Introduction au domaine de recherche
Inégalités fonctionelles : Inégalité de Poincaré

Léo Hahn sous la direction d'Arnaud Guillin et Manon Michel

Octobre 2021

Résumé

Dans sa forme la plus simple, l'inégalité de Poincaré permet de borner la norme L^2 d'une fonction par la norme L^2 de sa dérivée. On s'attache dans cette courte introduction à présenter ses principales propriétés ainsi que quelques unes de ses applications. On s'efforcera par ailleurs de donner des conditions suffisantes pour qu'une mesure satisfasse une telle inégalité.

Table des matières

1 Introduction

L'inégalité de Poincaré est un objet riche qui se situe à l'interface des équations aux dérivées partielles et des probabilités et possède de nombreuses applications dans ces deux domaines. Du point de vue des équations aux dérivées partielles, l'inégalité de Poincaré permet la minoration des valeurs propres d'opérateurs différentiels et joue un rôle important dans l'existence et l'unicité de solutions. En probabilités, elle implique des propriétés de concentration de la mesure et fournit des vitesses de convergence explicites pour des procesus de Markov. On comprend donc l'importance d'avoir des conditions suffisantes pour qu'une mesure satisfasse l'inégalité de Poincaré. Nous en présenterons deux : la condition de Lyapunov et le critère de Hardy qui est également une condition nécessaire mais qui est spécifique à la dimension un. Ce mémoire reprend en partie l'exposition de [2] et de [3] que l'on pourra consulter pour une exposition approfondie du domaine. Des notes de cours non publiées de Cattiaux et Guillin ont également été d'une grande aide dans sa rédaction.

2 Premiers exemples

On commence par donner un exemple d'utilisation historique et un exemple d'utilisation moderne de l'inégalité de Poincaré en suivant [1]. On montre ensuite que la mesure uniforme sur un intervalle et la mesure gaussienne satisfont l'inégalité de Poincaré. Pour une analyse détaillée des contributions de Poincaré au domaine des équations aux dérivées partielles et à la physique mathématique, on pourra se référer à [6] ainsi qu'aux articles originaux de Poincaré [8, 9, 10].

2.1 Minoration des valeurs propres du laplacien

Un exemple d'utilisation historique de l'inégalité de Poincaré est l'étude du problème spectral

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et u est une fonction propre.

Dans l'optique de minorer les valeurs propres $\lambda \neq 0$, on peut multiplier cette équation par u et intégrer par parties pour obtenir

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Pour minorer ce quotient, Poincaré utilise alors une inégalité qui porte maintenant son nom (mais qui serait due à Neumann, Schwarz ou Scheefer [1]) et dont l'énoncé moderne est le suivant.

Théorème 1 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

On rappelle que

- l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonction $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est également dans $L^2(\Omega)$
- l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ des fonctions lisses à support compact

Preuve. On peut supposer $\Omega \subset [a, b] \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Il suffit de montrer l'inégalité pour $f \in C_c^\infty(\Omega)$ et de l'étendre ensuite par densité. Or pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f^2(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b f^2(x_1, \ldots, x_n)dx_1\right] dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b \left(\int_a^{x_1} \partial_1 f(t, \ldots, x_n)dt\right)^2 dx_1\right] dx_2 \ldots dx_n \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b (x_1 - a) \int_a^{x_1} (\partial_1 f(t, \ldots, x_n))^2 \, dt dx_1\right] dx_2 \ldots dx_n \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b (x_1 - a) \int_a^{b} (\partial_1 f(t, \ldots, x_n))^2 \, dt dx_1\right] dx_2 \ldots dx_n \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_1 f(x))^2 \, dx \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_\Omega \|\nabla f(x)\|^2 dx
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé Cauchy-Schwarz pour la première inégalité. $\square$

2.2 Résolution du problème de Poisson

Une application moderne classique de l'inégalité de Poincaré qui illustre sa forte utilité en EDPs est la résolution du problème de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f \in L^2(\Omega)$.

Définition 1. *Une solution faible du problème de Poisson est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv.$$

On montre maintenant grâce au théorème de Lax-Milgram et à l'inégalité de Poincaré qu'il existe une unique solution faible au problème de Poisson en suivant [5].

Définition 2. *Une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

- ***continue** s'il existe une constante C telle que pour tous $u, v \in H$*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

- ***coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H$*

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$$

Théorème 2 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\phi \in H'$ il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$*

$$a(u,v) = \phi(v)$$

pour tout $v \in H$. De plus, si a est symétrique, alors u s'obtient comme

$$\operatorname*{argmin}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \phi(v) \right\}.$$

Proposition 1. *Le problème de Poisson admet une unique solution faible pour $f \in L^2(\Omega)$. De plus, cette solution faible s'obtient comme*

$$\operatorname*{argmin}_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega fv \right\}.$$

Preuve. On se place dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ et on souhaite appliquer le théorème de Lax-Milgram avec la forme bilinéaire continue $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ et la forme linéaire continue $\phi(u) = \int_\Omega fu$. Il suffit donc de montrer que a est coercive en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$a(u,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2C}\int_\Omega u^2 \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

□

2.3 Mesure uniforme et mesure gaussienne

Nous travaillerons à partir de maintenant avec une forme centrée et sans conditions aux limites de l'inégalité de Poincaré.

Définition 3. *La mesure μ vérifie l'inégalité de Poincaré lorsque*

$$Var_\mu(f) \leq C_P \int \|\nabla f\|^2 d\mu$$

pour une classe de fonctions f qui pourra changer selon le contexte et dans ce cas, la constante de Poincaré de μ est la plus petite constante pour laquelle cette inégalité est vérifiée.

Donnons tout de suite deux exemples.

Proposition 2. *Soit ν_L la mesure uniforme sur un intervalle de longueur L. On a pour toute fonction f lisse*
$$\mathrm{Var}_{\nu_L}(f) \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int (f')^2 d\nu_L$$
la constante L^2/π^2 étant optimale.

Preuve. Par homogénéité et invariance par translation, il suffit de montrer le résultat sur $[0,\pi]$. Si f est lisse sur cet intervalle, on la prolonge en une fonction paire $\tilde{f}$ sur $[-\pi,\pi]$ (en particulier $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$) et on développe cette dernière en série de Fourier (de cos par parité). La moyenne de $\tilde{f}$ est donnée par le coefficient a_0 et on a
$$\mathrm{Var}_{\nu_{2\pi}}(\tilde{f}) = \sum_{n\geq 1} a_n^2 \leq \sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2 = \int (f')^2 d\nu_{2\pi}$$
l'inégalité étant une égalité pour $f = \cos$. Il ne reste plus qu'à voir que $\mathrm{Var}_{\nu_{2\pi}}(\tilde{f}) = \mathrm{Var}_{\nu_\pi}(f)$ et $\int (\tilde{f}')^2 d\nu_{2\pi} = \int (f')^2 d\nu_\pi$. ☐

Proposition 3. *Soit γ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$. On a pour toute fonction $f \in H^1(\gamma)$*
$$\mathrm{Var}_\gamma(f) \leq 1 \cdot \int (f')^2 d\gamma$$
la constante 1 étant optimale.

Preuve. On définit les polynômes d'Hermite (H_n) en posant $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et $H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$ pour $n \geq 2$. On pose de plus $G_n = H_n/\sqrt{n!}$. Il est connu que (G_n) est alors une base hilbertienne de $L^2(\gamma)$.

Si $f \in H^1(\gamma)$ on peut écrire
$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i(f) G_i \text{ et } f' = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i(f') G_i \text{ où } c_i(g) = \int g G_i d\gamma.$$

Les polynômes d'Hermite vérifient la relation $H_{n+1} = XH_n - H_n'$ ce qui se traduit, après une intégration par parties, par $c_i(f') = \sqrt{i+1}\, c_{i+1}(f)$. On a donc
$$\mathrm{Var}_\gamma(f) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(f)^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} i c_i(f)^2 = \int (f')^2 d\gamma.$$

Le choix $f = H_1$ montre que la constante 1 optimale. ☐

3 Propriétés

On présente maintenant les propriétés de tensorisation et de perturbation qui permettent d'étendre la liste des mesures satisfaisant l'inégalité de Poincaré. La tensorisation permet de monter en dimension et d'obtenir des inégalités de Poincaré pour des mesures sur $\mathbb{R}^n$ à partir d'inégalités de Poincaré pour des mesures sur $\mathbb{R}$. La propriété de perturbation permet d'obtenir une inégalité de Poincaré pour une mesure ν à partir d'une inégalité de Poincaré pour une mesure μ lorsque $\log \frac{d\nu}{d\mu}$ est borné. On présente également un résultat de concentration de la mesure qui permet de donner un premier exemple d'application en probabilités. Nos deux références principales pour cette section sont [2] et [3].

3.1 Tensorisation

Proposition 4 (Tensorisation)**.** *Si les mesures μ_i vérifient une inégalité de Poincaré de constante C_i alors $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ vérifie une inégalité de Poincaré de constante $C = \max_i C_i$.*

La preuve de la proposition s'appuie sur le lemme suivant qu'on énonce sans le démontrer.

Lemme 1. *Si $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ alors*
$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\mu \left[\mathrm{Var}_i(f)\right]$$
où
$$\mathrm{Var}_i(f)(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Var}_{\mu_i}\Big[f(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)\Big]$$

Preuve de la proposition 4. En considérant des fonctions d'une seule variable on voit que $C \geq \max_i C_i$. On écrit ensuite

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\mu\left[\mathrm{Var}_i(f)\right] \leq \left(\max_i C_i\right) \mathbb{E}_\mu\left[\sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)^2\right].$$

□

Il est remarquable que la constante de Poincaré d'un produit soit le maximum des constantes de Poincaré. Ceci montre une forme d'indépendance de l'inégalité de Poincaré par rapport à la dimension. Par exemple, la gaussienne d-dimensionelle $\mathcal{N}(0, I_d)$ satisfait une inégalité de Poincaré de constante 1 indépendemment de la dimension d.

3.2 Concentration

Le résultat de concentration suivant est dû à Bobkov et Ledoux [4].

Proposition 5 (Concentration)**.** *Si μ vérifie une inégalité de Poincaré de constante C_P, alors pour tout $\lambda \in \left[0, 2\sqrt{C_P}\right[$ et toute fonction 1-Lipschitz f on a*

$$\int e^{\lambda(f-\mu f)} d\mu \leq \frac{2\sqrt{C_P} + \lambda}{2\sqrt{C_P} - \lambda}.$$

Preuve. Pour simplifier on suppose que $\mu f = 0$ et que f est lisse et bornée (ensuite on approxime). On considère $u(\lambda) = \int e^{\lambda} f d\mu$. L'inégalité de Poincaré appliquée à $e^{\lambda f/2}$ donne

$$u(\lambda) - u^2(\lambda/2) \leq C_P \int \frac{\lambda^2}{4} \|\nabla f\|^2 e^{\lambda f} d\mu \leq \frac{\lambda^2 C_P}{4} u(\lambda)$$

puisque $\sum_{i=1}^{d} (\partial_i f)^2 \leq 1$. On en déduit, pour λ dans l'intervalle considéré

$$u(\lambda) \leq \frac{1}{1 - \lambda^2 C_P/4} u^2(\lambda/2) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \lambda^2 C_P/4^k}\right)^{2^k} u^{2^n}(\lambda/2^n).$$

Un développement limité fournit $u^N(\lambda/N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc

$$u(\lambda) \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - \lambda^2 C_P/4^k}\right)^{2^k}$$

où le terme droit converge puisque la série de terme général

$$2^k \log\left(\frac{1}{1 - \lambda^2 C_P/4^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^k \lambda^2 C_P}{4^k}$$

est convergente. On pourra consulter l'article de Bobkov et Ledoux pour le calcul de la borne exacte. □

Remarque 1. *Soit f une fonction L-Lipschitz et μ une mesure vérifiant une inégalité de Poincaré de constante C_P. On remarque que $\tilde{f} = f/L$ est 1-Lipschitz d'où*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(f - \mu f \geq R) &= \mathbb{P}_\mu(\tilde{f} - \mu\tilde{f} \geq R/L) \\
&= \mathbb{P}_\mu\left(e^{\sqrt{C_P}(\tilde{f}-\mu\tilde{f})} \geq e^{\sqrt{C_P}R/L}\right) \\
&\leq e^{-\sqrt{C_P}R/L} \int e^{\sqrt{C_P}(\tilde{f}-\mu\tilde{f})} d\mu \\
&\leq e^{-\sqrt{C_P}R/L} \frac{2\sqrt{C_P} + \sqrt{C_P}}{2\sqrt{C_P} - \sqrt{C_P}} \\
&= 3e^{-\sqrt{C_P}R/L}
\end{aligned}$$

Le même raisonnement appliqué à $-f$ qui est également L-Lipschitz donne $\mathbb{P}_\mu(f - \mu f \leq -R) \leq 3e^{-\sqrt{C_P}R/L}$ et donc

$$\mathbb{P}_\mu(|f - \mu f| \geq R) \leq \mathbb{P}_\mu(f - \mu f \geq R) + \mathbb{P}_\mu(f - \mu f \leq -R) \leq 6e^{-\sqrt{C_P}R/L}.$$

Remarque 2. *Si f est 1-Lipschitz et que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi μ vérifiant une inégalité de Poincaré de constante C_P alors*

$$\mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)\right) - \mu f\right| \geq R\right) \leq 6e^{-\sqrt{nC_P}R}. \tag{$*$}$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer la remarque précédente à $\mu^{\otimes n}$ qui vérifie également une inégalité de Poincaré de constante C_P par tensorisation et à la fonction $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$ qui est $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Lipschitz.

Cette dernière remarque traduit encore une fois la force de la propriété de tensorisation de l'inégalité de Poincaré. Notons que ce résultat est particulièrement intéressant parce qu'il n'est pas asymptotique. Par ailleurs, la décroissance en exponentielle de $\sqrt{n}$ dans ($*$) peut être améliorée en une décroissance en exponentielle de n par la méthode de Cramér-Chernoff.

3.3 Perturbation de Holley-Stroock

Proposition 6 (Perturbation de Holley-Stroock)**.** *Si μ vérifie une inégalité de Poincaré de constante C_μ et si $d\nu = e^F d\mu$ alors ν satisfait une inégalité de Poincaré de constante C_ν avec*

$$e^{-\mathrm{osc}(F)}C_\mu \leq C_\nu \leq e^{\mathrm{osc}(F)}C_\mu$$

où $\mathrm{osc}(F) := \sup F - \inf F$.

Preuve. Par la formulation variationnelle de la variance

$$\mathrm{Var}_\nu(f) = \inf_a \int (f-a)^2 d\nu \leq e^{\sup F} \inf_a \int (f-a)^2 d\mu = e^{\sup F}\mathrm{Var}_\mu(f).$$

et donc

$$\mathrm{Var}_\nu(f) \leq e^{\sup F}\mathrm{Var}_\mu(f) \leq e^{\sup F} C_\mu \int \|\nabla f\|^2 d\mu \leq e^{\sup F} C_\mu e^{-\inf F} \int \|\nabla f\|^2 d\nu.$$

On échange les rôles de μ et de ν pour obtenir l'autre inégalité. □

4 Conditions suffisantes

On présente maintenant deux conditions suffisantes pour qu'une mesure vérifie l'inégalité de Poincaré : le critère de Hardy et la condition de Lyapunov. Le critère de Hardy a l'avantage d'être également une condition nécessaire mais il n'est valable qu'en dimension un. On peut par ailleurs en déduire des conditions suffisantes faciles à vérifier en pratique. La condition de Lyapunov est valable en dimension quelconque et donne l'occasion d'introduire les semi-groupes markoviens et leurs générateurs que nous réutiliserons dans la section suivante pour faire le lien entre l'inégalité de Poincaré et la convergence de procesus de Markov.

4.1 Critère de Hardy

On présente maintenant une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une mesure vérifie l'inégalité de Poincaré sur $\mathbb{R}$ suivant [2].

Théorème 3 (Critère de Hardy)**.** *Une mesure π sur $\mathbb{R}$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité (encore notée π) strictement positive et de médiane m vérifie l'inégalité de Poincaré de constante C_P si et seulement si*

$$B_m^+ = \sup_{x\geq m}\left\{\pi([x,+\infty[)\int_m^x \frac{1}{\pi(x)}dx\right\} \text{ et } B_m^- = \sup_{x\leq m}\left\{\pi(]-\infty,x])\int_x^m \frac{1}{\pi(x)}dx\right\}$$

sont finis et dans ce cas

$$\frac{1}{2}\left(B_m^+ \vee B_m^-\right) \leq C_P \leq 4\left(B_m^+ \vee B_m^-\right).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur l'inégalité suivante due à Muckenhoupt [7].

Lemme 2 (Inégalité de Hardy)**.** *Soient μ et ν deux mesures finies absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (de densités encore notées μ et ν). On suppose de plus que la densité de ν est strictement positive. Alors la plus petite constante A pour laquelle on a pour toute f suffisamment régulière*

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 d\mu(x) \leq A\int_0^x f(x)^2 d\nu(x)$$

est finie si et seulement si

$$B := \sup_{x\geq 0}\left\{\mu([x,+\infty[)\int_0^x \frac{1}{\nu(x)}dx\right\}.$$

est fini et dans ce cas $B \leq A \leq 4B$.

Preuve. Commençons par montrer $B \leq A$ lorsque A est fini.

On applique l'inégalité à la fonction $t \mapsto \frac{1}{\nu(t)}1_{[0,r](t)}$ ce qui donne

$$\mu\left([r,+\infty[\right)\left(\int_0^r \frac{1}{\nu(t)}dt\right)^2 \leq \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x\wedge r}\frac{1}{\nu(t)}dt\right)^2 d\mu(x) \leq A\int_0^r \frac{1}{\nu(t)}dt.$$

Ce qui implique bien $B \leq A$.

Montrons maintenant $A \leq 4B$ lorsque B est fini.

On pose $g(x) = \sqrt{\int_0^x \frac{1}{\nu(t)}dt}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (écrire $f(t) = \frac{f(t)\sqrt{\nu(t)g(t)}}{\sqrt{\nu(t)g(t)}}$) et le théorème de Fubini permettent d'obtenir

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t)^2\nu(t)g(t)\left[\int_t^{+\infty}\mu(x)\left[\int_0^x \frac{1}{\nu(u)g(u)}du\right]dx\right]dt.$$

En remarquant maintenant que la définition de g et de B nous donnent

$$\int_0^x \frac{1}{\nu(u)g(u)}du = 2\int_0^x g'(u)du = 2g(x) \leq 2\sqrt{\frac{B}{\mu([x,+\infty)}}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_t^{+\infty}\mu(x)\left[\int_0^x \frac{1}{\nu(u)g(u)}du\right]dx &\leq 2\sqrt{B}\int_t^{+\infty}\frac{\mu(x)}{\sqrt{\mu([x,+\infty[)}}dx \\ &= 4\sqrt{B\mu([t,+\infty[)} \\ &\leq \frac{4B}{g(t)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 d\mu(x) \leq 4B\int_0^x f(x)^2 d\nu(x)$$

et donc $A \leq 4B$. □

Preuve du théorème 3. Montrons $C_P \leq 4(B_m^+ \vee B_m^-)$ lorsque $B_m^+ \vee B_m^-$ est fini.

On a pour toute F régulière

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\pi(F) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}(F(x)-F(m))^2 d\pi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{m}(F(x)-F(m))^2 d\pi(x) + \int_m^{+\infty}(F(x)-F(m))^2 d\pi(x) \\ &\leq A_m^-\int_{-\infty}^m F'(x)^2 d\pi(x) + A_m^+\int_m^{+\infty}F'(x)^2 d\pi(x)\end{aligned}$$

où A_m^- et A_m^+ sont les constantes de Hardy optimales pour $\mu = \nu = \pi$ sur $]-\infty, m]$ et $[m, +\infty[$ respectivement. Par le lemme on a $A_m^- \leq 4B_m^-$ et $A_m^+ \leq 4B_m^+$ on obtient donc bien $C_P \leq 4(B_m^+ \vee B_m^-)$.

On prouve maintenant $\frac{1}{2}(B_m^- \vee B_m^+) \leq C_P$ lorsque $B_m^- \vee B_m^+$ et C_P sont finis.

Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $f_\epsilon \geq 0$ telle que

$$\int_m^{+\infty} \left(\int_0^x f_\epsilon(t)dt \right)^2 d\pi(x) \geq (A_m^+ - \epsilon) \int_m^{+\infty} f_\epsilon(x)^2 d\pi(x).$$

On pose ensuite $F_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^x 1_{[m,+\infty[}(t) f_\epsilon(t)dt$ ce qui implique par le choix de la médiane que $\mu(F_\epsilon = 0) \geq \frac{1}{2}$. On a alors par Cauchy-Schwarz

$$(F_\epsilon d\pi)^2 \leq \pi(F_\epsilon > 0) \int F_\epsilon^2 d\pi.$$

En combinant tout cela avec l'inégalité de Poincaré on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(F_\epsilon) &\geq \frac{1}{2} \int F_\epsilon^2 d\pi \\
&\geq \frac{1}{2}(A_m^+ - \epsilon) \int_m^{+\infty} f_\epsilon^2 d\pi \\
&\geq \frac{1}{2}(B_m^+ - \epsilon) \int_m^{+\infty} f_\epsilon^2 d\pi \\
&\geq \frac{1}{2}(B_m^+ - \epsilon) \frac{1}{C_P} \mathrm{Var}_\pi(F_\epsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on obtient bien le résultat attendu.

Lorsque $B_m^- \vee B_m^+ = +\infty$, le même raisonnement implique $C_P = +\infty$. □

Lorsque μ admet la densité $e^{-\Phi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on peut établir des conditions suffisantes sur Φ pour que μ vérifie une inégalité de Poincaré.

Théorème 4. *Soit Φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et μ de densité $e^{-\Phi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Si Φ vérifie*

- $|\Phi'(x)| > 0$ *pour x assez grand (en valeur absolue)*
- $\frac{\Phi''(x)}{(\Phi'(x))^2} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors la mesure μ vérifie une inégalité de Poincaré si et seulement s'il existe A tel que $\frac{1}{\Phi'(x)}$ soit borné sur $\{|x| \geq A\}$.

La preuve du théorème s'appuie sur le lemme technique suivant que nous énonçons sans le démontrer.

Lemme 3. *Soit Φ de classe C^2 pour laquelle il existe un A tel que*

- $\Phi'(x)$ *ne s'annule pas quand $x \geq A$*
- $\frac{\Phi''(x)}{(\Phi'(x))^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors pour tout réel a

1. $\int_a^x e^{\Phi(t)}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\Phi(x)}}{\Phi'(x)}$
2. $\int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\Phi(x)}}{\Phi'(x)}$

Preuve du théorème 4. Soit m la médiane de μ. Nous pouvons calculer un équivalent de $B_m^+(x) := \int_m^x e^{\Phi(t)}dt \int_x^{+\infty} e^{-\Phi(t)}dt$

$$B_m^+(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\Phi(x)}}{\Phi'(x)} \cdot \frac{e^{-\Phi(x)}}{\Phi'(x)} = \frac{1}{(\Phi'(x))^2}$$

Donc il existe $A > 0$ et M tels que pour $x \geq A$ on a $B_m^+(x) \leq M$. Enfin $B_m^+(x)$ est une fonction C^0 sur $[m, A]$ et y est donc bornée. On procède de façon identique pour montrer que B_m^- est finie. □

On a ainsi obtenu des conditions suffisantes faciles à vérifier en pratique.

Remarque 3. *On peut maintenant montrer que la mesure* $\frac{1}{Z}e^{-|x|^\alpha}dx$ *où* $Z = \int e^{-|x|^\alpha}dx$ *vérifie l'inégalité de Poincaré si et seulement si* $\alpha \geq 1$ *et donc étendre considérablement notre liste d'exemples. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 4.*

4.2 Condition de Lyapunov

Afin d'établir l'inégalité de Poincaré pour une mesure, il peut être intéressant de l'interpréter comme la mesure invariante d'un semi-groupe.

On considère

- une probabilité π sur $\mathbb{R}^d$
- un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de contractions $L^2(\pi)$ préservant les constantes (ie. markovien), c'est-à-dire $P_0 = \mathrm{Id}$, $P_{t+s} = P_t P_s$, $\|P_t f\|_{L^2(\pi)} \leq \|f\|_{L^2(\pi)}$ et $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Ce semi-groupe sera également supposé être un semi-groupe de contractions $L^\infty(\pi)$ donc par interpolation dans tous les $L^p(\pi)$
- le générateur L du semi-groupe défini sur un sous-espace dense $D(L)$ de $L^2(\pi)$ comme la limite forte L^2 de $\frac{1}{t}(P_t - \mathrm{Id})$ quand $t \to 0$. La théorie nous dit alors que pour $f \in L^2$ et $t > 0$, $P_t f \in D(L)$ et vérifie
$$\frac{d}{dt}P_t f\Big|_{t=s} = LP_s f \text{ (et si } f \in D(L)) \ = P_s L f$$

On supposera

- que π est invariante, c'est-à-dire $\int Lf d\pi = 0$ pour $f \in D(L)$ et $\int P_t f d\pi = \int f d\pi$ pour $f \in L^2$ voire symétrique $\int f Lg d\pi = \int g Lf d\pi$ et $\int f P_t g d\pi = \int g P_t f d\pi$
- que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$ et qu'il existe une fonction $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ localement Lipschitz telle que
$$L(f) = \Delta f + b \cdot \nabla f$$
pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Lemme 4. *Si* π *est invariante pour* $L = \Delta + b \cdot \nabla$ *alors*
$$\int (-Lf) f d\pi = \int \|\nabla f\|^2 d\pi.$$

En particulier π *admet une inégalité de Poincaré de constante* C *si et seulement si* C *est la plus petite constante telle que*
$$\mathrm{Var}_\pi(f) \leq C \int (-Lf) f d\pi.$$

Preuve. L'invariance de π implique $\int L(f^2) d\pi = 0$ et donc
$$\int (-Lf) f d\pi = \int \frac{1}{2} L(f^2) - (Lf) f d\pi$$

or
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}L(f^2) - (Lf)f &= \frac{1}{2}\left(\Delta\left(f^2\right) + b \cdot \nabla\left(f^2\right)\right) - \left(\Delta f + b \cdot \nabla f\right) f \\
&= \frac{1}{2}\left(2f\Delta f + 2\|\nabla f\|^2 + 2f(b \cdot \nabla f)\right) - f\Delta f - f(b \cdot \nabla f) \\
&= \|\nabla f\|^2
\end{aligned}$$

□

Ceci permet de relier la constante de Poincaré de π aux valeurs propres du générateur.

Proposition 7 (Trou spectral)**.** *Si* π *est une mesure invariante pour* L *et que* π *satisfait une inégalité de Poincaré de constante* C*, alors*
$$-Lf = \lambda f \text{ avec } \lambda \neq 0 \implies \frac{1}{C} \leq \lambda$$

Preuve. Tout d'abord

$$\int f d\pi = \frac{1}{\lambda} \int (-Lf) d\pi = 0$$

et donc

$$\int f^2 d\pi = \mathrm{Var}_\pi(f) \le C \int (-Lf) f d\pi = C\lambda \int f^2 d\pi$$

d'où $\frac{1}{C} \le \lambda$. $\square$

On est également en mesure de donner une nouvelle condition suffisante pour qu'une mesure satisfasse l'inégalité de Poincaré.

Définition 4. *Soit π une mesure invariante pour le semi-groupe (P_t) de générateur $L = \Delta + b \cdot \nabla$. Une fonction de Lyapunov est une fonction $W \in D(L)$ telle que $W \ge 1$ et que*

$$LW \le -\lambda W + b\mathbf{1}_{\mathbf{K}}$$

pour des constantes $\lambda > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et un ensemble compact K.

Nous supposerons dans tout le reste de cette sous-section que π est une mesure **réversible** par rapport au générateur $L = \Delta + b \cdot \nabla$. On peut montrer que cette hypothèse est équivalente à $b = \nabla V$ pour un potentiel V et que dans ce cas $\pi(x) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)} dx$ avec $Z = \int e^{-V(x)} dx$.

La condition de Lyapunov se reformule en

$$1 \le -\frac{LW}{\lambda W} + b' \mathbf{1}_{K_R}$$

où on a posé $b' = b/\lambda$ et on a choisi $K = K_R := [-R, R]^d$ pour simplifier, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\pi(f) &\le \int (f-c)^2 d\pi \\
&\le \frac{1}{\lambda} \int (f-c)^2 \frac{-LW}{W} d\pi + b' \int (f-c)^2 \mathbf{1}_{K_R} d\pi.
\end{aligned}$$

Reste à majorer les deux dernières intégrales en fonction de $\int \|\nabla f\|^2 d\pi$.

Lemme 5. *Si π est réversible par rapport à L, on a pour toute f suffisamment régulière*

$$\int \frac{-LW}{W} f^2 d\pi \le \int \|\nabla f\|^2 d\pi$$

Preuve. On commence par remarquer que $\int (-Lf) g d\pi = \int \nabla f \cdot \nabla g d\pi$ pour toutes fonctions f et g suffisamment régulières. En effet, l'invariance de π implique $\int L(fg) d\pi = 0$ et sa réversibilité implique $\int f(Lg) d\pi = \int (Lf) g d\pi$ d'où

$$\int (-Lf) g d\pi = \int \frac{1}{2} \left(L(fg) - (Lf)g - f(Lg) \right) d\pi.$$

Finalement, un calcul montre que $\frac{1}{2} \left(L(fg) - (Lf)g - f(Lg) \right) = \nabla f \cdot \nabla g$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{-LW}{W} f^2 d\pi &= \int \nabla \left(\frac{f^2}{W} \right) \cdot \nabla W d\pi \\
&= 2 \int \left(\frac{f}{W} \right) (\nabla f \cdot \nabla W) d\pi - \int \left(\frac{f^2}{W^2} \right) \|\nabla W\|^2 d\pi \\
&= \int \|\nabla f\|^2 d\pi - \int \|\nabla f - \left(\frac{f}{W} \right) \nabla W\|^2 d\pi \\
&\le \int \|\nabla f\|^2 d\pi
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 4. *En fait, pour être totalement rigoureux, il faut faire attention à l'intégrabilité de W et de ses dérivées. On peut se passer de ce genre de vérifications en supposant tout d'abord que f est support compact et peut être approchée par une suite de fonctions à support compact lisses, par exemple $f_n = f\chi_n$ avec $\mathbf{1}_{B(0,nR)}\chi_n \leq 1$ et $\|\nabla\chi_n\| \leq 1$.*

Lemme 6 (Inégalité de Poincaré locale)**.** *Pour tout $R > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_{K_R} f^2 d\pi - \left(\int_{K_R} f d\pi\right)^2 \leq C \int_{K_R} \|\nabla f\|^2 d\pi.$$

Preuve. On a montré que la mesure uniforme sur un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiait l'inégalité de Poincaré donc, par tensorisation, la mesure uniforme sur un pavé de $\mathbb{R}^d$ vérifie également l'inégalité de Poincaré. On conclut avec la propriété de perturbation. □

Théorème 5. *S'il existe une fonction de Lyapunov alors π satisfait une inégalité de Poincaré de constante $C_P = \frac{1}{\lambda} + b'\kappa_R$ où κ_R est la constante de Poincaré de π restreinte à K_R.*

Preuve. On reprend l'inégalité

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\lambda}\int (f-c)^2 \frac{-LW}{W} d\pi + b' \int (f-c)^2 \mathbf{1}_{K_R} d\pi.$$

En appliquant les deux lemmes précédents pour le choix $c = \int_{K_R} f d\pi$ on obtient

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\lambda}\int \|\nabla f\|^2 d\pi + b'\kappa_R \int_{K_R} \|\nabla f\|^2 d\pi.$$

□

On déduit de ce qui précède des conditions suffisantes sur V pour que $\pi(x) = e^{-V(x)}dx$ avec V une fonction C^2 satisfasse une inégalité de Poincaré.

Corollaire 1.
1. *S'il existe $\alpha > 0$ et $R > 0$ tels que pour $\|x\| \geq R$*

$$\langle x, \nabla V(x)\rangle \geq \alpha\|x\|$$

   alors π satisfait une inégalité de Poincaré.
2. *S'il existe $a \in]0,1[$, $c > 0$ et $R \geq 0$ tels que pour $x \geq R$*

$$a\|\nabla V(x)\|^2 - \Delta V(x) \geq c$$

   alors π vérifie une inégalité de Poincaré.
3. *Si V est convexe, π satisfait une inégalité de Poincaré.*

Preuve.
1. Un calcul montre que $W = e^{a\|x\|}$ est une fonction de Lyapunov pour a assez petit.
2. De même, on peut montrer que $W = e^{aV}$ est une fonction de Lyapunov pour un $a \in]0,1[$ bien choisi.
3. Montrons que lorsque V est convexe on satisfait les conditions du premier point.

   Tout d'abord, la convexité de V implique la convexité de $t \mapsto g(t) = V(tx)$ et donc

$$g(1) - g(0) \leq (1-0)g'(1) \iff V(x) - V(0) \leq \langle x, \nabla V(x)\rangle.$$

   On montre maintenant qu'il existe $\alpha > 0$ et $r > 0$ tels que

$$\alpha\|x\| \leq V(x) - V(0)$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec $\|x\| \geq r$.
   On s'intéresse à l'ensemble de niveau $A = \{V(x) \geq V(0)+1\}$. Cet ensemble est convexe, d'intérieur non vide (car V est C^0 en 0) et $\mathrm{Leb}(A) \leq e^{V(0)+1}\int_A e^{-V}dx < +\infty$.

   Donc A est borné, en effet si $B(0,r') \subset A$ et $a \in A$ alors on a que $C_a := \mathrm{cvx}(\{a\} \cup B(0,r')) \subset A$ par convexité, où cvx dénote l'enveloppe convexe. Comme $\mathrm{Leb}(C_a)$ croît linéairement avec $\|a\|$, ceci implique que A est borné.

   Donc il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0, r-1)$. Soit u tel que $\|u\| = r$, ce qui implique $u \notin A$ et donc $V(u) \geq V(0)+1$. De plus, V étant convexe, $t \mapsto \frac{1}{t}(V(tu) - V(0))$ est croissante, ce qui amène $V(x) - V(0) \geq \|x\|/r$ dès que $\|x\| \geq r$.

□

5 Convergence de diffusions de Langevin-Kolmogorov

Soient (P_t) le semi-groupe, L le générateur et π la mesure invariante associés à un champ de vecteurs b comme dans la section précédente. Il existe un processus stochastique (X_t) appelé 'diffusion de Langevin-Kolmogorov' qui possède la propriété suivante

$$\mathrm{Loi}(X_0) = \mu \implies \mathrm{Loi}(X_t) = \mu P_t$$

où $\int f d(\mu P_t) := \int (P_t f) d\mu$.

On ne cherchera pas ici à décrire précisément et encore moins à construire ces procesus stochastiques, on se contentera de poser la question de l'éventuelle convergence de $\mathrm{Loi}(X_t) = \mu P_t$ vers la mesure invariante π.

Théorème 6. *Soient (P_t), L et π associés au champ de vecteurs b. Il y a équivalence entre*

(1) il existe C_P telle que pour tout $f \in l^2(\pi)$

$$Var_\pi(f) \leq C_P \mathcal{E}(f) \text{ où } \mathcal{E}(f) := \int \|\nabla f\|^2 d\pi$$

(2) pour toute $f \in l^2(\pi)$

$$\|P_t f - \pi f\|_2^2 = Var_\pi(P_t f) \leq e^{-2t/C_P} Var_\pi(f)$$

Si π est symétrique, $\frac{d(\mu P_t)}{d\pi} = P_t\left(\frac{d\mu}{d\pi}\right)$ et les deux points précédents sont équivalents à

(3) pour toute mesure $\mu = h\pi$ avec $h \in l^2(\pi)$

$$\|P_t h - 1\|_{L^2(\pi)} \leq C_\mu e^{-t/K_P}$$

La preuve s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 7. *On a*

$$\|f\|^2_{L^2(\pi)} - \|P_t f\|^2_{L^2(\pi)} = 2\int_0^t \mathcal{E}(P_s f, P_s f) ds.$$

*Si de plus π est symétrique, $t \mapsto \log \|P_t f\|_{L^2(\pi)}$ est **convexe**.*

Preuve. On écrit

$$\frac{d}{dt}\pi((P_t f)^2) = 2\pi(P_t f L P_t f)$$

la dérivation sous le signe somme étant autorisée parce que $LP_t f$ est la dérivée forte de $P_t f$ dans $L^2(\pi)$.

Si π est symétrique, posons $n(t) = \|P_t f\|^2_{L^2(\pi)}$. On calcule la dérivée seconde de $\log n$ dont le signe est donné par le signe de $n''n - (n')^2$. Mais

$$\frac{d}{dt}n(t) = 2\pi(P_t f L P_t f)$$

et

$$\frac{d^2}{dt^2}n(t) = 2\pi((LP_t f)^2) + 2\pi(P_t f L P_t L f) = 4\pi((LP_t f)^2)$$

en utilisant la symétrie de L par rapport à π. Le résultat est donc une conséquence directe de Cauchy-Schwarz. □

Preuve du théorème 6. Pour (1) $\implies$ (2) on part de l'inégalité $\mathrm{Var}_\pi(P_t f) \leq e^{-\beta t}\mathrm{Var}_\pi(f)$ et calcule un équivalent lorsque $t \to 0$ pour les deux membres.

Pour (2) $\implies$ (1) on remarque que si Poincaré a lieu

$$\|P_t f\|^2_{L^2(\pi)} = \|f\|^2_{L^2(\pi)} - 2\int_0^t \mathcal{E}(P_s f, P_s f) ds \leq \|f\|^2_{L^2(\pi)} - \frac{2}{C_P}\int_0^t \mathrm{Var}_\pi(P_s f) ds$$

Ce qui appliqué à $\tilde{f} = f - \int f d\pi$ donne

$$\mathrm{Var}_\pi(P_t f) \leq \mathrm{Var}_\pi(f) - \frac{2}{C_P}\int \mathrm{Var}_\pi(P_s f) ds$$

et donc on obtient (1) par Gronwall.

Pour (2) $\implies$ (3) il suffit de remarquer $\|P_t h - 1\|^2_{L^2(\pi)} = \mathrm{Var}_\pi(P_t h)$.

Montrons finalement pour (3) $\implies$ (2) lorsque π est symétrique. Pour f bornée, centrée ($\pi f = 0$) et non identiquement nulle, on pose $h_\pm = f_\pm / \pi f_\pm$ et on écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\pi(P_t f) &\le 2\mathrm{Var}_\pi(P_t f_+) + 2\mathrm{Var}_\pi(P_t f_-)\\ &\le 2\|f\|^2_\infty \left(\mathrm{Var}_\pi(P_t h_+) + \mathrm{Var}_\pi(P_t h_-)\right)\\ &\le 2\|f\|^2_\infty \left(\mathrm{Var}_\pi(f_+) + \mathrm{Var}_\pi(f_-)\right) e^{-t/K_P}\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \log\left(\|P_t f\|^2_{L^2(\pi)}\right) + \frac{t}{K_P}$ est convexe (en tant que somme de fonctions convexes) et bornée par ce qui précède. Une telle fonction est nécessairement décroissante. On en déduit que

$$\|P_t f\|^2_{L^2(\pi)} \le e^{-t/K_P} \|P_0 f\|^2_{L^2(\pi)} \le e^{-t/K_P} \|f\|^2_{L^2(\pi)}$$

et la preuve est terminée pour f bornée. On étend ensuite facilement le résultat en approchant les fonctions L^2 par des fonctions bornées. $\square$

Ce résultat peut être amélioré en une convergence en variation totale vers la mesure invariante. Notons de plus qu'il existe un résultat analogue pour une forme faible de l'inégalité de Poincaré qui permet d'établir des vitesses de convergence non exponentielles.

6 Conclusion

L'inégalité de Poincaré permet la résolution d'équations aux dérivées partielles, la minoration des valeurs propres d'opérateurs différentiels et l'obtention de vitesses de convergence explicites pour des diffusions de Langevin-Kolmogorov. Ceci motive fortement la recherche de conditions suffisantes pour qu'une mesure satisfasse cette inégalité comme le critère de Hardy et les conditions de Lyapunov. Il est intéressant de noter que la classe des processus de Markov dont on peut étudier la convergence grâce à des avatars de l'inégalité de Poincaré est plus large que les diffusions de Langevin-Kolmogorov et inclut par exemples les chaînes de Markov et les processus de sauts.

Références

[1] Grégoire Allaire. À la recherche de l'inégalité perdue. *Matapli*, 98:52–64, 2012.

[2] Cécile Ané, Sébastien Blachère, Djalil Chafaï, Pierre Fougères, Ivan Gentil, Florent Malrieu, Cyril Roberto, and Grégory Scheffer. Sur les inégalités de sobolev logarithmiques. *Panoramas et Synthèses*, 10, 2000.

[3] Dominique Bakry, Ivan Gentil, and Michel Ledoux. *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Springer, Paris, 2014.

[4] Sergey Bobkov and Michel Ledoux. Poincaré's inequalities and talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution. *Probab. Theory Related Fields*, 107(3):383–400, 1997.

[5] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Éditions Dunod, Paris, 1999.

[6] Jean Mawhin. Henri poincaré et les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. In *L'héritage scientifique de Poincaré*. Belin, Paris, 2006.

[7] Benjamin Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44:31–38, 1972.

[8] Henri Poincaré. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *American J. Math.*, 12:211–294, 1890.

[9] Henri Poincaré. Sur les équations de la physique mathématique. *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 8:57–155, 1894.

[10] Henri Poincaré. La méthode de neumann et le problème de dirichlet. *Acta mathematica*, 20:59–142, 1897.