Le Chaos Multiplicatif Gaussien : caractère multifractal et lien avec le CβE

Elie Khalfallah

Octobre 2021*

Introduite en 1985 par Jean-Pierre Kahane dans [5], la théorie des Chaos Multiplicatifs Gaussiens (GMC) vise à définir et étudier des mesures aléatoires M_γ dont la densité s'écrit formellement

$$M_\gamma(dx) = e^{\gamma X(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X(x)^2]}\sigma(dx), \tag{1}$$

où σ est une mesure de référence sur un domaine T de $\mathbb{R}^d$, typiquement la mesure de Lebesgue, $\gamma \in]0, \sqrt{2d}[$ et X un champ gaussien *généralisé*. Contrairement aux champs gaussiens continus, les champs X que nous étudierons ne seront pas définis ponctuellement sur T, et c'est pourquoi le sens rigoureux de (1) reste à expliciter. Dans sa théorie originale, Kahane imposait que le noyau de X soit de type $\sigma-$positifs, c'est-à-dire qu'il s'écrive comme une somme dénombrable de noyaux. Par une approche entre autre historique, nous présentons dans la section 1 comment définir rigoureusement $M_\gamma(dx)$ dans le cadre plus général des champs gaussiens log-corrélés, posé notamment par Berestycki dans [1]. La section 2 décline quelques propriétés fondamentales du GMC.

Notre étude portera ensuite sur des ensembles qui supportent les mesures M_γ. Rhodes et Vargas montrent dans [8] (Théorème 4.1) que les points $x \in T$ ayant une certaine *épaisseur* constituent un support de M_γ. Ils donnent ensuite, avec une preuve seulement esquissée, les dimensions de Hausdorff de ces ensembles ([8], Théorème 4.2), révélant ainsi le caractère multifractal du GMC. Je présenterai ces résultats dans la section 3, et donnerai une idée de preuve.

Enfin, la dernière section offre un éclairage plus général sur le GMC et son caractère multifractal. J'y expose les grandes idées de l'article [2] de Chhaibi et Najnudel qui établit, dans un cas particulier et à renormalisation près, l'égalité en loi du GMC avec le CβE.

Remerciements. Je tiens à remercier vivement Paul Bourgade et Ofer Zeitouni, mes directeurs de mémoires, respectivement de Master 1 et 2, d'avoir accompagné et guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche.

*Introduction au domaine de recherche, mémoire de diplôme de l'ENS Paris

1 La construction du GMC et son histoire

Nous présentons d'abord un modèle de Mandelbrot qui, en plus d'être historiquement l'ancêtre du chaos multiplicatif gaussien, en est une bonne approximation (voir l'idée de preuve de la Proposition 2.1). C'est sans doute aussi le plus simple modèle probabiliste à présenter un caractère multifractal. Nous construirons ensuite le GMC en suivant la méthode proposée en 2017 par Berestycki.

1.1 Les cascades multiplicatives de Mandelbrot [1]

En 1976, Kahane et Peyrière étudient dans [4] une suite $(\mu_n)_n$ de mesures sur $[0,1[$ définie de la façon suivante. Considérons W une variable aléatoire strictement positive d'espérance 1 et, pour $n \geq 0$ et $1 \leq j \leq 2^n$, notons $I_n^j = [2^{-n}(j-1), 2^{-n}j[$ le j-ième intervalle dans la décomposition n-dyadique de $[0,1[$. À chacun de ces intervalles, associons une variable W_n^j de sortes que les $\{W_n^j\}_{j,n}$ soient i.i.d. et de même loi que W. On définit alors μ_n comme la mesure (aléatoire) ayant pour densité par rapport à Lebesgue :

$$\frac{d\mu_n}{d\mu} = W_0^{j_0(x)} W_1^{j_1(x)} \dots W_n^{j_n(x)} \tag{2}$$

où $j_n(x)$ dénote l'unique $j \in [\![1, 2^n]\!]$ tel que $x \in I_n^j$ et μ la mesure de Lebesgue.

Cette suite de mesure, déjà introduite en 1974 par Mandelbrot, s'apparente à une "martingale à valeur dans les mesures" par le lemme immédiat suivant :

Lemme 1.1. *Pour tout borélien A de $[0,1]$, la suite de variables aléatoires $\mu_n(A)$ est une martingale, qui converge presque sûrement vers une limite $\mu_W(A)$. De plus, μ_W est p.s. une mesure.*

Se pose alors la question de l'uniforme intégrabilité de ces martingales, question à laquelle Kahane et Peyrière ont répondu par une condition nécessaire et suffisante :

Theorème 1.2. *Pour tout A borélien de $[0,1]$, la martingale $\mu_n(A)$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $\mathbb{E}[W \ln W] < \ln 2$. Dans ce cas, $\mathbb{E}[\mu_W(A)] = \mu(A)$. Sinon, μ_W est p.s. la mesure nulle.*

Enfin, Kahane et Peyrière mettent en évidence le caractère multifractal de leur modèle :

Theorème 1.3. *Supposons que $\mathbb{E}[W \ln W] < \ln 2$, et de plus que $\mathbb{E}[\mu_W([0,1]) \ln \mu_W([0,1])] < \infty$. Alors pour μ_W-presque tout $x \in [0,1]$,*

$$-\frac{\ln \mu_W(I_n^{j_n(x)})}{n \ln 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \mathbb{E}[W \log_2 W] := D$$

1. Les notations et résultats de cette sous-section ne seront pas utilisés explicitement dans la suite, mais permettent par analogie de mieux comprendre le GMC.

Pour expliquer ce que nous entendons par "multifractal" et faire le lien avec le GMC introduit après, considérons maintenant le cas particulier *gaussien*, c'est-à-dire où W est de la forme $W = W_\lambda := e^{\lambda g - \lambda^2/2}$, où g est une variable gaussienne centrée réduite et λ un paramètre positif. Heuristiquement, le théorème 1.3 affirme que $\mu_{W_\lambda}(I_n^{j_n(x)}) \approx 2^{Dn}$, où $D := D_\lambda$ dépend du paramètre λ. Un résultat classique permet par ailleurs d'obtenir que :

Corollaire 1.4. *Sous les hypothèses du théorème 1.3, μ_W a pour dimension de Hausdroff D, c'est-à-dire que l'infimum des dimensions de Hausdorff de ses supports vaut D.*

Les supports de μ_{W_λ} constituent dès lors un *spectre* de parties de $[0,1]$, dont les dimensions de Hausdorff varient continument avec le paramètre λ : c'est cela qu'on appelle la *multifractalité*.

Voyons maintenant en quoi ce modèle entre dans le cadre des mesures de forme (1) que nous nous sommes proposé d'étudier. Dans le cas gaussien toujours, la densité de μ_n par rapport à Lebesgue (2) a même loi que $e^{\lambda X_t - \mathbb{E}[X_t^2]\lambda^2/2}$, où X_t est le champ gaussien sur $[0,1]$ de covariance $\mathbb{E}[X_t X_s] = \max\{k \in [\![1,n]\!], \exists j \in [\![1,2^k]\!], s,t \in I_k^j\}$. Cette covariance a plusieurs inconvénients :

— Elle n'est pas continue ;

— Sa définition est trop "rigide" (elle repose sur la décomposition dyadique de $[0,1]$) ;

— Si on remplace μ_n par la mesure à densité $e^{\lambda Y_t - \mathbb{E}[Y_t^2]\lambda^2/2}$, où Y_t est un champ gaussien de covariance de la forme $\mathbb{E}[Y_t Y_s] = \mathbb{E}[X_t X_s] + O(1)$, on sort du cadre du théorème 1.2 et on ne peut rien dire.

Le GMC construit ci-dessous permet de dépasser ces difficultés.

1.2 Le Chaos Multiplicatif Gaussien

Soit $d \in \mathbb{N}$, $T = [0,1]^d$ et $\gamma \in]0, \sqrt{2d}[$. Considérons sur T un noyau défini positif K log-corrélé, c'est-à-dire de la forme, pour tout $x, y \in T$,

$$K(x,y) = \log \frac{1}{|x-y|} + g(x,y), \tag{3}$$

où g est une fonction continue sur $T \times T$. Par *défini positif*, nous entendons que pour toute fonction $\phi \in C^\infty(T)$,

$$\int_T \int_T K(x,y)\phi(x)\phi(y)dxdy \geq 0.$$

Nous pouvons à présent définir le processus gaussien centré X sur $C^\infty(T)$ ayant pour covariance

$$\mathbb{E}[X(f)X(g)] = \int_{T\times T} K(x,y)f(x)g(y)dxdy. \tag{4}$$

Un tel processus est bien défini : en effet, cette covariance est de type positif [2] et symétrique, et il en découle que le processus X est bien défini par l'équation (4), d'après le Théorème 1.7 de [3].

Le champ X est appelé **champ gaussien généralisé sur T de noyau K**. Bien qu'il ne soit pas défini ponctuellement sur T, une procédure de régularisation permet de l'approcher par des champs gaussiens continus sur T. Nous écrirons dorénavant $\int X(x)f(x)dx := X(f)$, par abus de notation.

1.2.1 Régularisation de X

Considérons une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B(0,1)$ (la boule unité de $\mathbb{R}^d$) et d'intégrale 1, et posons $\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\theta(\frac{x}{\epsilon})$. On définit X_ϵ comme le champ gaussien (continu) sur T :

$$X_\epsilon(x) := X * \theta_\epsilon(x) = \int X(y)\theta_\epsilon(x-y)dy.$$

Nous pouvons alors vérifier que pour tout $\eta < \epsilon$, $x, y \in T$,

$$\mathbb{E}[X_\epsilon(x)X_\eta(y)] = \ln_+ \frac{1}{|x-y|+\epsilon} + O(1). \tag{5}$$

1.2.2 Construction par Berestycki du Chaos Multiplicatif Gaussien (GMC)

Pour $\epsilon > 0$, on considère la mesure aléatoire sur T définie par $M_{\gamma,\epsilon}(x) = e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_\epsilon^2]}dx$. Le GMC est défini par le théorème suivant, montré dans [1] par Berestycki :

Theorème 1.5. *Supposons que $\gamma < \sqrt{2d}$. Alors quand $\epsilon \to 0$, $M_{\gamma,\epsilon}$ converge en probabilité (pour la topologie de la convergence faible) vers une mesure sur T, notée M_γ et appelée Chaos Multiplicatif Gaussien (GMC) sur T de noyau K et de paramètre γ.*

Nous concluons cette section par une remarque historique importante.

1.3 Construction du GMC dans le cas d'un noyau σ-positif (Kahane)

La construction de Berestycki ne date que de 2017 [3]. Dans son article [5] de 1985, Kahane avait proposé une première construction pour le cas particulier des champs log-correlés (i.e. de la forme (3)) qui vérifient de plus la propriété de σ-positivité suivante :

2. c'est-à-dire que si, pour tout $1 \leq i \leq n$, f_i est dans $C^\infty(T)$, alors

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_{T\times T} K(x,y) f_i(x) f_j(y) dx dy \geq 0$$

3. Une construction proche avait été proposée par Shamov l'année précédente, voir [10].

Définition 1.6. *On appelle noyau σ-positif une fonction de $[0,1]^2$ de la forme*

$$R(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(s,t)$$

où les $R_i(s,t)$ sont des noyaux continus, strictement positifs et positivement définis.

Ce modèle constitue une étape intermédiaire cruciale ente les cascades multiplicatives et le chaos multiplicatif qui, au-delà de son importance historique, joue un rôle clef pour démontrer certaines propriétés du GMC (voir proposition 2.1).

2 Quelques propriétés fondamentales du GMC

La masse totale du GMC est presque sûrement finie. En fait, elle admet même un certain nombre de moments positifs, ainsi que tous ses moments négatifs :

Proposition 2.1. *Soit $\gamma < \sqrt{2d}$ et M_γ défini comme ci-dessus. Alors $\mathbb{E}[M_\gamma(O)^q] < \infty$ si, et seulement si, $q \in]-\infty, \frac{2d}{\gamma^2}[$.*

Idée de preuve. La preuve proposée dans [9] (Proposition 3.6) procède en trois étapes :

1. On montre "à la main" le résultat analogue pour les cascades de Mandelbrot ;
2. On en déduit le résultat dans le cas d'un certain noyau sigma-positif fixé ;
3. On en déduit le résultat pour tout noyau log-corrélé.

□

Pour les deuxième et troisième étapes de la preuve précédente, l'outil fondamental est le même : **l'inégalité de Kahane**. Il s'agit d'une conséquence du lemme de Slepian (dit de *comparaison gaussienne*), sur laquelle repose toute la théorie du GMC :

Lemme 2.2. *Soient $(X(u))_{u\in T}$ et $(Y(u))_{u\in T}$ deux champs gaussiens centrés continus sur T tels que*

$$\forall u, u' \in T, \mathbb{E}[X(u)X(u')] \leq \mathbb{E}[Y(u)Y(u')].$$

Alors pour toute fonction convexe $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[F\left(\int_T e^{X(u)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[X(u)^2]}du\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[F\left(\int_T e^{Y(u)-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Y(u)^2]}du\right)\right].$$

(Cette version continue de l'inégalité de Kahane est présentée dans [9], Corollaire A.2)

Voyons maintenant la propriété d'*invariance d'échelle* :

Définition 2.3. *La fonction de structure du GMC est définie pour $p \in \mathbb{R}$ par $\zeta_p = (d + \frac{\gamma^2}{2})p - \frac{\gamma^2 p^2}{2}$. On pose p_* l'unique $p > 1$ tel que $\zeta_p = d$, i.e. $p_* = \frac{2d}{\gamma^2}$.*

Proposition 2.4 (Invariance d'échelle)**.** *Soit $\gamma^2 < 2d$, $x \in T$ et $p \in]-\infty, p_*[$. Alors il existe $C = C(x, p) > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[M_\gamma(B(x,r))^p] \underset{r\to 0}{\sim} C r^{\zeta_p}.$$

Ainsi, contrairement aux mesures dites *unifractales*, dont la fonction de structure est linéaire (c'est le cas pour la mesure de Lebesgue par exemple), celle du GMC possède un terme quadratique. Il s'agit donc, au même titre que le théorème 1.3, d'un phénomène *multifractal*. Nous déclinons dans la section suivante d'autres manifestations du caractère multifractal du GMC.

3 Un théorème de multifractalité

3.1 Dimension de Hausdorff du spectre multifractal

Définissons

$$\overline{K}_{\gamma,q} = \{t \in T | \lim_{\epsilon \to 0} \frac{X_\epsilon(t)}{-\ln \epsilon} = \gamma q\}.$$

Les éléments de cet ensemble sont appelés *points d'épaisseur* $\alpha = \gamma q$, et on parlera d'*épaisseur du champ*. Posons également

$$K_{\gamma,q} = \{t \in T | \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln M_\gamma(B(t,\epsilon))}{\ln \epsilon} = \beta\}$$

où $\beta = d + (\frac{1}{2} - q)\gamma^2$, et appelons *points d'épaisseur* (γ, β) ses éléments. On parlera alors d'*épaisseur de la mesure*.

Remarque 3.1. *Heuristiquement, $K_{\gamma,q}$ est constitué des $x \in T$ pour lesquels $M_\gamma(B(x,\epsilon)) \underset{\epsilon\to 0}{\approx} \epsilon^{d+(\frac{1}{2}-q)\gamma^2}$.*

Ces ensembles se révèlent être des supports du GMC :

Theorème 3.2. *Pour $\gamma^2 < 2d$ et $q \in]0, \frac{\sqrt{2d}}{\gamma}[$, $K_{\gamma,q}$ et $\overline{K}_{\gamma,q}$ sont des supports de $M_{q\gamma}$, i.e. $M_{q\gamma}({}^c K_{\gamma,q}) = M_{q\gamma}({}^c \overline{K}_{\gamma,q}) = 0$.*

Preuve. Voir [8], Théorème 4.1. □

Le caractère multifractal du GMC se révèle à travers les deux théorèmes suivants :

Theorème 3.3. *Soit $\gamma^2 < 2d$ et $q \in]0, \frac{\sqrt{2d}}{\gamma}[$. Alors presque sûrement, $\overline{K}_{\gamma,q}$ a pour dimension de Hausdorff $d - \frac{\gamma^2 q^2}{2}$.*

Theorème 3.4. *Soit $\gamma^2 < 2d$ et $q \in]0, \frac{\sqrt{2d}}{\gamma}[$. Alors presque sûrement, $K_{\gamma,q}$ a pour dimension de Hausdorff $d - \frac{\gamma^2 q^2}{2}$.*

Remarque 3.5. *Dans les notes de cours d'Ofer Zeitouni [12], les lemmes 15 et 16 montrent que la dimension de Hausdorff de M_γ (définie comme l'infimum des dimensions de Hausdorff des supports de M_γ) est précisément $d - \frac{\gamma^2}{2}$. Joint aux théorèmes 3.3 et 3.4, ce résultat prouve que $K_{\gamma,q}$ et $\overline{K}_{\gamma,q}$ sont des supports minimaux (au sens de la dimension de Hausdorff) de $M_{q\gamma}$.*

3.2 Preuve des bornes inférieures des Théorèmes 3.3 et 3.4

D'après le Théorème 3.2, presque sûrement, $K_{\gamma,q}$ et $\overline{K}_{\gamma,q}$ sont supports de la mesure $M_{\gamma q}$, dont la dimension de Hausdorff vaut $d - \frac{\gamma^2 q^2}{2}$ d'après la remarque 3.5. Il en résulte que, presque sûrement, $K_{\gamma,q}$ et $\overline{K}_{\gamma,q}$ ont une dimension de Hausdorff valant au moins $d - \frac{\gamma^2 q^2}{2}$.

3.3 Esquisse des preuves des bornes supérieures

Borne supérieure du Théorème 3.3

Considérons l'heuristique suivante :

$$M_\gamma(B(x,r)) \underset{r\to 0}{\approx} r^d e^{\gamma X_r(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_r(x)^2]}. \tag{6}$$

Si $x \in \overline{K}_{\gamma,q}$, de cette heuristique appliquée à $\gamma \leftarrow q\gamma$ et du fait que $X_{2^{-n}}(x) \underset{n\to\infty}{\approx} \gamma q \ln 2^n$ il découle que

$$M_{q\gamma}(B(x, 2^{-n})) \underset{n\to\infty}{\approx} 2^{(-d+\frac{\gamma^2 q^2}{2})n}.$$

Etant donnés cette estimation et le fait que $M_{q\gamma}(T)$ est p.s. fini, il est aisé d'en déduire une borne sur la dimension de Hausdorff.

Borne supérieure du Théorème 3.4

En première approximation, $x \in K_{\gamma,q}$ signifie que $M_\gamma(B(x,\epsilon)) \underset{\epsilon\to 0}{\approx} \epsilon^{d+(\frac{1}{2}-q)\gamma^2}$. Or d'après l'heuristique (6), ceci est grossièrement équivalent à $X_\epsilon(x) \underset{\epsilon\to 0}{\approx} -\gamma q \ln \epsilon$ et donc à $x \in \overline{K}_{\gamma,q}$. Nous aurions ainsi que $K_{\gamma,q} \approx \overline{K}_{\gamma,q}$.
Plus précisément, une preuve consiste à décomposer

$$K_{\gamma,q} = \bigsqcup_{q'} K_{\gamma,q} \cap \overline{K}_{\gamma,q'}.$$

Du Théorème 3.3, il découlera que $\dim K_{\gamma,q} \cap \overline{K}_{\gamma,q'} \leq \dim \overline{K}_{\gamma,q'} \leq d - \frac{\gamma^2 q'^2}{2}$ et donc dans le cas où $q' \geq q$,

$$\dim K_{\gamma,q} \cap \overline{K}_{\gamma,q'} \leq d - \frac{\gamma^2 q^2}{2}. \tag{7}$$

Dans le cas où $q' < q$, cette dernière inégalité reste vérifiée. Ce cas-ci est plus difficile : cette dissymétrie s'explique par le fait que $M_\gamma(T)$ admet des moments négatifs finis de tout ordre, mais que ses moments positifs ne sont finis que jusqu'à l'ordre $\frac{2d}{\gamma^2}$ (voir Proposition 2.1).

Remarque 3.6. *L'inégalité (7) est un moyen un peu indirect de traduire mathématiquement l'heuristique $K_{\gamma,q} \approx \overline{K}_{\gamma,q}$. Comprendre plus précisément la nature du lien entre ces deux ensembles reste une question ouverte.*

4 Sur un résultat de Chhaibi et Najnudel

Nous donnons enfin une autre approche possible pour étudier le GMC, et en particulier son caractère multifractal. Ce point de vue est rendu possible par [2] publié en 2019 par Chhaibi et Najnudel. En l'état, il ne concerne que le GMC sur le cercle unité et pour un noyau très précis (et non pas dans $\mathbb{R}^d$ et à constante près comme dans ce qui précède). Néanmoins, je mentionnerai une réponse de Reda Chhabi à une question d'Ofer Zeitouni laissant espérer des résultats plus généraux.

Chhaibi et Najnudel ont donc montré dans [2] qu'à renormalisation près, le GMC sur le cercle unité suit la même loi que le Circular Beta Ensemble (CβE), un objet issu de la théorie des matrices aléatoires. En particulier, grâce à leur résultat, montrer le caractère multifractal du GMC sur le cercle unité devient maintenant équivalent à montrer celui du CβE, ce qui offre ainsi un nouvel éclairage intéressant sur les théorèmes de 3.3 et 3.4 présentés ci-dessus.

4.1 Définition du GMC sur le cercle unité

Soit $\gamma > 0$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Considérons le champ log-corrélé gaussien sur $\mathbb{D}$

$$G(z) = 2\Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k}} \mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$$

où $\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$ est une suite de variables i.i.d. gaussiennes complexes standard.

Définissons GMC_r^γ comme la mesure aléatoire sur $\partial\mathbb{D}$ à densité par rapport à Lebesgue $e^{\gamma G(re^{i\theta})}(1-r^2)^{\gamma^2}$. Dans le régime sous-critique ($\gamma < 1$), le chaos multiplicatif gaussien sur le cercle unité est défini comme la limite faible de ces mesures quand $r \to 1$ ([2], Theorem 1.3) :

Theorème 4.1. *Pour $\gamma < 1$, il existe une distribution GMC^γ sur $\partial\mathbb{D}$ telle que, pour toute fonction positive $f \in C^\infty(\partial\mathbb{D})$,*

$$GMC_r^\gamma(f) \xrightarrow[r\to 1]{L^1} GMC^\gamma(f).$$

Afin de définir le $C\beta E$, nous avons besoin d'introduire l'homéomorphisme de Verblunsky.

4.2 L'homéomorphisme de Verblunsky

Soit μ une mesure de probabilité sur $\partial\mathbb{D}$, et m le cardinal (fini ou non) de son support. Soient $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ les polynômes unitaires obtenus en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $1, z, z^2, \dots$ dans $L^2(\mu)$ (dans le cas où m est fini, la suite s'arrête à Φ_{m-1} : on définit alors $\Phi_m(z) = \prod_{\lambda \in Supp(\mu)}(z-\lambda)$). Appelons ces polynômes les OPUC (Orthogonal Polynomials on the Unit Circle) associés à μ et posons $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\overline{z})}$.

Nous pouvons alors montrer ([11], Théorème 1.5.2 p.56) qu'il existe des coefficients $(\alpha_n)_{0 \leq n < m}$, dits *de Verblunsky*, tels que pour $0 \leq n < m-1$, $\alpha_n \in \mathbb{D}$, et dans le cas où m est fini, $\alpha_{m-1} \in \partial\mathbb{D}$, qui vérifient :

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \tag{8}$$

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - \alpha_n z \Phi_n(z). \tag{9}$$

Les équations (8) et (9) sont appelées les *relations de récurrence de Szegö*. Le théorème de Verblunsky ([11], Theorem 1.7.11) stipule que les coefficients de Verblunsky déterminent μ de façon bijective, et même homéomorphe. Nous donnons ici la version de Chhaibi et Najnudel, qui inclut le cas des mesures à support fini ([2], Theorem 1.1) :

Theorème 4.2 (Théorème de Verblunsky)**.** *Soit $\mathcal{M}_1(\partial\mathbb{D})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\partial\mathbb{D}$ muni de la topologie faible, et soit*

$$\mathcal{D} := \mathbb{D}^{\mathbb{N}} \sqcup (\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}^n \times \partial\mathbb{D})$$

muni de la topologie associée à la convergence terme à terme. Alors l'application

$$\mathbb{V} : \mathcal{M}_1(\partial\mathbb{D}) \to \mathcal{D},$$

qui à une mesure μ associe sa suite $(\alpha_n)_n$ de coefficients de Verblunsky, est un homéomorphisme. De plus, pour $m \in \mathbb{N}^*$, l'image par $\mathbb{V}$ de l'ensemble des mesures à support de taille m est $\mathbb{D}^{m-1} \times \partial\mathbb{D}$.

Remarque 4.3. *Dans le cas où μ est à support fini m, Φ_m est appelé le "dernier OPUC de μ" et l'ensemble de ses racines est par définition le support de μ.*

4.3 Définition du $C\beta E$ par ses coefficients de Verblunsky

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la loi de α_j soit invariante par rotation, et que $|\alpha_j|^2$ soit indépendant de la phase de α_j et suive une loi Beta de paramètre 1 et $\beta_j := \frac{\beta(j+1)}{2}$ i.e. :

$$\mathbb{P}(|\alpha_j|^2 \in dx) = \beta_j (1-x)^{\beta_j - 1} \mathbb{1}_{0<x<1} dx.$$

On définit alors le $C\beta E$ comme la mesure de probabilité aléatoire sur $\partial\mathbb{D}$ donnée par $\mu^\beta := \mathbb{V}^{-1}(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$.

Voici une autre définition, sans doute plus intuitive, du $C\beta E$

Remarque 4.4. *Soient* $(e^{i\theta_j})_{1\leq j\leq n}$ *n points de* $\partial\mathbb{D}$ *tirés selon la loi*

$$\frac{1}{Z_{n,\beta}}\prod_{1\leq k<l\leq n}|e^{i\theta_k}-e^{i\theta_l}|^\beta d\theta_1\dots d\theta_n.$$

On définit le $C\beta E_n$ *comme la mesure aléatoire sur* $\partial\mathbb{D}$

$$C\beta E_n=\sum_{j=1}^n \pi_j\delta_{e^{i\theta_j}}$$

où δ_x *est le Dirac en* x *et les* π_j *sont des poids aléatoires dont la loi est délicate à expliciter. Alors Killip et Nenciu ont montré dans [6] que ces mesures convergent faiblement vers le* $C\beta E$.

4.4 Le résultat

Chhaibi et Najnudel ont montré dans [2] que sous les régimes sous-critique ($\gamma\in]0,1[$) et critique ($\gamma=1$), le GMC^γ renormalisé en une mesure de probabilité (aléatoire) sur $\partial\mathbb{D}$ est égal en loi à μ^β pour $\gamma=\sqrt{\frac{2}{\beta}}$.

Remarque 4.5. *Un résultat analogue dans le domaine sur-critique (*$\gamma>1$*) est encore un problème ouvert.*

4.5 Et dans $\mathbb{R}^d$?

La preuve de Chhaibi et Najnudel repose sur l'approximation de Bernstein-Szegö, un outil spécifique au cercle unité qui stipule que les mesures

$$\mu_n^\beta(d\theta):=\frac{d\theta}{2\pi}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1-|\alpha_j|^2)}{|\Phi_n^*(e^{i\theta})|^2} \tag{10}$$

convergent faiblement vers le $C\beta E$. D'après un échange de Chhaibi avec Ofer Zeitouni, des travaux sont en cours pour généraliser ce résultat à la droite réelle (voir par exemple les recherches de Gamboa, Rouault ou Nagel). Un résultat encourageant est la formule (4.3) du théorème 4.2 de [7].

Références

[1] Nathanaël Berestycki. An elementary approach to gaussian multiplicative chaos. *Electronic communications in probability*, 22, no. 27 :1–12, 2017.

[2] Reda Chhaibi and Joseph Najnudel. On the circle, $gmc^\gamma=\varprojlim c\beta e_n$ for $\gamma=\sqrt{\frac{2}{\beta}}$, $(\gamma\leq 1)$, 2019.

[3] Jean-François Le Gall. Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. *Université Paris-Sud.*

[4] J.-P Kahane and J Peyrière. Sur certaines martingales de benoit mandelbrot. *Advances in Mathematics*, 22(2) :131–145, 1976.

[5] Jean-Pierre Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9 no.2 :105–150, 1985.

[6] Rowan Killip and Irina Nenciu. Matrix models for circular ensembles. *International Mathematics Research Notices*, 2004(50) :2665–2701, 01 2004.

[7] Rostyslav Kozhan. Finite range perturbations of finite gap jacobi and cmv operators. *Advances in Mathematics*, 301 :204–226, Oct 2016.

[8] Rémi Rhodes and Vincent Vargas. Gaussian multiplicative chaos and applications : A review. *Probability Surveys*, 11 :315 – 392, 2014.

[9] Raoul Robert and Vincent Vargas. Gaussian multiplicative chaos revisited. *The Annals of Probability*, 38 :605 – 631, 2008.

[10] Alexander Shamov. On gaussian multiplicative chaos, 2016.

[11] Barry Simon. *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1 : Classical theory*, volume 54. 2004.

[12] Ofer Zeitouni. Gaussian multiplicative chaos, notes for lectures. April 29, 2021, Version 1.5.