand pas vers la convergence mais n'est pas satisfaisant. D'une part, on ne dispose que de la tension car nous n'avons pas montré d'unicité de la limite et d'autre part l'équation 4 n'est pas très explicite. Nous allons nous concentrer ici sur un ensemble de cas particulier où cette limite s'exprime de manière beaucoup plus naturelle.

Tout d'abord, nous supposerons par la suite que les mesures $\nu^{i,j}$ sont toutes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et on notera $f^{i,j}$ leurs densités. Dans ce cas, l'équation 4 peut se réécrire

$$X_t^i = \int_0^t K^i(s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t f^{i,j}(t-s) Z_s^j ds. \tag{6}$$

De plus, les K^i sont désormais continus. Cette expression suggère que dans certains cas, X devrait pouvoir être dérivable (trajectoriellement), et lorsque c'est le cas, on notera Y sa dérivée. C'est par exemple le cas dès lors que toutes les fonctions $f^{i,j}$ sont elles-mêmes dérivables. Mais comme la convolution entre f et Z "additionne" les régularités trajectorielles de ces deux processus, on peut espérer que X soit dérivable sous des hypothèses un peu plus faibles.

Avant d'identifier ces cas, nous allons montrer en quoi la dérivabilité de X est cruciale pour nous. Tout d'abord, la dérivabilité de X permet de se passer des processus Z et de les remplacer par des mouvements Browniens. En effet, on a le lemme suivant :

Lemme 4. *Supposons que X soit dérivable de dérivée Y. Alors, quitte à enrichir notre espace de probabilité, il existe un mouvement Brownien d-dimensionnel* $\left(B^1, \ldots, B^d\right)$ *tel que pour tout* $1 \leq i \leq d$*, on ait*

$$Z_t^i = \int_0^t \sqrt{Y_s^i} dB_s^i.$$

Mais alors lorsque X est dérivable, on devrait pouvoir (de nouveau sous certaines conditions techniques) dériver ponctuellement l'équation 4 pour obtenir

$$Y_t^i = K^i(t) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f^{i,j}(t-s)\sqrt{Y_s^i} dB_s^i. \tag{7}$$

Remarquons que cette dernière équation peut se substituer à l'équation 4 afin d'obtenir davantage d'informations sur X. Par exemple, supposons que l'on puisse prouver l'unicité en loi des couples de processus (Y, B) vérifiant l'équation 7. On pourrait alors en déduire l'unicité du couple (X, Z) puisque l'on peut exprimer ces deux variables comme des transformations mesurables de (Y, B).

Un des résultats qui nous permettrait de faire ça est le théorème 5.3 de [15]. En appliquant celui-ci, on obtiendrait le lemme suivant :

Lemme 5. *Supposons que toutes les conditions du théorème 1 soient vérifiées et que les $\nu^{i,j}$ soient absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f^{i,j}$. Supposons de plus que f soit de carré intégrable.*

Alors la loi du couple (Y, B) est caractérisée de manière unique par l'équation 7 et donc il en va de même de la loi du couple (X, Z) du théorème 1. Par conséquent, la tension du théorème 1 peut être remplacée par une convergence en distribution.

Deux cas peuvent principalement être identifies.

Cas des densités Hölder

Le premier cas dans lequel on peut appliquer tout ce qui précède est le cas où les densités sont Hölder. En effet, comme on va le voir, la régularité Hölder de f se répercute directement sur X. Commençons tout d'abord par énoncer le résultat principal de cette partie :

Théorème 3. *Supposons que X et Z soient comme dans le théorème 2 et que les mesures $\nu^{i,j}$ admettent des densités $f^{i,j}$ qui sont β_f-Hölder pour un certain $\beta_f > \frac{1}{2}$.*

Alors X est dérivable, de dérivée Y satisfaisant :

$$Y(t) = K(t) + \int_0^t f(t-s) dZ_s.$$

De plus, sous les hypothèses du théorème 2, la suite de processus $\left(a_m N^m, \sqrt{a_m} M^m\right)$ converge en distribution vers (X, Z).

La dernière partie est uniquement une application du théorème 5. Nous allons donc nous concentrer sur le cœur de notre résultat. Commençons par montrer comment la régularité de f se répercute sur celle de X :

Lemme 6. *Supposons que X et Z soient comme dans le théorème 2 et que les mesures $\nu^{i,j}$ admettent des densités $f^{i,j}$ qui sont β_f-Hölder pour un certain $\beta_f > 0$. Alors X est également $((1 \wedge 2\beta_f) - \varepsilon)$-Hölder pour tout $\varepsilon > 0$.*

Proof. Supposons d'abord que X soit H-Hölder sur $[0, T]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, X est également $\left(\left(\beta_f + \frac{H}{2} - \varepsilon\right) \wedge 1\right)$-Hölder sur $[0, T]$. Pour le voir, on remarque que

$$X^i(t) = \int_0^t K^i(s) ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t f^{i,j}(t-s) Z_s^j ds$$

et que l'intégrale $t \mapsto \int_0^t K^i(s)ds$ est Lipschitzienne en t puisque K^i est continue. Il suffit donc de se focaliser sur le second terme. Plus précisément, on va montrer pour chaque j que $\int_0^t f^{i,j}(t-s)Z^j_{t-s}ds$ est bien Hölder.

Comme Z^j est une martingale continue de crochet X^j, on peut l'écrire sous la forme $Z^j_t = B^j_{X^j_t}$ où B^j est un mouvement Brownien. B^j est donc $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$-Hölder pour tout $\varepsilon > 0$. Comme X^j est H-Hölder On obtient bien que Z est $\left(\frac{H}{2} - \varepsilon_1\right)$-Hölder pour tout $\varepsilon_1 > 0$. Mais f est β_f-Hölder donc on peut "additionner les régularités" et la somme $\sum_{j=1}^d \int_0^t f^{i,j}(t-s)Z^j_{t-s}ds$ est $\left(\left(\beta_f + \frac{H}{2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \wedge 1\right)$-Hölder pour tout $\varepsilon_2 > 0$. Ainsi, X est bien $\left(\left(\beta_f + \frac{H}{2} - \varepsilon\right) \wedge 1\right)$-Hölder.

Maintenant, sait que f est β_f-Hölder et que Z est continue, donc X est au moins β_f-Hölder. Si on écrit M le supremum of des H tels que X soit H-Hölder, on sait que $M \geq \beta_f$. Mais par ce qui precede, M doit vérifier $M \geq \left(\beta_f + \frac{M}{2}\right) \wedge 1$ et donc on a bien $M \geq 1 \wedge 2\beta_f$. □

Par hypothèse f est au moins $\frac{1}{2}$-Hölder, ce qui nous assure que X est $(1-\varepsilon)$-Hölder pour tout $\varepsilon > 0$. La dérivabilité de X s'obtient alors en utilisant la théorie de l'integration et de la dérivation fractionnaire. Ces opérateurs sont définis dans l'annexe A.3.

Nous n'allons pas détailler tous les calculs nécessaire ici pour conclure. Expliquons cependant rapidement l'idée derrière ceux-ci. Comme X est $(1-\varepsilon)$-Hölder pour tout $\varepsilon > 0$, la preuve du lemme 6 nous assure que Z est également $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$-Hölder pour tout $\varepsilon > 0$. Le lemme 10 permet alors de s'assurer qu'il existe α et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta > 1$ et que f et Z admettent respectivement des dérivées fractionnaires d'ordre α et β. Ces régularités s'additionnent de sorte à montrer que X est bien dérivable de dérivée Y définie par :

$$Y^i_t = K^i(t) + \sum_{j=1}^d \int_0^t D^\alpha f^{i,j}(t-s) D^\beta Z_s dB^i_s.$$

On peut alors revenir à l'expression du théorème 3 par du calcul intégral.

Cas des densités quasi Hölder

Un autre cas d'intérêt est celui des densités f telles que $x \mapsto x^{1-\beta_f} f(x)$ est Hölder. Ce cas permet notamment de traiter des fonctions de type power law qui ne sont donc pas définies en 0. De nombreuses hypothèses techniques sont nécessaires ici. Plus précisément, nous utiliserons l'ensemble d'hypothèses suivant :

Hypothèse 1. *Supposons qu'il existe $\beta_f > \frac{1}{2}$ tel que pour tout i, j, $f^{i,j}$ satisfasse les propriétés suivantes :*

- *$x \mapsto x^{1-\beta_f} f(x)$ est β_f-Hölder sur $(0, T]$.*
- *$f^{i,j}$ est continu et différentiable sur $(0, T]$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$\left|f^{i,j}(x)\right| \leq \frac{C}{x^{1-\beta_f}} \text{ and } \left|\left(f^{i,j}\right)'(x)\right| \leq \frac{C}{x^{2-\beta_f}}$$

- *Pour $\beta < \beta_f$, $f^{i,j}$ admet une dérivée fractionnaire d'ordre β sur $(0, T]$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$\left|D^\beta f^{i,j}(x)\right| \leq \frac{C}{x^{1-\beta_f+\beta}} \text{ and } \left|\left(D^\beta f^{i,j}\right)'(x)\right| \leq \frac{C}{x^{2-\beta_f+\beta}}$$

— *Pour $\beta > 0$, $f^{i,j}$ admet une intégrale fractionnaire d'ordre β sur $(0,T]$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$\left|I^\beta f^{i,j}(x)\right| \leq \frac{C}{x^{1-\beta_f-\beta}} \text{ and } \left|\left(I^\beta f^{i,j}\right)'(x)\right| \leq \frac{C}{x^{2-\beta_f-\beta}}$$

A l'aide de ces hypothèses, on peut montrer que :

Théorème 4. *Supposons que X et Z soient comme dans le théorème 2 et que les mesures $\nu^{i,j}$ possèdent des densités $f^{i,j}$ satisfaisant toutes les hypothèses de régularité présentées dans l'hypothèse 1 pour un $\beta_f > \frac{1}{2}$.*

Alors X est dérivable de dérivée Y satisfaisant :

$$Y(t) = K(t) + \int_0^t f(t-s)dZ_s.$$

Nous n'allons pas détailler la preuve ici. Elle est similaire au cas Hölderien mais necessite d'utiliser encore davantage les notions de derivées et d'intégrales fractionnaires. On pourra notamment se référrer à [17] (section 4.4) pour plus de détails sur cette preuve.

3.4 Cas particulier des processus de prix

Reprenons le modèle de prix introduit à la section 2.3 mais indiçons le par un indice n. Plus précisément, on considère pour chaque n un processus de Hawkes bidimensionnel $N_t^{(n)} = \left(N_t^{+,(n)}, N_t^{+,(n)}\right)$ d'intensité $\lambda_t^{(n)} = \left(\lambda_t^{+,(n)}, \lambda_t^{+,(n)}\right)$. On note $\varphi_t^{(n)}$ son noyau d'autoexcitation, avec :

$$\varphi^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi^{++,(n)}(t) & \varphi^{+-,(n)}(t) \\ \varphi^{-+,(n)}(t) & \varphi^{--,(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on supposera que celui-ci a la forme suivante :

$$\varphi^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n)}(t) \\ \varphi_2^{(n)}(t) & \varphi_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Alors sous certaines hypothèses techniques directement héritées du théorème 2, on peut montrer que $\left(N_t^{(n)}, M_t^{(n)}\right)$ converge en loi vers des processus (X, Z). Des manipulations algébriques élémentaires permettent alors d'étudier la suite $\left(N_t^{+,(n)} - N_t^{+,(n)}, N_t^{+,(n)} + N_t^{+,(n)}\right)$ dont les composantes représentent respectivement le prix et la variance intégrée microstructurelle. Sous certaines hypothèses, on peut dérivée cette variance, de sorte à obtenir :

$$\begin{cases} \sqrt{a_n}\left(N_t^{+,(n)} - N_t^{+,(n)}\right) \to P_t \\ a_n\left(N_t^{+,(n)} + N_t^{+,(n)}\right) \to V_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \end{cases}$$

avec les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} P_t = \frac{1}{2(1-\alpha)} \int_0^t \sqrt{\sigma_s^2} dW_s^P \\ \sigma_t^2 = \text{drift} + 2\int_0^t f(t-s)\sqrt{\sigma_s^2} dW_s^\sigma \end{cases}$$

où $\left(W^P, X^\sigma\right)$ est un mouvement brownien bi-dimensionnel dont les composantes sont correlées : $d\left\langle W^P, X^\sigma\right\rangle = \frac{P_t}{\sigma_t^2}dt$. Lorsque f est à décroissance exponentielle, on retrouve les modèles de type Heston, tandis que quand f est de type power law, on retrouve les modèles de type rough Heston.

4 Développements supplémentaires et questions ouvertes

4.1 L'ensemble des limites

Revenons à la condition principale du théorème 1 et plaçons nous en dimension 1 pour simplifier. La convergence vers une limite ν des mesures $\nu^{(n)}$ est garantie dès lors que

$$\mathcal{F}\varphi^{(n)}(\xi) = 1 - b\left(\xi\right)\sqrt{a_n} + o\left(\sqrt{a_n}\right)$$

pour une certaine fonction b continue en 0 ne s'annulant pas. La mesure ν est alors caractérisée par sa transformée de Fourier égale à $\frac{1}{b}$.

La question est alors la suivante : Quelles mesure ν peut on atteindre via ce mécanisme ? Bien sur, celles ci sont nécessairement des mesures positives finies dont le support est inclus dans $\mathbb{R}_+$ Mais peut on atteindre toute mesure de ce type.

Cette question est encore ouverte, mais nous allons y apporter quelques éléments de réponse. Tout d'abord, notons B l'ensemble des b satisfaisant les hypothèses précédentes. A l'aide d'exemples bien choisis, il est possible de trouver un certain nombre d'exemples faisant parti de cet ensemble :

— $\xi \mapsto \lambda - \theta it$ for any $\lambda > 0, \theta \geq 0$,

— $\xi \mapsto \lambda - \beta\log\left(\frac{\theta}{\theta - i\xi}\right)$ for any $\lambda, \beta, \theta > 0$,

— $\xi \mapsto \lambda + \frac{\theta}{\mu}\left(\sqrt{1 - \frac{2\mu^2 i\xi}{\theta}} - 1\right)$ for any $\lambda, \theta, \mu > 0$.

— $\xi \mapsto \lambda + \frac{k}{2}\log\left(1 - 2i\xi\right) - \frac{i\theta t}{1 - 2i\xi}$ for any $\lambda, k, \theta > 0$,

— $\xi \mapsto \lambda + \sqrt{-2ic\xi}$ for any $\lambda, c > 0$.

On peut également montrer que l'ensemble B verifie un certain nombre de propriétés de stabilité :

— Stabilité par dilatation : $\forall b \in B, \forall\alpha \in \mathbb{R}, b(\alpha\cdot) \in B$,

— Stabilité par translation : $\forall b \in B, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda + b \in B$,

— Stabilité par addition : $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 + b_2 \in B$,

— Convexité : $\forall b_1, b_2 \in B, \forall 0 < c < 1, cb_1 + (1-c)b_2 \in B$.

Rappelons enfin que tout élément b dans B est par définition l'inverse d'une fonction caractéristique d'une transformée de Fourier. Cela contraint également cet ensemble (Voir par exemple le théorème de Bochner). Il est aussi possible de perturber un exemple existant en définissant une nouvelle suite de noyaux $\widetilde{\varphi}^{(n)} = \varphi^{(n)} + \sqrt{a_n}h_n$. On peut alors prendre la limite et on obtient de nouveaux exemples et on peut même identifier leur transformée de Fourier. Ainsi, on a :

Lemme 7. *Soit b dans B, ν de transormée de Fourier $\frac{1}{b}$, μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda < b(0)$.*

Alors $\widetilde{b}(\xi) := b(\xi) - \lambda\mathcal{F}\mu(\xi)$ est dans B. Il est associé à une mesure $\widetilde{\nu}$ dont la transformée de fourier est $\frac{1}{\widetilde{b}}$ et on a :

$$\widetilde{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\nu^{*(k+1)} * \mu^{*k}.$$

On a donc vu un certain nombre de moyens d'obtenir des exemples de limites possibles. A l'inverse, on peut montrer que toutes les limites ne peuvent pas être obtenues de cette manière. Rappelons que K est défini par $K(t) = \mu\nu([0,T])$ et que $\mu \geq 0$ est arbitraire (on peut prendre par exemple $\mu = 1$ pour se libérer de cette constant. On peut alors montrer que si c est défini par

$$c = \inf\{t > 0 : K(t) > 0\},$$

alors soit $c = 0$, soit $c = \infty$. Par conséquent, le "début du support" de ν est nécessairement 0 dès lors que ν est non nul.

Nous ne disposons pas à ce jour de contre-exemple de mesure dont le support débute en 0 et dont l'inverse de la transformée de Fourier n'est pas dans B et on peut donc naturellement se demander s'il en existe.

4.2 Un modèle parfait

Les processus de Hawkes permettent donc d'obtenir à la limite une grande variété de modèles. Par conséquent, cela nous permet de réconcilier les observation microstructurelles des marchés avec les modèles de pricing et de hedging utilisés par la plupart des banques. Cependant, certaines questions demeurent ouvertes.

Tout d'abord, les limites présentées ici sont toutes continues. Pourtant, il est bien connu que même à l'échelle macroscopique, les prix peuvent sauter. C'est par exemple le cas dans les marchés de l'énergie ce qui a conduit au développement de modèles à sauts plus sophistiqués dans ces marchés, voir par exemple [19]. La renormalisation présentée ici ne suffit pas à reproduire de tels effets.

Il est ensuite important de mentionner que les processus de Hawkes eux même ne représentent pas de manière parfaite la microstructure. Ils ne permettent pas de mettre en évidence les propriétés d'antisymetrie des prix comme l'effet Zumbach (voir [23]). Des modèles plus sophistiqués comme les modèles de Hawkes quadratiques introduits dans [6] permettent de résoudre partiellement ces questions. Dans ces modèles, les prix P_t et la variance intégrée V_t vérifient les hypothèses suivantes :

— V_t est un processus de comptage d'intensité λ_t vérifiant :

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t L(t-s)dP_s + + \int_0^t + \int_0^t K(t-u, t-v)dP_u dP_v,$$

— P est un processus à sauts purs qui saute exactement quand V saute et dont les sauts sont i.i.d de loi uniforme sur $\pm\psi$.

Des procédures de renormalisations existent également pour de tels modèles (voir par exemple [8]) même si de nombreuses questions restent ouvertes.

Enfin, on peut remarquer que les modèles de Hawkes présentés ici représentent les quantités de marchés (le prix, les ordres d'achat/ventes observés, etc.). Pourtant, le marché est par définition un ensemble d'agents et on peut donc se demander si ces modèles peuvent se généraliser en des modèles d'agents. Les ordres d'achat/de vente deviennent alors individuels et on s'intéresse à la formation des prix de manière agrégée. Ces agents peuvent interagir entre eux, ce qui se modélise par des noyaux d'excitation non nuls entre les intensités associés à nos différents agents. Dans certains cas, il est possible de se ramener au cadre défini dans la section 3. C'est par exemple le cas lorsque l'interaction est la même entre tous les agents. Cependant, le cas général ne peut pas être traité par notre étude et nous ne pouvons pas non plus étudier le comportement individuel des agents à la limite.

A Annexes

A.1 Tension de processus croissants

Lemme 8. *Soit* $(X_t^n)_{t\geq 0}$ *une suite de processus continus à droite avec limites à gauche. Alors* $(X^n)_n$ *est tendue si et seulement si pour tout* $T>0$ *et* $\varepsilon>0$*, il existe* $n_0\geq 1$ *et* $K\geq 0$ *els que pour tout* $n\geq n_0$*,* $\mathbb{P}^n\left(|X_T^n|>K\right)\leq\varepsilon$*.*

Proof. En reprenant les notations du theorem VI.3.21 de [16], on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(X^n)_n$ soit tendue est :

1. Pour tout $T>0$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\geq 1$ et $K\geq 0$ tels que pour tout $n\geq 0$, $\mathbb{P}^n\left(\sup_{t\leq T}|X_t^n|>K\right)\leq\varepsilon$.
2. Pour tout $T>0$, $\varepsilon>0$ et $\eta>0$, il existe $n_0\geq 1$ et $\theta>0$ tels que pour tout $n\geq 0$, $\mathbb{P}^n\left(w'_T\left(X^n,\theta\right)>\eta\right)\leq\varepsilon$.

Mais X^n un processus croissant donc la première condition se réécrit $\mathbb{P}^n\left(|X_T^n|>K\right)\leq\varepsilon$. Pour la seconde, on peut prendre $\theta=T$ pour obtenir la même que la première. □

A.2 Double convergence

Lemme 9. *Supposons que les* μ_n *soient des mesures positives définies sur* $[0,T]$ *qui converge faiblement vers une mesure finie* μ *et que* $f_n:[0,T]\to\mathbb{R}$ *soit une suite de foncitions mesurables (mais pas nécessairement continues) qui converge uniformement sur* $[0,T]$ *vers une fonction continue* f*. Alors la suite de fonctions* $F_n(t)=\int_0^t f_n(t-s)\mu_n(ds)$ *converge simplement sur* $[0,T]$ *vers* $F(t)=\int_0^t f(t-s)\mu(ds)$ *.*

Proof. Tout d'abord, on a :

$$F_n(t)=\int_0^t f_n(t-s)-f(t-s)\mu_n(ds)+\int_0^t f(t-s)\mu_n(ds).$$

Le second terme converge vers F par définition de la convergence faible puisque f est continue et bornée. Pour le premier terme, on a $\left|\int_0^t f_n(t-s)-f(t-s)\mu_n(ds)\right|\leq\|f_n-f\|_\infty\mu_n\left([0,T]\right)$. On peut alors conclure en utilisant que $\mu_n\left([0,T]\right)\to\mu\left([0,T]\right)<\infty$ puisque $\mathbb{1}$ est une fonction continue bornée, et que $\|f_n-f\|_\infty\to\infty$. □

A.3 Opérateurs de dérivées et d'intégrations fractionnaires

Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires D^α et I^α sont définis pour tout $0<\alpha<1$ et pour des fonctions mesurables f par

$$D^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(t)}{\left(x-t\right)^\alpha}dt=\frac{\left(f*p_\alpha\right)'(x)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$

et

$$I^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^x\frac{f(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt=\frac{f*p_{1-\alpha}(x)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$

où $p_\alpha(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, des que toutes ces quantités sont bien définies.

Ces opérateurs sont étudiés en détails dans [22]. Ils généralisent les opérateurs classiques de dérivation et d'intégration. Par exemple, on peut montrer que :

Lemme 10. *Soit f une fonction λ-Hölder s'annulant en 0. Alors pour tout $\alpha < \lambda$, f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α et $D^\alpha f$ est $\lambda - \alpha$-Hölder.*

On utilise ensuite le lemme 4 et du calcul intégral pour conclure.

Bibliographie

[1] Eduardo Abi Jaber. Lifting the Heston model. *Quantitative Finance*, 2019.

[2] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 17 :21–86, 1900.

[3] Emmanuel Bacry, Sylvain Delattre, Marc Hoffmann, and Jean-François Muzy. Some limit theorems for Hawkes processes and application to financial statistics. *Stochastic Processes and their Applications*, 123(7) :2475 – 2499, 2013. A Special Issue on the Occasion of the 2013 International Year of Statistics.

[4] Emmanuel Bacry and J.F. Muzy. Hawkes model for price and trades high-frequency dynamics. *Quantitative Finance*, 14, 01 2013.

[5] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.

[6] Pierre Blanc, Jonathan Donier, and Jean-Philippe Bouchaud. Quadratic hawkes processes for financial prices, 2015.

[7] John Cox, Jonathan Ingersoll, and Stephen Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 :385–407, 02 1985.

[8] Aditi Dandapani, Paul Jusselin, and Mathieu Rosenbaum. From quadratic hawkes processes to super-heston rough volatility models with zumbach effect, 2021.

[9] Sylvain Delattre, Nicolas Fournier, Marc Hoffmann, et al. Hawkes processes on large networks. *The Annals of Applied Probability*, 26(1) :216–261, 2016.

[10] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk Magazine*, pages 18–28, 1994.

[11] Xavier Erny, Eva Löcherbach, and Dasha Loukianova. Mean field limits for interacting hawkes processes in a diffusive regime. *arXiv preprint arXiv :1904.06985*, 2019.

[12] Omar El Euch, Jim Gatheral, and M. Rosenbaum. Roughening heston. *Risk Management and Analysis in Financial Institutions e*, 2019.

[13] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, and Mathieu Rosenbaum. Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6) :933–949, 2018.

[14] Steven Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6 :327–343, 1993.

[15] Eduardo Abi Jaber, Christa Cuchiero, Martin Larsson, and Sergio Pulido. A weak solution theory for stochastic Volterra equations of convolution type. working paper or preprint, October 2019.

[16] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

[17] Thibault Jaisson and Mathieu Rosenbaum. Rough fractional diffusions as scaling limits of nearly unstable heavy tailed Hawkes processes. *The Annals of Applied Probability*, 26(5) :2860 – 2882, 2016.

[18] Thibault Jaisson, Mathieu Rosenbaum, et al. Limit theorems for nearly unstable hawkes processes. *The annals of applied probability*, 25(2) :600–631, 2015.

[19] M. Kegnenlezom, P. Takam Soh, M. L. D. Mbele Bidima, and Y. Emvudu Wono. A jump-diffusion model for pricing electricity under price-cap regulation. *Mathematical Sciences*, 13(4) :395–405, Dec 2019.

[20] Benoît Mandelbrot and M. TAYLOR. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*, 15 :1057–1062, 1967.

[21] Christian Robert and Mathieu Rosenbaum. *The Model with Uncertainty Zones for Ultra High Frequency Prices and Durations : Applications to Statistical Estimation and Mathematical Finance*, volume 9, pages 203–224. 01 2011.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications.* Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[23] Gilles Zumbach. Time reversal invariance in finance, 2007.