
TOURBILLONS DANS L'ATMOSPHÈRE : CYCLONES TROPICAUX ET TOURBILLONS DE TRAÎNÉE.

par

Pierre SAULGEOT

Table des matières

Partie I. Instabilité d'un vortex cyclonique sans œil	1
1. Introduction.....	1
2. L'œil du cyclone : formation et origine.....	3
2.1. Équations du mouvement.....	3
2.2. Origine de la vortacité négative et formation de l'œil.....	4
3. Instabilité hydrodynamique d'un vortex cyclonique sans œil.....	6
3.1. La formation de l'œil vue comme un <i>vortex breakdown</i>	7
Partie II. Étude et modélisation du mélange des émissions des jets moteur par le sillage et des actions possibles sur les traînées de condensation	9
1. Introduction.....	10
2. Mélange par advection chaotique.....	11
3. Perspectives.....	13
Annexes	13
Appendice A. Théorème de Prandtl-Batchelor.....	13
Références.....	14

PARTIE I. INSTABILITÉ D'UN VORTEX CYCLONIQUE SANS ŒIL

1. Introduction

Les cyclones tropicaux sont des événements météorologiques particulièrement marquants et destructeurs. Leur étude est généralement limitée aux départements de météorologie avec une approche relevant principalement de la simulation numérique directe et de la thermodynamique. Les tourbillons naturels dans l'atmosphère sont bien sûr des objets complexes, dont la dynamique globale est fortement influencée, par exemple, par la rotation planétaire, la stratification, la libération de chaleur latente par convection humide (avec changement de phase) et la diffusion turbulente. Il est communément admis par exemple que la convection humide et la stratification influent grandement sur la forme de l'œil d'un cyclone tropical. On désigne par ce terme une zone sans nuage et sans vent située au centre d'un cyclone (voir fig. 1). Elle est caractérisée par une circulation inversée (le fluide descend à l'axe et remonte au bord de l'œil, le long d'une surface que l'on appelle mur de l'œil).



FIGURE 1. Cyclone tropical vu depuis l'espace (source NASA). La zone de calme, sans nuage, qui caractérise l'œil y est clairement visible. Son diamètre est généralement d'environ 50km.

La présence systématique d'un œil dans les écoulements tourbillonnaires à grande échelle suggère que le mécanisme sous-jacent par lequel ils se forment peut être indépendant (partiellement sinon totalement) de ces complexités. En effet, la présence d'un œil est observée dans d'autres tourbillons atmosphériques tels que les tornades ([12], et les références qui s'y trouvent) ou les dépressions polaires ([18]), qui sont particulièrement intéressantes car elles sont constituées de structures cycloniques convectives à grande échelle observées dans les régions polaires de haute latitude – donc dans des régions où les effets de la force de Coriolis et de la thermodynamique de l'atmosphère sont totalement différents. Mais malgré leur apparition fréquente, les mécanismes de formation de l'œil ne font pas l'unanimité ([17, 16, 21]) et il n'est même pas certain que suivant le tourbillon considéré (cyclone, tornade ou dépression polaire) les mécanismes en jeu soient les mêmes ([19]).

Cependant, Oruba, Davidson et Dormy ont identifié ([13]) un mécanisme de formation de l'œil dans un modèle simple. Inspirés par la géométrie des cyclones tropicaux, ils ont considéré le mouvement convectif d'un fluide dans un domaine cylindrique peu profond, en rotation et de faible rapport d'aspect. En particulier, ils ont étudié le système physique le plus simple pouvant mener à la formation d'un œil dans une telle géométrie, à savoir la convection axisymétrique, laminaire et régulière d'un fluide de Boussinesq. L'approximation dite de Boussinesq consiste à négliger tous les effets de la variation de la densité (supposée faible) à l'exception de la poussée d'Archimède. Cette dernière dépend de la variation locale de température, qui elle-même vérifie l'équation de la chaleur. Un système aussi simple est exempt des complexités qui entravent la compréhension des tourbillons atmosphériques réels, comme la turbulence, la stratification stable, les conditions limites mal définies, le dégagement de chaleur latente de la convection humide et l'évolution transitoire. Cela a permis d'identifier sans ambiguïté le mécanisme de formation de l'œil, du moins pour le système modèle considéré. Il s'avère que l'œil dans de tels cas est une réponse passive à la formation du mur de l'œil, mince anneau conique de fluide se déplaçant vers le haut qui se forme près de l'axe et sépare l'œil du reste du tourbillon (voir fig. 2 (a)).

Dans le détail, le modèle considéré est un domaine cylindrique rotatif. Les conditions aux bords sont pour la surface inférieure frottement sans glissement et pour la surface supérieure glissement sans frottement. Le mouvement est initié par un flux vertical de chaleur donné. Le bord inférieur appartenant à un référentiel tournant (à la vitesse de rotation de la terre), la force de Coriolis induit un tourbillon dans le fluide (qui a un mouvement de convection), qui à son tour établit une couche limite de type Ekman sur la surface inférieure (création de vorticité due à la différence de vitesse entre le bas de la couche –immobile– et le haut). L'écoulement primaire dans le plan vertical se fait alors radialement vers l'intérieur près du bord inférieur et vers l'extérieur près du bord supérieur. Lorsque le fluide s'enroule vers l'intérieur, il transporte avec lui son moment cinétique (sujet à une certaine diffusion visqueuse), ce qui provoque un tourbillon particulièrement intense au niveau de l'axe. Le schéma d'écoulement global est illustré schématiquement à la fig. 2 (b).

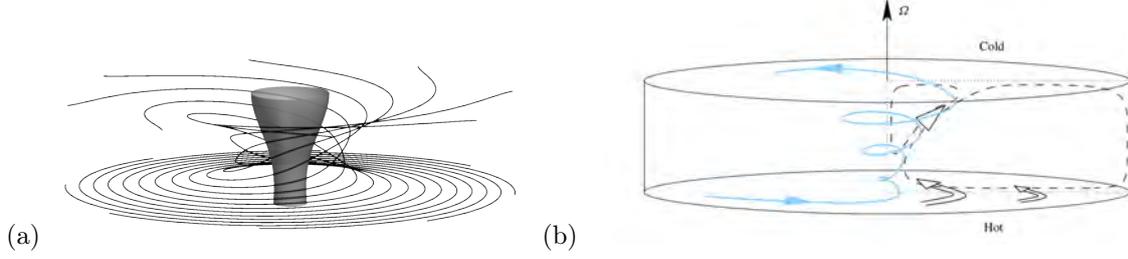


FIGURE 2. (a) Solution obtenue dans [14] : lignes de courant. La surface grisée marque le mur de l'œil (c'est-à-dire le bord de la région dans laquelle la circulation est inversée). (b) Schéma de l'écoulement global en convection tournante (source [13]). Le mouvement dans le plan vertical est constitué par le vortex primaire, le mur de l'œil et l'œil, tandis que le mouvement azimutal consiste en des régions de moment angulaire élevé près de l'axe et d'un moment angulaire faible (voire négatif) à des rayons plus grands (l'axe vertical est étiré par un coefficient de 5 pour plus de lisibilité).

En étudiant l'amplitude des différentes forces, Oruba et al. ont constaté que, dans la majeure partie de l'écoulement, la poussée d'Archimède et les forces de Coriolis et d'inertie sont d'une ampleur similaire, avec un nombre de Rossby⁽¹⁾ local d'ordre un. Cependant, près du mur de l'œil, le nombre de Rossby local est grand, les forces de poussée d'Archimède et de Coriolis n'ayant presque aucune importance par rapport à l'inertie. Ainsi, autour du mur de l'œil, il existe une couche limite conventionnelle convergente et tourbillonnaire, qui se décolle avant d'atteindre l'axe, transportant son intense vorticité azimutale vers le haut de l'écoulement. La couche de cisaillement libre qui en résulte constitue alors le mur de l'œil, qui à son tour donne naissance à l'œil.

Le mur de l'œil est donc caractérisé par une vorticité azimutale négative très intense. La vorticité azimutale est également négative dans la région de l'œil et Oruba et al. ont montré que celle-ci provenait d'une lente diffusion depuis le mur de l'œil. Puisque le corps principal du tourbillon a une vorticité azimutale positive, il est naturel de se demander d'où provient l'intense vorticité azimutale négative du mur de l'œil.

2. L'œil du cyclone : formation et origine

2.1.  quations du mouvement. — Nous considérons l'écoulement en régime permanent d'un fluide de Boussinesq dans un domaine cylindrique rotatif de hauteur H et de rayon R , avec $R \gg H$. Le rapport d'aspect est noté $\varepsilon = H/R$. L'écoulement est décrit en coordonnées polaires cylindriques, (r, φ, z) , où les surfaces inférieures, $z = 0$, et extérieures, $r = R$, sont des frontières sans glissement. La surface supérieure, $z = H$, est imperméable mais sans frottement. Le mouvement est induit par la poussée d'Archimède avec un flux thermique ascendant fixe maintenu entre les surfaces $z = 0$ et $z = H$. En équilibre statique, il existe un gradient de température uniforme, $dT_0/dz = -\beta$. On décompose $T = T_0(z) + \theta$, où θ est la perturbation de la température par rapport au profil linéaire. Afin de maintenir un flux thermique constant, les conditions aux bords pour la température sur les surfaces $z = 0$ et $z = H$ sont $\partial\theta/\partial z = 0$, tandis que le bord extérieur est thermiquement isolant, $\partial\theta/\partial r = 0$.

On adopte le référentiel tournant avec les bords, et on note $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ le taux de rotation associé. On note par ailleurs $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ l'accélération gravitationnelle, $\nu \in \mathbb{R}_+$ la viscosité cinématique du fluide, $\kappa \in \mathbb{R}_+$ sa diffusivité thermique et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ le taux d'expansion thermique. On note $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la vitesse. Les équations sont alors ([6])

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \theta \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

et

$$\frac{D\theta}{Dt} = \kappa \nabla^2 \theta + \beta u_z. \quad (2)$$

1. Nombre sans dimension représentant le rapport d'énergie cinétique sur le travail des forces. Ici $Ro = |u_\varphi|/\Omega H$ où u_φ est la composante azimutale de la vitesse, Ω la norme de la vitesse angulaire du référentiel et H la hauteur caractéristique.

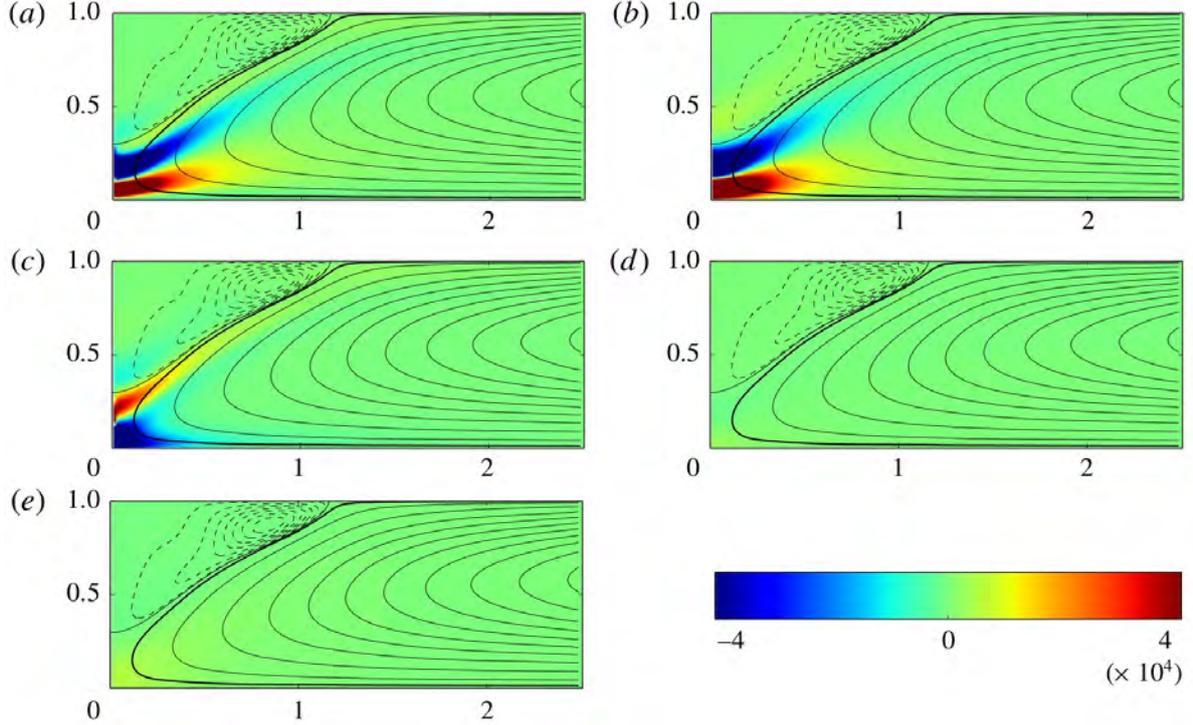


FIGURE 3. Résultats de [13]; cartes de la distribution des différents termes de l'équation de la vorticité azimutale (5) dans la partie plan (r, z) près de l'axe : (a) la dérivée convective de la vorticité azimutale; (b) le terme associé au gradient axial de Γ ; (c) la diffusion; (d) le terme de Coriolis; et (e) la poussée d'Archimède. Paramètres : $Pr = 0, 1$, $Ra = 2 \times 10^4$.

On se restreint ensuite au problème axisymétrique et on note ψ la fonction de courant. En posant $\Gamma = ru_\varphi$, on obtient donc

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -2r\Omega u_r + \nu \nabla_*^2 \Gamma \quad (3)$$

où

$$\nabla_*^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

est l'opérateur de Stokes. En posant par ailleurs $\omega_\varphi = \partial_z u_r - \partial_r u_z = -\frac{1}{r} \nabla_*^2 \psi$ la vorticité azimutale et en prenant le rotationnel de l'équation (1) on a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^4} \right) + \frac{2\Omega}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{\alpha g}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \nabla_*^2 (r\omega_\varphi). \quad (5)$$

Les équations (3) et (5) sont équivalentes à (1).

2.2. Origine de la vorticité négative et formation de l'œil. — Oruba et al. ont résolu numériquement les équations (2), (3) et (5) pour trouver une solution stationnaire et ont publié leurs résultats dans [13, 14]. Les paramètres de contrôle sans dimension pour ce problème sont le nombre d'Ekman $E = \nu/\Omega H^2$, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ et le nombre de Rayleigh $Ra = \alpha g \beta H^4 / \nu \kappa$. Le rapport d'aspect $\varepsilon = 0.1$ est cohérent avec les dimensions d'un cyclone tropical et le nombre d'Ekman est fixé à $E = 0.1$.

Le nombre de Rossby local $Ro = |u_\varphi|/\Omega H$ est de l'ordre de l'unité dans la majeure partie du domaine, excepté près de l'axe où il est très grand. Cela signifie que les termes associés aux forces dans les équations (3) et (5) sont négligeables devant les termes inertiels. La fig. 3 montre l'amplitude de ces différents termes près de l'œil en régime stationnaire : seuls le terme de diffusion et de gradient axial de Γ sont suffisamment grands pour compenser la dérivée convective de la vorticité azimutale. Les équations (3) et (5) simplifiées

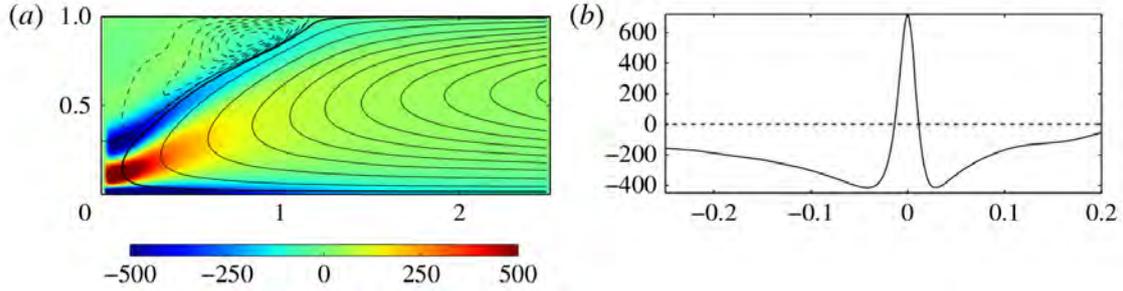


FIGURE 4. Résultats de [13]; (a) carte de la distribution de ω_ϕ/r superposée aux lignes de courant dans la partie plan (r, z) près de l'axe. (b) La variation de ω_ϕ/r le long de la ligne de courant qui passe par le centre du mur de l'œil (indiquée par la ligne noire épaisse dans (a)). Paramètres : $Pr = 0,1$; $Ra = 2 \times 10^4$.

sont alors

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \simeq \nu \nabla_*^2 \Gamma \quad (6)$$

et

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_\phi}{r} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^4} \right) + \frac{\nu}{r^2} \nabla_*^2 (r\omega_\phi). \quad (7)$$

À l'intérieur de l'œil, le moment cinétique Γ est petit et ω_ϕ/r est localement gouverné par une simple équation d'advection-diffusion dont le terme source est négligeable, donc la vorticité négative dans l'œil diffuse probablement depuis le mur de l'œil.

Comme le nombre de Reynolds ($Re = (Ra/Pr)^{1/2}$) est grand, on peut considérer la limite inviscide et les équations (6) et (7) deviennent

$$\Gamma = \Gamma(\psi), \quad (8)$$

et

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (\omega_\phi/r) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^4} \right). \quad (9)$$

Pour autant, on peut réécrire cette dernière équation sous la forme

$$\nabla \cdot [(\omega_\phi/r)\mathbf{u}] = \nabla \cdot [(\Gamma^2/r^4)\mathbf{e}_z], \quad (10)$$

et l'intégrer sur un volume compris entre deux lignes de courant qui passent par le mur de l'œil. Si les deux bords de ce volume de contrôle sont au même rayon fixé la contribution du terme de droite s'annule et il ne peut pas être source de vorticité. Si l'on revient à l'équation (7) on conclut que la seule source possible de vorticité négative dans le mur de l'œil est le terme visqueux, ce qui nous amène à l'hypothèse que la vorticité négative dans le mur de l'œil a son origine dans la couche limite inférieure. En d'autres termes, la vorticité azimutale négative est générée au bord inférieur et ensuite advectée dans le mur de l'œil où elle agit ensuite comme source pour une lente diffusion transversale de la vorticité négative dans l'œil. Bien sûr, lorsque les lignes de courant passent dans le mur de l'œil, puis le traversent, il y a également une génération de vorticité azimutale d'abord positive, puis négative, par les gradients axiaux de Γ^2/r^4 , mais ces deux contributions s'annulent exactement et ne peuvent donc pas contribuer à la création de vorticité négative dans le mur de l'œil.

Les principales caractéristiques du mur de l'œil sont très clairement visibles sur la fig. 4 (a), qui montre la distribution de la vorticité azimutale, ω_ϕ/r , superposée aux lignes de courant. L'amplitude exceptionnellement élevée de vorticité azimutale dans et autour du mur de l'œil est immédiatement apparente, et cela incite à définir le mur de l'œil comme la région inclinée vers l'extérieur de forte vorticité azimutale négative qui sépare l'œil du tourbillon primaire. La fig. 4 (a) présente deux autres caractéristiques importantes. Premièrement, une grande réserve de vorticité azimutale négative s'accumule dans la couche limite inférieure, comme attendu. Deuxièmement, entre le bord inférieur et le mur de l'œil, il y a une région de vorticité azimutale positive intense. La fig. 4 (b) montre la variation de ω_ϕ/r le long de la ligne de courant qui passe par le centre du mur de l'œil, indiquée par la ligne noire épaisse de la fig. 4 (a). Lorsque la ligne de courant passe le long de la couche limite inférieure, ω_ϕ/r est négatif et diminue de plus en plus. Il y a ensuite une forte augmentation de ω_ϕ/r lorsque la ligne de courant sort de la

Pr=0.1		Pr=0.05	
Ra	Taille de l'œil	Ra	Taille de l'œil
800-1500	0	800-1150	0
1700	0.15	1170	0.16
1750	0.22	1200	0.28
1800	0.26	1250	0.36
1900	0.32	1300	0.4
2000	0.36	1500	0.49
20000	0.7		

TABLE 1. Quelques valeurs de la taille de l'œil, définie comme la distance (adimensionnée par la hauteur de la boîte) entre la ligne de courant $\psi = 0$ et le bord supérieur de la boîte au niveau de l'axe.

couche limite et entre dans une région de $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$ positif, suivie d'une baisse correspondante lorsque la ligne de courant passe dans la région de $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$ négatif. La croissance et la décroissance de ω_φ/r causées par les gradients axiaux du moment angulaire s'annulent exactement, et le fluide parvient donc dans le mur de l'œil avec le même niveau de vortacité qu'il avait en quittant la couche limite.

En résumé, dans cette simulation de [13], le mur de l'œil qui sépare l'œil du tourbillon primaire est caractérisé par une amplitude élevée de vortacité azimuthale négative. Cette vortacité ne provient pas du terme $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$, malgré sa dominance locale, mais plutôt de la couche limite à $z = 0$. L'œil acquiert alors sa vortacité négative par diffusion transversale à partir du mur de l'œil, conformément au théorème de Prandtl-Batchelor (voir appendix A). Bien que l'écoulement global soit entraîné et façonné par les forces de poussée d'Archimède et de Coriolis, celles-ci ne jouent aucun rôle dynamique significatif au voisinage de l'œil et du mur de l'œil.

3. Instabilité hydrodynamique d'un vortex cyclonique sans œil

Oruba et al. ([14]) ont prolongé cette étude par une étude paramétrique qui a mis en évidence la gamme limitée de paramètres en termes de nombres de Rossby et de Reynolds pour lesquels un œil pouvait se former. Nous nous sommes basés sur ces simulations et pour des nombres de Prandtl et d'Ekman donnés nous avons fait varier le nombre de Rayleigh : on fait varier l'influence de la poussée d'Archimède en conservant la même viscosité, la même diffusivité thermique et la même force de Coriolis. Pour se rapprocher de [14] nous avons mené cette étude pour deux valeurs du nombre de Prandtl. On a vu précédemment que la poussée d'Archimède était le moteur de la formation initiale du cyclone : ainsi le nombre de Rayleigh maîtrise la circulation globale du fluide.

La fig. 5 montre différents résultats de simulation avec et sans œil dans chacun des deux cas. On remarquera également que la taille de l'œil varie également d'un cas à l'autre, comme indiqué dans la table 1.

Tous les résultats qui suivent font partie d'une étude réalisée sous la direction d'Emmanuel Dormy et qui fera l'objet d'une publication. Les profils de ψ sont tous semblables dans leur forme et leur intensité et suggèrent que ψ varie faiblement avec Ra à Pr constant : on a donc cherché à voir l'apparition de l'œil comme une perturbation d'un profil de base à faible Rayleigh (800) où il n'y a pas d'œil. On cherche alors à écrire le profil de ψ pour un certain Ra de la manière suivante :

$$\psi_{|Ra} = \psi_{|Ra=800} + \frac{\partial \psi}{\partial Ra} \Big|_{\tilde{Ra}} (Ra - 800), \quad (11)$$

où $\tilde{Ra} \in [800, Ra]$.

Comme on n'a pas $\psi(Ra)$ de manière continue, on calcule le profil de perturbation

$$\Delta_{Ra_1}^{Ra_2} := \frac{\psi(Ra_2) - \psi(Ra_1)}{Ra_2 - Ra_1} \quad (12)$$

avec Ra_1 et Ra_2 les plus proches possible.

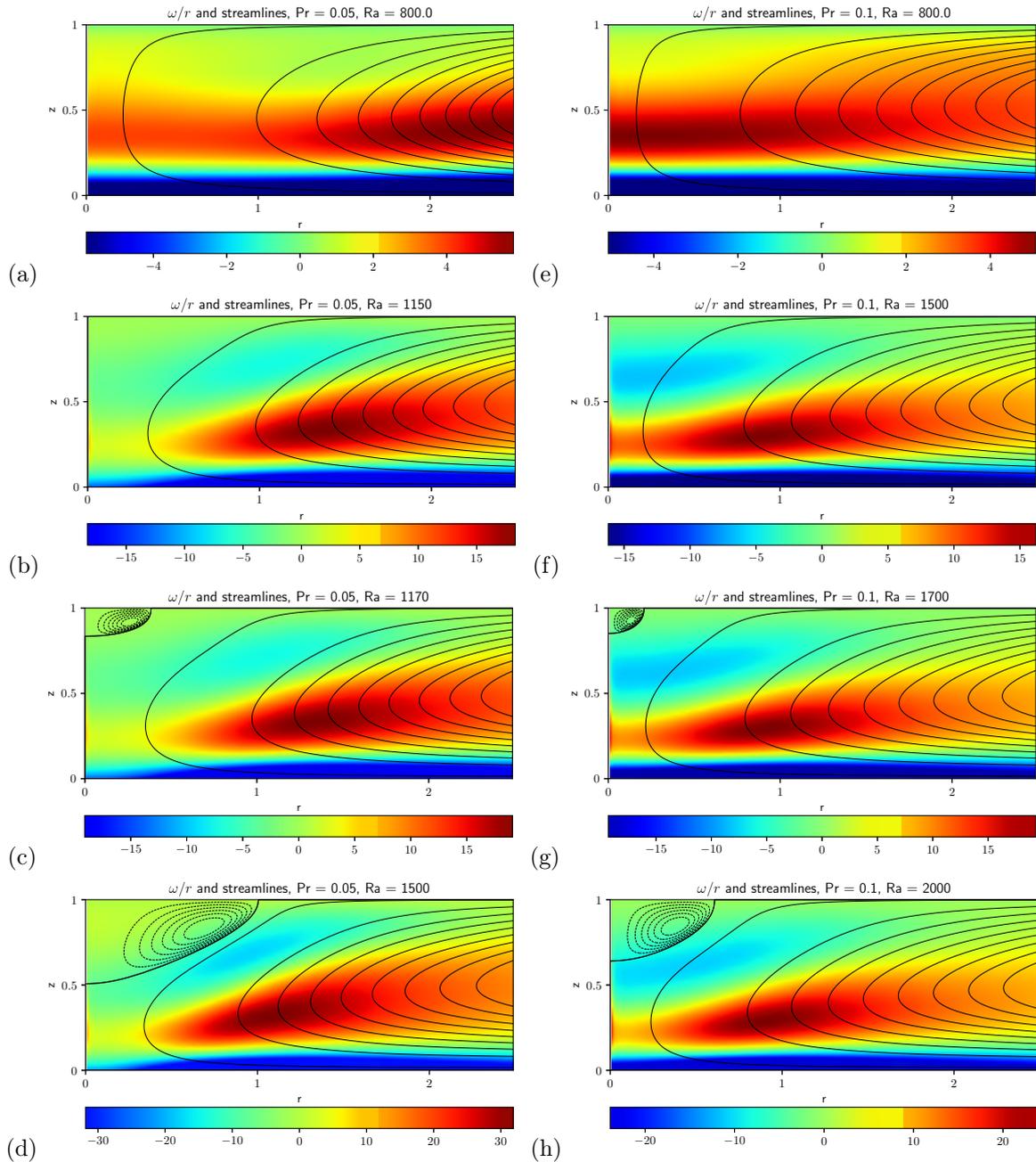


FIGURE 5. ω_φ/r et lignes de courant. (a,b,c,d) : $Pr = 0.05$, (e,f,g,h) : $Pr = 0.1$. (a) $Ra = 800$, (b) $Ra = 1150$, (c) $Ra = 1170$, (d) $Ra = 1500$, (e) $Ra = 800$, (f) $Ra = 1500$, (g) $Ra = 1700$, (h) $Ra = 2000$,

De manière extrêmement surprenante le profil de perturbation (fig. 6) présente la forme d'un œil pour des valeurs de Rayleigh bien plus petites que celle auxquelles un œil apparaît. Cela suggère de chercher l'œil comme une instabilité et de tenter deux méthodes de mise en évidence.

3.1. La formation de l'œil vue comme un *vortex breakdown*. — Nous allons d'abord considérer la théorie classique du *vortex breakdown* appliquée à notre écoulement convectif (voir par exemple [2, 5, 8, 7]). Considérant, à la suite des travaux de [13] que la formation de l'œil est due à l'advection de la vorticit   créée au niveau de la couche limite inf  rieure, nous   tudions la stabilit   du flot vertical une fois la couche limite d  coll  e mais avant la formation de l'œil. Pour ce faire, nous consid  rons un

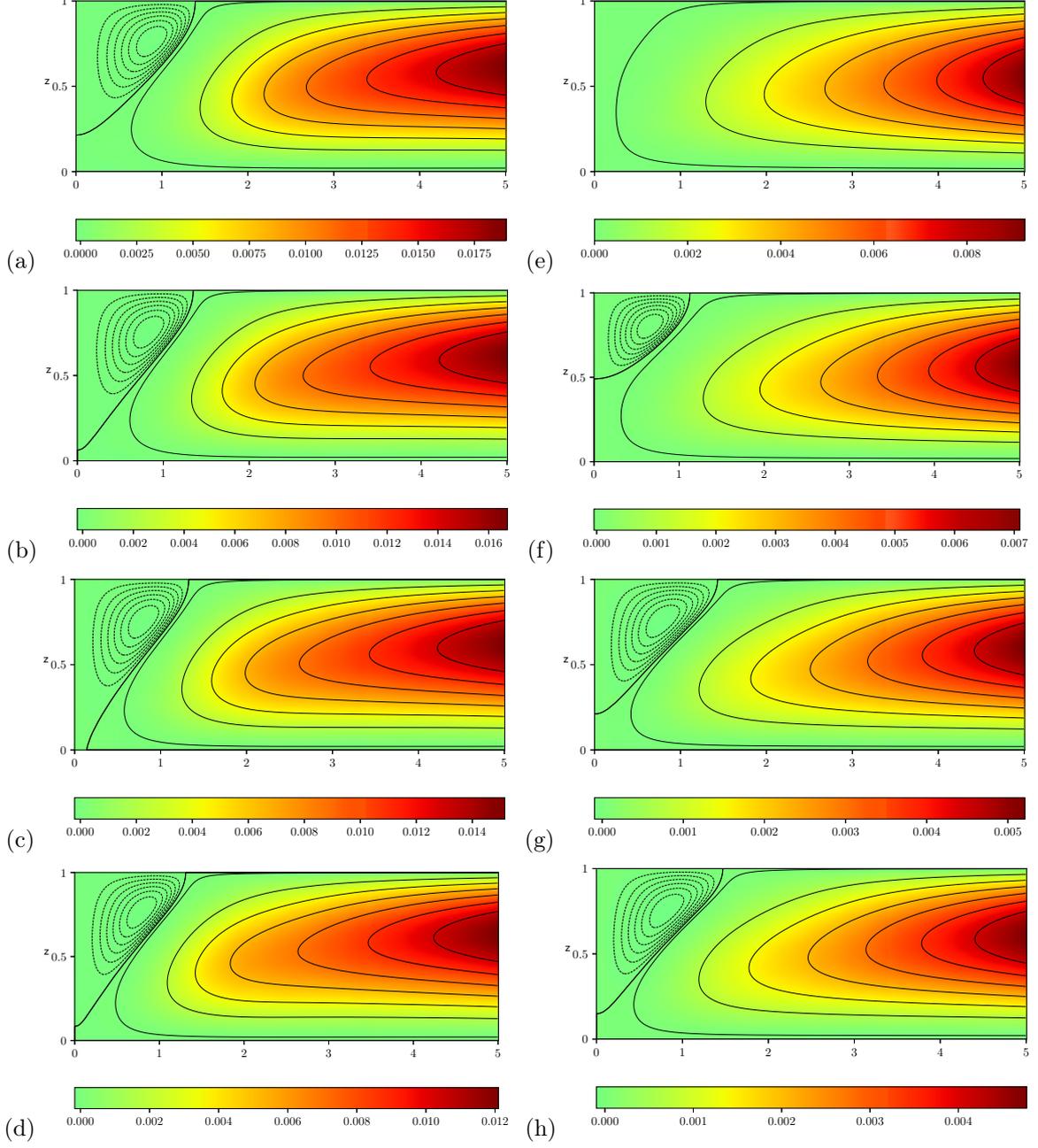


FIGURE 6. (a) Δ_{800}^{850} (comme défini en (12)), $\text{Pr} = 0.05$, (b) Δ_{850}^{900} , $\text{Pr} = 0.05$, (c) Δ_{900}^{950} , $\text{Pr} = 0.05$, (d) Δ_{1050}^{1100} , $\text{Pr} = 0.05$, (e) Δ_{800}^{850} , $\text{Pr} = 0.1$, (f) Δ_{1000}^{1100} , $\text{Pr} = 0.1$, (g) Δ_{1400}^{1500} , $\text{Pr} = 0.1$, (h) Δ_{1500}^{1700} , $\text{Pr} = 0.1$

profil indépendant de z de Ψ_0 et Γ_0 , qui sont des fonctions de r seulement. Les profils de Ψ_0 et de Γ_0 sont extraits du DNS en suivant des courbes de vitesse radiale nulles. Ils satisfont l'équation d'Euler (adimensionnées) en régime permanent sans poussée d'Archimède

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^4} \right) + \frac{2\text{Ro}^{-1}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad \frac{D\Gamma}{Dt} = -2r\text{Ro}^{-1}u_r. \quad (13)$$

On introduit alors la fonction de courant de Stokes ψ définie par $\mathbf{u} = \nabla \times ((\psi/r)\mathbf{e}_\varphi) + (\Gamma/r)\mathbf{e}_\varphi$, et on cherche une perturbation dépendant du temps de la forme

$$\psi(r, z, t) = \Psi_0(r) + \varepsilon\varphi(r)e^{ik(z-ct)}. \quad (14)$$

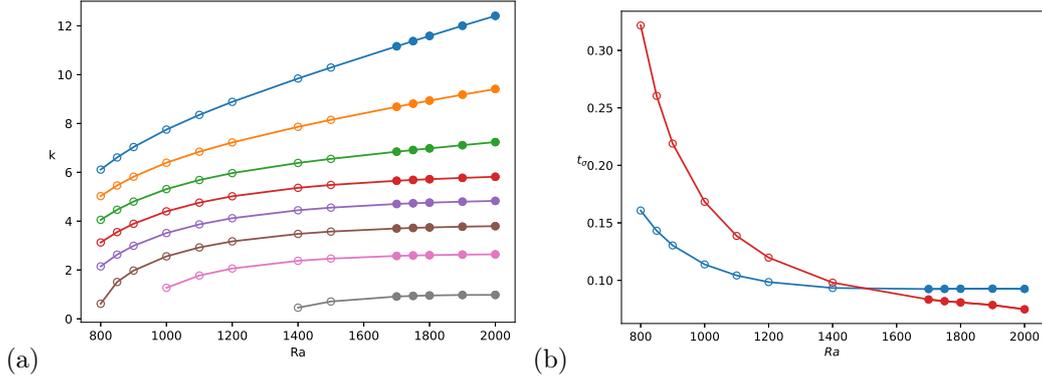


FIGURE 7. (a) Valeurs de k pour la stabilité marginale ($c = 0$) pour la perturbation du flot indépendant de z donnée par (15) pour $Pr = 0.1$. (b) Valeurs de $\tau_\sigma = \sigma_{max}^{-1}$ minimales en fonction du nombre de Rayleigh (en rouge) et $(\max w_0)^{-1}$ (en bleu) Les points sont creux quand la DNS n'a pas fait apparaître d'œil et pleins quand elle en a fait apparaître un.

Au premier ordre nous obtenons l'équation aux valeurs propres

$$\varphi'' - \frac{1}{r}\varphi' + \left(\frac{1}{r} \frac{w_0'}{w_0 - c} - \frac{w_0''}{w_0 - c} + \frac{2}{r^2} \frac{\Gamma_0 \Gamma_0'}{(w_0 - c)^2} \right) \varphi = k^2 \varphi. \quad (15)$$

Nous avons alors étudié la stabilité marginale ($c = 0$) puis cherché le taux de croissance maximal ($\sigma = k \mathbf{Im}(c)$) et la longueur d'onde associée. Nous avons également été attentifs à la longueur d'onde particulière du double de la taille du domaine.

L'équation (15) n'a pas une dépendance linéaire en c , ce qui complique notre étude. Nous avons donc fait le choix de balayer un segment $[c_{\min}, c_{\max}]$ avec une forte résolution et de calculer pour chacun de ces c les valeurs de k possibles. Nous en déduisons ensuite σ .

Les résultats que nous avons obtenus sont résumés dans la fig. 7. Les valeurs propres possibles de l'équation (15) sont sur une demi-droite de la forme $[-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$. Nous ne retenons que les valeurs propres positives, puisqu'il s'agit en fait de k^2 . Cependant la discrétisation du domaine ne nous permet d'obtenir que des valeurs discrètes. Nous avons testé la robustesse des calculs en changeant la résolution du domaine pour obtenir finalement $a = k_{\max}$ pour chaque c , et déduire σ_{\max} .

En répétant ce calcul pour plusieurs valeurs de Pr et Ra , nous avons obtenu la figure (b) qui correspond à ce que l'on attendrait : le temps de croissance de la perturbation est plus grand que le temps caractéristique de l'écoulement dans les simulations qui n'ont pas donné d'œil, et inversement dans les simulations qui en ont fait apparaître un. Nous aimerions toutefois que l'intersection des deux courbes ait lieu pour un Rayleigh plus grand car l'œil apparaît pour un Rayleigh très proche de 1700. Nous avons pris comme temps caractéristique de l'écoulement $(\max w_0)^{-1}$, les longueurs et temps étant adimensionnés.

Néanmoins, pour obtenir une instabilité de la taille d'un œil il faut regarder uniquement la valeur propre $k = \pi$, et c'est ce que nous avons ensuite fait. Les temps de croissance issus des premiers calculs sont légèrement plus grands mais semblent avoir le même comportement, ce qui nous aiderait compte-tenu de la remarque précédente sur le point d'intersection des courbes de la fig. 7 (b). Cependant, ils doivent être repris pour vérifier la robustesse des résultats et éliminer les éventuelles erreurs numériques présentes.

PARTIE II. ÉTUDE ET MODÉLISATION DU MÉLANGE DES ÉMISSIONS DES JETS MOTEUR PAR LE SILLAGE ET DES ACTIONS POSSIBLES SUR LES TRAÎNÉES DE CONDENSATION

Cette partie introduit de domaine de recherche dans lequel j'effectue ma thèse. Il ne s'agit pas en premier lieu d'une thèse en mécanique (des fluides) mais les interactions avec les mathématiques me paraissent suffisantes pour en parler ici.

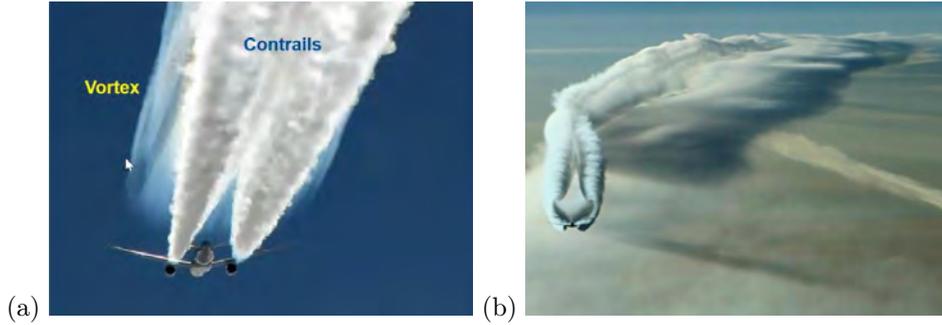


FIGURE 8. (a) Formation des tourbillons marginaux et condensation dans les jets moteurs. (b) Capture des panaches issus des jets moteur par les tourbillons marginaux puis formation de nuage

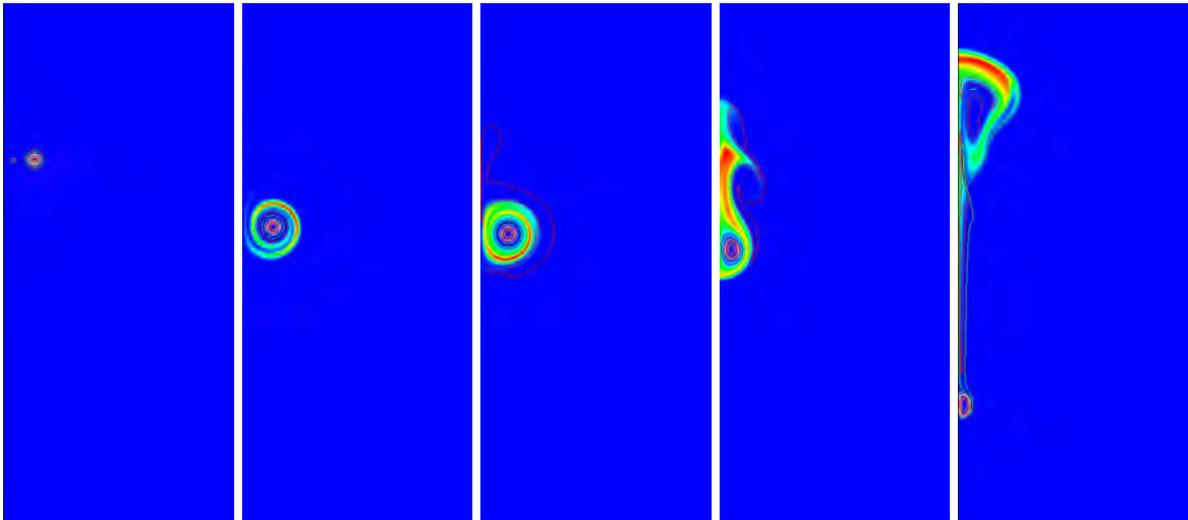


FIGURE 9. Évolution d'un scalaire passif dans un dipôle tourbillonnaire 2D (seule la partie droite est représentée)

1. Introduction

Les traînées de condensation générées par les avions, qui peuvent se transformer en nuages d'altitudes (cirrus) artificiels, représentent un sujet d'importance à la fois pour les avions militaires (furtivité) et civils (impact sur le bilan radiatif terrestre, voir [11]). Ces traînées résultent de la condensation de l'humidité contenue dans les jets moteurs et dans l'atmosphère sur les suies lors du mélange des deux milieux, selon les conditions de pression, température et d'humidité ambiantes (*cf.* [10]).

Le sillage induit par l'aéronef, qui est composé de tourbillons engendrés par ses différentes surfaces portantes, agit sur cette dilution, en emportant les jets moteurs dans son champ de vitesse, activant dans certains cas des mécanismes propre à l'évolution dans l'atmosphère (stratification, vent, turbulence). Cela détermine en partie l'évolution des traînées de condensation dans toute l'étendue du sillage dynamique de l'avion (*i.e.* pendant quelques minutes). On pose ainsi la question du rôle que joue le sillage de l'aéronef dans le champ proche sur la distribution et la position verticale des traînées à l'issue de l'évolution dynamique du sillage (*cf.* [23]). La réponse à cette question permettra d'éclaircir l'importance de la prise en compte du champ proche dans les bilans d'impact sur le climat des traînées de condensation.

L'emport ou non du panache moteur vu comme un scalaire passif) par le sillage (dipôle tourbillonnaire) peut changer la position verticale de ce dernier en fonction du temps. Par auto-induction du dipôle, celui-ci descend, indépendamment des effets de stratification. Ces derniers conduisent ensuite à la formation d'un sillage dit secondaire, qui remonte (voir fig. 9) Selon que le panache soit plus ou moins proche du cœur, ce dernier va être emporté plus ou moins bas avec le sillage. La position verticale a un effet sur la

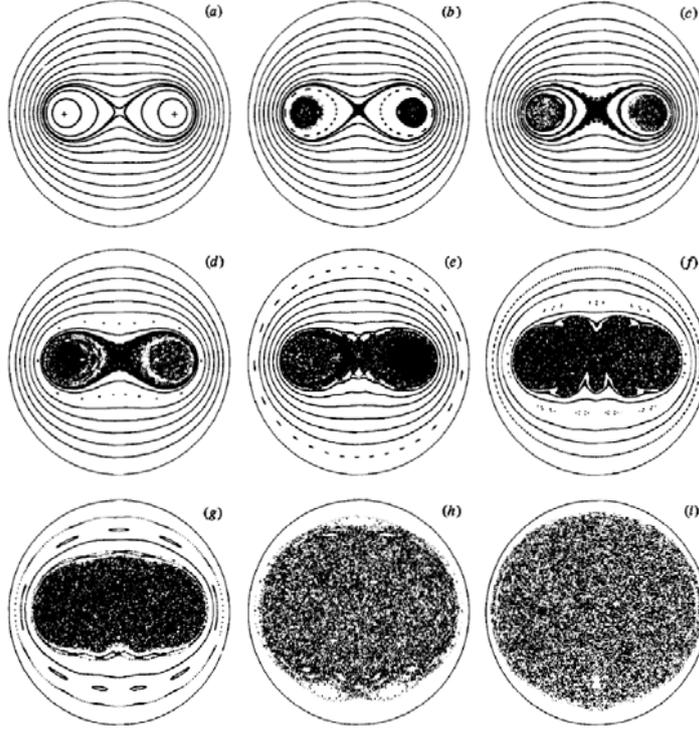


FIGURE 10. Visualisation de trajectoires dans l'écoulement de *blinking vortex*. Les paramètres sont $a = 2b$ et (a) $\mu = 0,05$; (b) $0,1$; (c) $0,125$; (d) $0,15$; (e) $0,2$; (f) $0,35$; (g) $0,5$; (h) 1 ; (i) $1,5$. Les croix indiquent les positions des agitateurs (source [1]).

sublimation de la glace formée et emportée par le sillage puisqu'en descendant il y a réchauffement par compression adiabatique.

2. Mélange par advection chaotique

L'écoulement de *blinking vortex*, introduit par Aref ([1]), consiste en deux tourbillons ponctuels co-rotatifs, séparés par une distance fixe ($2b$), qui s'allument et s'éteignent périodiquement avec une période constante T . A tout moment, un seul des tourbillons est actif, de sorte que le mouvement est constitué de rotations consécutives autour des différents centres. L'écoulement est contraint dans un cercle de rayon a par la méthode des tourbillons image. Celle-ci consiste à ajouter, pour chaque tourbillon de centre z (dans le plan complexe) tel que $|z| < a$, un tourbillon de même intensité et de sens de rotation opposé dont le centre se situe en a^2/\bar{z} . Ainsi le cercle de rayon a est une ligne de courant de l'écoulement.

Écrivons maintenant l'expression du flot considéré. Soit $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ la position du centre du tourbillon (non nécessairement continue). Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ la position d'une particule sans masse. On a

$$\bar{\zeta}' = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left((\zeta - z)^{-1} - \left(\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}} \right)^{-1} \right). \quad (16)$$

Proposition 2.1 ([1]). — *Le système (16) est hamiltonien.*

Démonstration. Si l'on écrit $\zeta = \xi + i\eta$ alors (16) est équivalent à

$$\xi' = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \eta' = \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad \text{où } H = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left| \frac{\zeta - z}{\zeta - a^2/\bar{z}} \right|. \quad (17)$$

□

Proposition 2.2. — *Le système est intégrable pour $z(t) = z_0 e^{i\Omega t}$.*

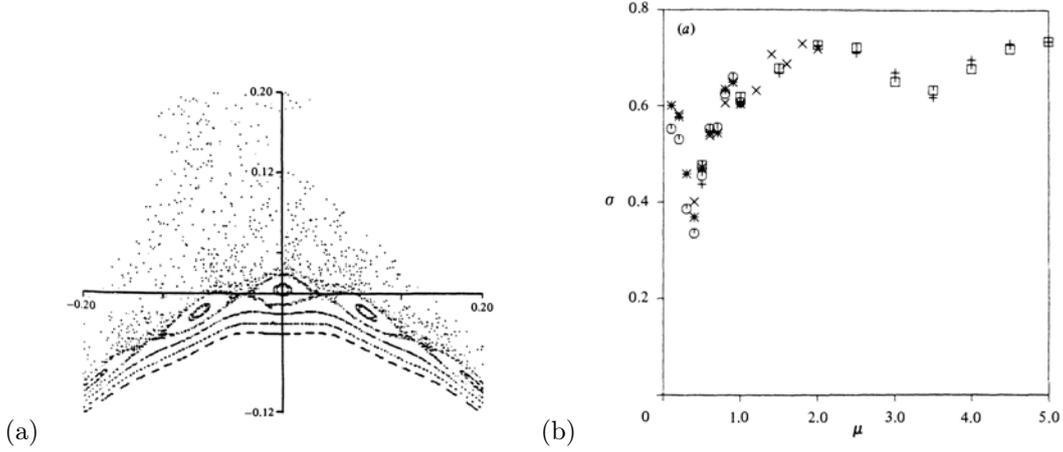


FIGURE 11. (a) Vue agrandie de la région limite pour $\mu = 0,38$ (source [15] p.175). (b) Exposant de Lyapounov en fonction de μ (source [15] p.183).

Démonstration. On pose $\chi = \zeta/z$ et on a

$$\bar{\chi}' - i\Omega\bar{\chi} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{|z_0|^2} \left((\chi - 1)^{-1} - \left(\chi - \frac{a^2}{|z_0|^2} \right)^{-1} \right) \quad (18)$$

Le hamiltonnien pour χ est alors indépendant du temps. \square

Les résultats ci-dessus peuvent naturellement être généralisés à un système de n vortex. On a alors

$$\bar{\zeta}' = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^n \Gamma_j \left((\zeta - z_j)^{-1} - \left(\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}_j} \right)^{-1} \right), \quad (19)$$

et

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \Gamma_j \log \left| \frac{\zeta - z_j}{\zeta - a^2/\bar{z}_j} \right|. \quad (20)$$

Lorsque les deux tourbillons agissent simultanément, le système est intégrable et les lignes de courant sont similaires à celles de la fig. 10 (a).

Aref a étudié des trajectoires lagrangiennes dans l'écoulement de *blinking vortex*. L'étude a porté sur l'influence de la période adimensionnée $\mu = \Gamma T/2\pi a^2$. Il a observé par simulation numérique que quand μ devenait suffisamment grand, le système devenait chaotique (voir fig. 10).

Cette famille d'écoulements a été beaucoup étudiée, notamment par Khakhar et Ottino ([9], [15]). Ils ont remarqué que la région chaotique se formait près des centres des vortex pour μ assez petit puis en plus au centre pour μ plus grand et enfin occupait l'espace pour μ assez grand. Près de la frontière entre les régions "régulières" et "chaotiques", ils ont observé une chaîne d'îlots d'écoulement régulier, chaque îlot contenant un point périodique elliptique (voir fig. 11 (a)). Entre les îlots, il y a un point hyperbolique, de même période que les points elliptiques. De plus, dans chaque îlot, le point elliptique est entouré d'une chaîne d'îlots de période supérieure et, en théorie, le tableau se répète à l'infini. La restriction au mélange imposée par les petits îlots n'apparaît que pour les temps longs ($\mathcal{O}(10^4)$ itérations) puisqu'ils sont de période élevée.

Il sont également calculé l'exposant de Lyapounov $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{m})$, défini par

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n\mathbf{T}} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \lambda_i \right), \quad (21)$$

où λ_i est la longueur ajoutée pour passer de l'étape $i - 1$ à i , et obtenu la fig. 11 (b).

Un des objectifs de ma thèse est de reprendre ces travaux et de les adapter au cas de deux tourbillons contra-rotatifs. La source du chaos serait non un clignotement des vortex mais un mouvement de leur centre suivant les lois de la turbulence (théorie de Kolmogorov pour la turbulence homogène isotrope par

exemple). Il s'agira de reprendre les outils de mesure du chaos utilisés par Ottino, de les appliquer et de les approfondir, notamment la théorie de Pesin (voir [22]).

Avant toute chose l'important est d'avoir un critère de mélange adapté à notre étude : seul le mélange du jet moteur nous intéresse et donc seules les régions dans lesquelles ces particules peuvent aller. Une partition du plan en régions où le mélange est plus ou moins bon serait un résultat utile en pratique.

3. Perspectives

D'autres études seront menées au cours de ma thèse.

On s'intéressera au phénomène de *detrainment* décrit par [20] : un dipôle tourbillonnaire bi-dimensionnel perd de la vortacité sur le plan de symétrie, à son aval. Cela se produit dans l'évolution temporelle du dipôle jusqu'à arriver à l'état de dipôle de Lamb, qui est solution des équation d'Euler. Ce phénomène participe à la création du sillage secondaire décrit en introduction. Cela pourrait mener à une étude d'impact de la forme globale de l'aile sur le sillage secondaire et *in fine* sur le mélange du panache issu du moteur.

On s'intéressera également au mélange d'un scalaire passif dans un écoulement tourbillonnaire ou bi-tourbillonnaire 3D. On étudiera l'influence des positions relatives des tourbillons entre eux et de la position du « jet moteur » (position initiale du scalaire passif). On s'intéressera également à l'influence de la turbulence. Cette étude sera menée par DNS. En particulier l'introduction de turbulence *ad hoc* en 3D a été décrite dans [4]. D'autres modèles de turbulence pourront être étudiés.

ANNEXES

Appendice A. Théorème de Prandtl-Batchelor

Théorème A.1 (de Prandtl-Batchelor (e.g. [3])). — *Si dans un écoulement laminaire bidimensionnel à un nombre de Reynolds élevé il existe une région où les lignes de courant sont fermées, alors la vortacité est constante au travers de ces lignes de courant :*

$$\frac{d\omega}{d\psi} = 0 \quad (22)$$

Démonstration. À haut nombre de Reynolds, l'équation de la vortacité en 2D se résume à

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \text{Re}^{-1} \nabla^2 \omega. \quad (23)$$

Intégrons cette équation sur une surface S délimitée par une ligne de courant fermée C dans la région où les lignes de courant sont fermées. Le terme convectif a une intégrale de bord nulle. On a alors

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_C \nabla \omega \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad (24)$$

Par ailleurs, quand $\text{Re} \rightarrow \infty$, $\omega = \omega(\psi) + (1/\text{Re})\tilde{\omega}$ et à l'ordre 1 en $1/\text{Re}$ il vient

$$0 = \frac{1}{\text{Re}} \int_C \nabla \omega \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{\text{Re}} \int_C \frac{d\omega}{d\psi} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (25)$$

Or $\frac{d\omega}{d\psi}$ est constant le long d'une ligne de courant et on a

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d\omega}{d\psi} \int_C \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds = 0. \quad (26)$$

Par ailleurs, la circulation globale est non nulle :

$$\int_C \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds = -\Gamma \neq 0, \quad (27)$$

et enfin

$$\frac{d\omega}{d\psi} = 0. \quad (28)$$

□

Références

- [1] H. AREF – « Stirring by chaotic advection », *Journal of Fluid Mechanics* **143** (1984), p. 1–21.
- [2] G. K. BATCHELOR & A. E. GILL – « Analysis of the stability of axisymmetric jets », *Journal of Fluid Mechanics* **14** (1962), no. 4, p. 529–551.
- [3] G. K. BATCHELOR – « On steady laminar flow with closed streamlines at large reynolds number », *Journal of Fluid Mechanics* **1** (1956), no. 2, p. 177–190.
- [4] W. BECHARA, C. BAILLY, P. LAFON & S. M. CANDEL – « Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows », *AIAA Journal* **32** (1994), no. 3, p. 455–463.
- [5] T. B. BENJAMIN – « Theory of the vortex breakdown phenomenon », *Journal of Fluid Mechanics* **14** (1962), no. 4, p. 593–629.
- [6] S. CHANDRASEKHAR – *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford University Press, 1961.
- [7] M. G. HALL – « Vortex breakdown », *Annual Review of Fluid Mechanics* **4** (1972), no. 1, p. 195–218.
- [8] L. N. HOWARD & A. S. GUPTA – « On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows », *Journal of Fluid Mechanics* **14** (1962), no. 3, p. 463–476.
- [9] D. V. KHAKHAR, H. RISING & J. M. OTTINO – « Analysis of chaotic mixing in two model systems », *Journal of Fluid Mechanics* **172** (1986), p. 419–451.
- [10] B. KÄRCHER – « Formation and radiative forcing of contrail cirrus », *Nature Communications* **9** (2018).
- [11] D. S. LEE, D. FAHEY, A. SKOWRON, M. ALLEN, U. BURKHARDT, Q. CHEN, S. DOHERTY, S. FREEMAN, P. FORSTER, J. FUGLESTVEDT et al. – « The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018 », *Atmospheric Environment* **244** (2021), p. 117834.
- [12] H. J. LUGT – *Vortex flow in nature and technology*, 1983.
- [13] L. ORUBA, P. A. DAVIDSON & E. DORMY – « Eye formation in rotating convection », *Journal of Fluid Mechanics* **812** (2017), p. 890–904.
- [14] ———, « Formation of eyes in large-scale cyclonic vortices », *Phys. Rev. Fluids* **3** (2018), p. 013502.
- [15] J. M. OTTINO – *The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport*, vol. 3, Cambridge university press, 1989.
- [16] R. PEARCE – « Comments on “why must hurricanes have eyes?–revisited” », *Weather* **60** (2005), no. 11, p. 329–330.
- [17] ———, « Why must hurricanes have eyes? », *Weather* **60** (2005), no. 1, p. 19–24.
- [18] E. A. RASMUSSEN – « Polar lows », p. 61–78, American Meteorological Society, Boston, MA, 2003.
- [19] R. ROTUNNO – « Secondary circulations in rotating-flow boundary layers ».
- [20] D. SIPP, L. JACQUIN & C. COSSU – « Self-adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles », *Physics of Fluids* **12** (2000), no. 2, p. 245–248.
- [21] R. K. SMITH – « “why must hurricanes have eyes?”–revisited », *Weather* **60** (2005), no. 11, p. 326–328.
- [22] R. STURMAN, J. M. OTTINO & S. WIGGINS – « Hyperbolicity », Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, p. 126–158, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 2006.
- [23] S. UNTERSTRASSER, R. PAOLI, I. SÖLCH, C. KÜHNLEIN & T. GERZ – « Dimension of aircraft exhaust plumes at cruise conditions : effect of wake vortices », *Atmospheric Chemistry and Physics* **14** (2014), no. 5, p. 2713–2733.