Introduction au domaine de recherche : Produit d'opérateurs aléatoires et branchement multitype en environnement aléatoire

Maxime Ligonnière

Résumé : On présente dans ce document les enjeux de recherche liés à l'étude d'une famille de modèles de dynamique de populations, aléatoires, à temps discret, les processus de branchement multitypes en evironnement aléatoire. On commencera dans la section 1 par définir divers modèles de population en temps discret, en les voyant comme des variantes du modèle élémentaire de Galton-Watson. On introduira ainsi les notions de branchement multitype, et de branchement en environnement aléatoire avant de combiner les deux pour définir le branchement multitype en environnement aléatoire. Dans chaque cas on fera un rapide état des lieux des questions naturellement posées et des réponses qui y sont apportées dans la littérature. Dans la section 2, on s'interessera en particulier à l'étude des processus de branchement monotypes et multitypes en environnement aléatoire et on verra comment des produits d'opérateurs aléatoires sur des espaces de différentes dimensions sont utiles pour leur compréhension. Enfin, dans la section 3, on se consacrera plus particulièrement à mettre en place un formalisme adapté à la dimension infinie et à dégager des questionnements et perspectives sur l'étude du comportements de produits d'opérateurs aléatoires sur des espaces de dimension infinie.

Table des matières

1 Différents modèles de branchement

On va donc commencer par présenter différents modèles de population. Un premier modèle élementaire est le processus de Galton-Watson.

1.1 Le processus de Galton-Watson

On souhaite étudier le développement d'une population au cours du temps, qu'on considère discret, indexé par $\mathbb{N}$. On étudie donc une suite de générations, la n-ième étant constituée d'un nombre Z_n d'individus. Chaque individu de la génération n se reproduit aléatoirement et indépendemment des autres et du passé, donnant naissance aux individus de la génération $n+1$. Dans le cadre du premier modèle que nous allons considérer, dit processus de Galton-Watson, on suppose que tous les individus ont la même loi de reproduction $\mathcal{L}$, supposée intégrable. Alors le processus (Z_n) vérifie la relation suivante :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} L_{k,n} \tag{1.1}$$

où les $(L_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ sont des variables iid de loi $\mathcal{L}$. Le processus (Z_n) est bien connu et est appelé processus de Galton-Watson. (Z_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, dont 0 est un état absorbant. On appelle événement d'extinction le fait que cet état soit atteint par le processus. La première question concerne la probabilité de cet événement d'extinction.

Proposition 1 (Critère d'extinction d'un Galton Watson)**.** *Soit (Z_n) un processus de Galton Watson. On note L sa loi de reproduction L. On la suppose intégrable, d'espérance m, et qu'elle n'est pas presque sûrement constante en 1. Alors :*

$$\mathbb{P}\left[\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\right] = 1 \Leftrightarrow m \leq 1 \tag{1.2}$$

La preuve de ce critère repose sur le fait que la probabilité d'extinction est le plus petit point fixe de la fonction génératrice sur $[0,1]$. Cette fonction étant convexe et admettant un point fixe en 1, (et si la loi de reproduction n'est pas supportée par $\{0,1\}$, strictement convexe), une simple étude de son nombre dérivé à gauche en 1, c'est à dire de m, permet de classifier les Galton-Watson en 3 régimes, sous-critique lorsque $m < 1$, critique pour $m = 1$ et surcritique si $m > 1$.

On se pose ensuite des questions plus quantitatives : dans les régimes d'extinction presque sûre, on sait que la probabilité de survie jusqu'au temps n tend vers 0 par continuité décroissante. On cherche donc à estimer la vitesse de cette convergence. Les réponses respectivement dans les cas sous critique et critique font l'objet de théorèmes de [HSV67] et de [KNS66] :

Théorème 2 (Survie d'un GW sous-critique)**.** *Soit (Z_n) un Galton-Watson, de moyenne $m < 1$, alors il existe $c \in [0,\infty)$ tel que presque sûrement*

$$\frac{\mathbb{P}\left[Z_n \geq 1\right]}{m^n} \longrightarrow c. \tag{1.3}$$

De plus $c > 0$ si et seulement si $L \log L$ est intégrable.

Théorème 3 (Survie d'un GW critique)**.** *Soit (Z_n) un Galton-Watson, de loi de reproduction $L \in \mathcal{L}^2$, d'espérance $m = 1$ et de variance $\sigma^2 > 0$, alors*

$$n\mathbb{P}[Z_n > 0] \longrightarrow \frac{2}{\sigma^2}. \tag{1.4}$$

Ces théorèmes sont originellement obtenus par des considérations analytiques plus subtiles sur les fonctions génératrices des Z_n.

Dans le cas surcritique, la probabilité d'extinction est entièrement caractérisée comme le premier point fixe de la fonction caractéristique. Sur l'événement de survie, on s'interroge sur l'évolution asymptotique de la taille de la popoulation, et un théorème de [KS66] apporte une réponse :

Théorème 4 (Taille de la population d'un GW surcritique)**.** *Soit (Z_n) un processus de Galton-Watson, de loi de reproduction L intégrable, d'espérance $m > 1$. Alors il existe une variable aléatoire W telle que presque sûrement*

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n} \longrightarrow W \tag{1.5}$$

$L \log L$ est intégrable ssi presque sûrement, sur l'événement de survie $W > 0$.

La convergence de W_n vient simplement du fait que W_n est une martingale positive. Le caractère suffisant de la convergence de $\mathbb{E}\left[L \log L\right]$ pour affirmer la stricte positivité de W était établi précédemment, son caractère nécessaire est un résultat original de [KS66], établi directement pour des Galton-Watson multitypes (voir sous section suivante).

Cependant, ce modèle repose sur des hytpohèses fortes : les individus se reproduisent de manière indépendante et identiquement distribuée. Si ces hypothèses permettent de répondre simplement à de nombreuses questions, elles sont trop grossières pour certaines applications, notamment en écologie. On va donc en présenter des variantes moins simples mais plus riches dans les paragraphes suivants.

1.2 Une première variante : le Galton Watson multitype

Dans un premier temps, on peut relâcher l'hypothèse selon laquelle les individus se reproduisent selon la même loi, en attribuant à chaque individu un type, des traits, qui influencent la façon dont il se reproduit. Ces traits, dans de nombreuses situations, sont phénotypiques : la taille, la masse, la morphologie d'un individu peuvent le rendre plus ou moins apte à se reproduire. Cependant, on peut imaginer de définir des types différemment, par exemple en créant des modèles dits structurés en âge : chaque type représente une classe d'âge, avec un comportement reproductif différent. Pour étudier ces situations, on peut envisager une variante multitype du modèle précédent.

On se munit d'un ensemble de types, noté $\mathcal{X}$. Le processus (Z_n) devient maintenant un processus à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathcal{X}}$ donnant au temps n le nombre d'individus de chaque type. Chaque individu engendre des descendants d'à priori tous les types selon une loi propre à son type, on a ainsi une famille de lois $\mathcal{L}^i$ sur $\mathbb{N}^{\mathcal{X}}$ et des variables indépendantes, les $\left(L^i_{k,n}\right)_{k,n \in \mathbb{N}}$, telles que $L^i_{k,n}$ soit de loi $\mathcal{L}^i$. Ainsi on définit le processus (Z_n) par récurrence :

$$Z_0 = e_i, \quad Z_{n+1} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{Z_n(i)} L^i_{k,n},$$

pour une valeur de i à choisir dans $\mathcal{X}$, qui définit le type du premier individu. Ici, la moyenne des lois de reproduction est la matrice $M = \left(\mathbb{E}\left[L^i(j)\right]\right)_{i,j \in \mathcal{X}}$.

Cette définition est naturelle dans le cas où $\mathcal{X}$ est un ensemble fini, disons de cardinal p, auquel cas M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^+)$ (éventuellement avec des coefficients infinis si certaines lois de reproductions ne sont pas intégrables). Ce modèle a été bien étudié dans le cas où $\mathcal{X}$ est un ensemble fini, de cardinal p. Alors la matrice moyenne M vit dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^+)$. Pour obtenir un critère séparant les régimes d'extinction presque sûre et les régimes ou la population survie, on peut d'introduire ρ, sa valeur propre de Perron-Frobenius. Ici, c'est alors le fait que $\rho > 1$ ou $\rho < 1$ qui sépare les régimes sous-critique et critique. Le théorème 4, dit de Kesten Stigum, a été initialement énoncé dans [KS66] dans ce contexte multitype, donc sous la forme suivante :

Théorème 5 (Taille de la population d'un GW multitype surcritique)**.** *Soit Z_n un Galton-Watson multitype (avec p types) surcritique ($\rho > 1$), alors :*

i Il existe une variable aléatoire W dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$W_n = \frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow W \ p.s. \tag{1.6}$$

i) Soit v le vecteur propre à gauche de M associé à ρ, positif, de norme 1, alors il existe une variable aléatoire réelle w telle que $W = wv$

ii) Soit u le vecteur propre à droite de M associé à ρ, positif, de norme 1, alors, pour tout i, on a l'équivalence

$$\forall 1 \leq j \leq p, \mathbb{E}[L^i(j) \log L^i(j)] < \infty] \Leftrightarrow \mathbb{E}[w|Z_0 = e_i] = u(i) \Leftrightarrow \mathbb{P}[w > 0|Z_0 = e_i] > 0.$$

La démonstration en est cette fois plus technique, même si elle repose sur des arguments semblables.

Dans le cas où $\mathcal{X}$ est infini, les définitions ont encore du sens, en supposant que les lois de reproductions sont supportées par les vecteurs presque nuls, ce qui correspond à imposer que chaque individu ait un nombre fini d'enfants presque sûrement. Il y a assez peu de littérature sur le comportement de ce type de processus de Galton-Watson, cependant la thèse [Bra18] propose quelques résultats dans le cadre d'un ensemble de type dénombrable.

1.3 Une deuxième variante : le branchement en milieu aléatoire

On peut créer une deuxième variante du processus de Galton-Watson en intégrant la possibilité pour tous les individus d'une même génération de voir leur reproduction affectée simultanément par l'environnement dans lequel ils évoluent.

Cela revient à considérer un espace $\mathcal{E}$ des environnements possibles, et pour chaque environnement $e \in \mathcal{E}$, une loi de reproduction $\mathcal{L}^e$ sur $\mathbb{N}$, supposée intégrable, de moyenne $m(e)$. On tire alors des variables indépendantes $\left(L^e_{k,n}\right)_{k,n\in\mathbb{N},e\in\mathcal{E}}$, de sorte que $L^e_{k,n}$ suive $\mathcal{L}^e$. On choisit une loi μ sur $\mathcal{E}$ et on tire une suite $\Xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables i.i.d de loi μ, indépendemment des $\left(L^e_{k,n}\right)_{k,n,e}$. Ξ représente la suite des environnements dans lesquels la population va évoluer. Alors on définit un processus $(Z_n)_n$ en posant :

$$Z_0 = 1, Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} L^{\xi_n}_{k,n} \tag{1.7}$$

Dans toute l'étude suivante, on suppose que pour μ-presque tout $e, \mathbb{P}[L^e \in \{0,1\}] < 1$.

Le théorème suivant, qui énonce une classification des régimes, a été établi dans [AK71a], [AK71b] et [KS66].

Théorème 6. *Soit $(Z_n)_n$ un BPRE défini de la sorte. On suppose que $\mathbb{E}_\mu\left[|\log m(\xi)|\right] < \infty$, alors :*

i) Si $\mathbb{E}_\mu[\log m(\xi)] > 0$, *alors* $\mathbb{P}[\forall n, Z_n \geq 1] > 0$, *de plus il existe une variable aléatoire* W *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$, *telle que presque sûrement :*

$$W_n = \frac{Z_n}{\prod_{j=0}^{n-1} m(\xi_i)} \longrightarrow W,$$

et si $\mathbb{E}_\mu\left[\frac{\mathbb{E}[L^\xi \log L^\xi|\xi]}{m(\xi)}\right] < \infty$, *alors p.s. sur l'événement de survie* $W > 0$, *et pour presque tout* Ξ, $\mathbb{E}[W|\Xi] = 1$.

ii) Si $\mathbb{E}_\mu[\log m(\xi)] \leq 0$, *alors p.s.* $\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0$

Ce théorème présente des résultats analogues à ceux bien connus du processus de Galton-Watson : on dit que le BPRE est sous critique, critique ou sur critique selon que $\mathbb{E}_\mu[\log m(\xi)]$ est strictement négative, nulle ou strictement positive. Dans les régimes sous critique et critique, on a extinction presque sûre de la population, dans le régime sur-critique elle survit avec probabilité positive, et sous réserve d'un critère d'intégrabilité $L \log L$, la population croit géométriquement sur l'événement de survie.

Comme pour le Galton-Watson en milieu fixé ([KNS66] et [HSV67]), une question venant naturellement ensuite est d'estimer la vitesse d'extinction dans les cas sous-critique et critique.

L'article [GKV03] permet de mieux comprendre le cas sous-critique :

Théorème 7 (Survie d'un BPRE sous-critique)**.** *Soit* $(Z_n)_n$ *un BPRE sous crtitique, alors on a :*

i) Si $\mathbb{E}[m(\xi)\log m(\xi)] < 0$, *sous la condition d'intégrabilité* $\mathbb{E}[Z_1 \log^+ Z_1] < \infty$, *il existe* $0 < c$, *tel que*

$$\mathbb{P}[Z_n > 0] \sim c\mathbb{E}[m(\xi)]^n. \tag{1.8}$$

ii) Si $\mathbb{E}[m(\xi)\log m(\xi)] = 0$, *sous les conditions d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}[m(\xi)\log^2 m(\xi)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[(1+\log^- m(\xi))\mathbb{E}[(L^\xi)^2|\xi]] < \infty,$$

il existe $c > 0$, *tel que :*

$$\mathbb{P}[Z_n > 0] \sim c\sqrt{n}\mathbb{E}[m(\xi)]^n. \tag{1.9}$$

iii) Si $\mathbb{E}[m(\xi)\log m(\xi)] > 0$, *si* $m(\xi)$ *est apériodique et sous la condition d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(L^\xi)^2|\xi]}{m(\xi)^{2-\alpha}}\right] < \infty,$$

où $\alpha = \frac{\log \inf_{0\leq\theta\leq 1} \mathbb{E}m(\xi)^\theta}{\log \mathbb{E}m(\xi)}$, *il existe* $\gamma < \mathbb{E}(m(\xi))$, $c > 0$, *tels que*

$$\mathbb{P}[Z_n > 0] \sim cn^{-\frac{3}{2}}\gamma^n. \tag{1.10}$$

L'étude est complétée par l'étude de la probabilité de survie en régime critique, effectuée dans [GK01] :

Théorème 8 (Survie d'un BPRE critique)**.** *Soit* $(Z_n)_n$ *un BPRE critique vérifiant la condition d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[(L^\xi)^2|\xi]}{m(\xi)^2}\left(1+\log^+ m(\xi)\right)\right] < \infty,$$

alors il existe $\beta > 0$, tel que

$$\mathbb{P}\left[Z_n > 0\right] \sim \frac{\beta}{\sqrt{n}}. \tag{1.11}$$

En environnement fixé, un processus de branchement monotype ou multitype critique s'éteint à vitesse $\frac{\alpha}{n}$. L'extinction est donc significativement plus lente dans le régime critique d'un branchement en milieu aléatoire que dans celui d'un branchement en milieu fixé. Cela, comme on va le voir dans la suite, en étudiant cette question pour un branchement monotype, est du à la stochasticité environnementale : il suffit d'avoir une suite d'environnements propices à la reproduction des individus pour que le processus survive. Cette notion d'étude de l'interaction entre deux niveaux d'aléatoire, l'aléatoire environnemental, et l'aléatoire lié à la façon dont les individus se reproduisent effectivement une fois les environnements tirés, est absolument fondamentale et fait toute la difficulté et la richesse de l'étude des processus de branchement en environnement aléatoire.

1.4 Branchement multitype en milieu aléatoire

On va maintenant fusionner les deux variantes précédemment envisagées, pour former un modèle de branchement multitype en environnement aléatoire, dit MBPRE. Chaque individu peut à priori engendrer des descendants de tous les types selon une loi propre à son type et à l'environnement dans lequel il se reproduit, on dispose ainsi d'une famille de lois à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathcal{X}}$, les $\mathcal{L}^{e,i}, e \in \mathcal{E}, i \in \mathcal{X}$, et on tire une familles de variables indépendantes, les $\left(L_{k,n}^{e,i}\right)_{e\in\mathcal{E},i\in\mathcal{X},k,n\in\mathbb{N}}$, de sorte que pour chaque e, i, k, n, $L_{k,n}^{e,i}$ suive $\mathcal{L}^{e,i}$. Ainsi les Z_n vérifient la relation de récurrence :

$$Z_{n+1} = \sum_{i\in\mathcal{X}} \sum_{k=1}^{Z_n(i)} L_{k,n}^{\xi_n,i}.$$

De plus, on a vu qu'en monotype, la moyenne $m(e)$ du nombre d'enfants d'un individu dans un environnement était déterminante pour le comportement du processus. En multitype, on introduit donc la matrice moyenne des lois de reproduction de l'environnement e, notée

$$M_e = \left(\mathbb{E}\left[L^{e,i}(j)\right]\right)_{i,j\in\mathcal{X}}.$$

La loi image de μ par $e \mapsto M_e$ est donc une loi sur $\mathcal{S} := \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R}^+)$ qu'on note également μ par abus de notation. On note de plus $M_n = M_{\xi_n}$.

L'étude des MBPRE est un sujet de recherche actuelle, et des chercheurs essaient actuellement de transposer les preuves des résultats du BPRE (monotype) en multitype. C'est dans ce cadre de recherche qu'arrivent progressivement des produits de réels aléatoires, de matrices aléatoires, voire d'opérateurs aléatoires, selon le nombre de types que l'on considère.

2 Des produits d'opérateurs aléatoires au service du branchement

2.1 Du monotype au multitype

En monotype comme en multitype, l'étude du comportement d'un processus de branchement en milieu aléatoire repose sur une compréhension de l'interaction de deux sources d'aléatoire : le tirage des environnements, et la façon dont les individus se reproduisent effectivement dans ces environnements. Pour mesurer l'influence d'une suite d'environnements, on peut calculer la moyenne de la population au temps n conditionnellement à la suite d'environnements et à la population initiale et l'on obtient que

$$\mathbb{E}\left[Z_n|Z_0 = x, \Xi\right] = xM_0 \dots M_{n-1}.$$

Ici, si l'on suppose le nombre de type fini, le produit de matrices $M_0 \dots M_n$ est bien défini. On peut le définir de même si l'espace des types est dénombrable, quitte à ce que certains coefficients soient infinis, puisque toutes les quantités manipulées ici sont positives. Ici apparait donc pour la première fois le produit de matrices $M_0 \dots M_n$.

Dans la suite, on se place dans le cas du nombre de types fini, et on munit $\mathbb{R}^{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^p$ de la norme $\mathcal{L}^1$, notée $\|\cdot\|$, ainsi puisque Z_n est positif, $\|Z_n\|$ donne la taille de la population au temps n et

$$\mathbb{E}\left[\|Z_n\||Z_0 = x, \Xi\right] = \|xM_0 \dots M_{n-1}\|.$$

On étudiera plus particulièrement la quantité

$$S_n = \log\|xM_0 \dots M_{n-1}\| = \log\|\mathbb{E}[Z_n|\Xi, Z_0 = x]\|.$$

Dans le cas monotype, elle devient

$$S_n = \log \prod_{i \leq n-1} m_i = \sum_{i \leq n-1} \log m_i,$$

où m_i est l'espérance de la loi de reproduction dans l'environnement ξ_i, S_n est une marche aléatoire. Les propriétés des marches aléatoires sont bien étudiées, on sait par exemple que pour une marche aléatoire non triviale, dès lors que $\mathbb{E}_\mu \log(m(\xi)) \leq 0$, alors $\liminf S_n = -\infty$ presque sûrement. Ainsi par une méthode du premier moment, on a immédiatemment :

$$\mathbb{P}[Z_n \neq 0] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[Z_n \neq 0|\Xi\right]\right] \leq \mathbb{E}\left[\min_{0\leq k\leq n} \mathbb{P}\left[Z_k \neq 0|\Xi\right]\right] \leq \mathbb{E}\left[\min_{0\leq k\leq n} \mathbb{E}\left[Z_k|\Xi\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{\inf_{0\leq k\leq n} S_k}\right],$$

ce qui donne une condition suffisante d'extinction presque sûre :

$$\mathbb{E}_\mu \log(m(\xi)) \leq 0 \Rightarrow \liminf S_n = -\infty \Rightarrow \mathbb{P}[Z_n \neq 0] \to 0.$$

Par ailleurs, une compréhension plus fine de la marche aléatoire S_n permet de mieux comprendre le BPRE : Le théorème central limite fonctionnel (Donsker) permet de renormaliser S_n en tant que processus, de connaitre le comportement asymptotique de $I_n = \inf_{k\leq n} S_k$, qui donne une estimation intéressante de la probabilité de survie, etc... Dans le cas critique, $\mathbb{E}[\log m(\xi)] = 0$, la chaîne de Markov S_n est centrée, donc c'est une martingale. On peut expliciter une fonction harmonique h, et effectuer une h-transformée de Doob, c'est à dire créer un processus qui serait dans un certain sens S_n conditionné à ne pas aller en dessous d'une certaine valeur. Cette démarche est en fait l'essence de la preuve du théorème 8 présentée dans l'article [GK01].

On est tenté de généraliser la démarche précédente dans le cas multitype. Un problème majeur se pose alors : S_n, qui code l'espérance de la taille de la population au temps n conditionnellement à l'environnement, ne contient pas assez d'information : il ne contient aucune information sur la répartition des types au sein de la population au temps n. Ceci est insuffisant de deux points de vue : d'une part, lorsque la population survit, on n'est pas seulement intéressé par la compréhension de la taille de la population mais aussi par l'évolution de la répartition des types en son sein, et on se demande par exemple si le système converge vers un équilibre entre différents types. D'autre part, une partie de la structure markovienne (et à fortiori de marche aléatoire) de S_n se perd en passant au multitype : la mémoire du passé jusqu'au temps n n'est pas entièrement résumée dans S_n, puisqu'en connaissant S_n, on ne connait que la taille de la population attendue au temps n et pas la répartition des types en son sein : cela ne suffit donc pas pour estimer quelle serait la taille de la population au temps $n+1$. Il faut donc comprendre comment ce produit se comporte à la fois en direction et en norme pour pouvoir avancer.

2.2 En nombre de type fini, étude par la contraction de Hilbert

Dans le cadre du nombre de type fini, une solution est développée dans une suite d'articles de Furstenberg et Kesten ([FK60]), Hennion ([Hen97]), Pham, Peigné et Lepage ([Pha17] [LPP18]). Elle repose sur l'idée que si la taille de la population est codée par la norme du vecteur qui la décrit, la répartition des types à l'intérieur est codée par la direction de ce vecteur, c'est à dire son projeté sur la sphère unité associée à la norme 1 dans $\mathbb{R}^p$. On pose $\mathbb{X} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^p || ||x|| = 1\right\}$, et on introduit $\cdot$, l'action projective à gauche de l'ensemble des matrices à coefficients positifs $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{X}$:

$$x \cdot M = \frac{xM}{\|xM\|}.$$

Le projeté $x_n = x \cdot (M_0 \cdots M_{n-1})$ a alors pour coordonnées les fréquences de chaque type dans la population moyenne conditionnellement à l'environnement au temps n. Le processus (x_n) est une chaine de Markov.

En étudiant le comportement asymptotique de la loi de (x_n), on peut aboutir sous une hypothèse de moment sur la loi de $M(\xi)$ à l'existence d'un exposant de Lyapunov, c'est à dire d'une constante π_μ telle que :

$$\frac{1}{n} \log \|M_1 \dots M_n\| \longrightarrow \pi_\mu \text{ p.s. .}$$

Athreya, Karlin et Kaplan démontrent dans [AK71a] et [AK71b] que c'est le signe de cette constante qui premet de classifier les régimes sous critique, critique, surcritique d'un MBPRE.

De plus, on peut munir $\mathbb{X}$ d'une distance dite distance de Hilbert, pour laquelle l'action $\cdot$ des matrices à coefficients positifs est une contraction. Une matrice M est même κ-contractante, pour un $\kappa < 1$ si tous ses coefficients sont strictement positifs. Alors sous des bonnes hypothèses, notamment de moments et de minoration des coefficients de matrices, on a convergence en loi de x_n vers une loi invariante, indépendante du point de départ, à vitesse géométrique. Ceci est le point de départ de toute une construction qui étudie la convergence en loi de la chaine de Markov (x_n, M_n) puis le comportement asymptotique de S_n qu'on écrit à partir des trajectoires de $(x_n, M_n)_n$:

$$S_{n+1} = \log \|x \cdot M_n \dots M_0\| = \| || x_n M_n || + S_n = \sum_{k=0}^{n} ||x_k M_k||.$$

C'est cette technique qui a permis à Peigné, Pham et Lepage ([LPP96]), puis à Vatutin et Dyakonova ([VD16]) de conclure pour la première fois à l'extinction à vitesse $\frac{c}{\sqrt{n}}$ de certains MBPRE critiques.

3 Adaptation et perspectives en dimension infinie

Lorsque $\mathcal{X}$ est un espace mesurable à priori infini, le formalisme précédent ne se généralise pas nécessairement : en particulier, lorsque $\mathcal{X}$ n'est pas dénombrable, si on peut encore imaginer définir les $M(e) = (\mathbb{E}[L^{e,i}(j)])_{i,j\in\mathcal{X}}$, elles n'ont plus un sens si important : si l'on considère un modèle ou le type serait la taille des individu, et un individu faisant presque sûrement 1 enfant, dont la taille serait distribuée normalement autour de celle du parent, toutes les entrées de la matrice moyenne seraient nulles, ce qui ne rendrait pas compte de la distribution réelle de la première génération.

Pour résoudre ce problème, on introduit une construction classique, plus lourde, dite construction d'Ulam-Harris. On note $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ l'ensemble des mots finis constitués de lettres entières. Toute réalisation d'une population peut être vue comme un sous arbre de $\mathcal{U}$. Chaque individu sera représenté par un mot, en assimilant l'individu initial au mot vide et les enfants de l'individu u à tous les uv, pour v entier entre 0 et le nombre d'enfants de u-1. On note $\mathbb{G}_n$ l'ensemble des individus de la génération n. Pour chaque individu u de la population, on notera $X(u)$ son type. On définit alors le semi groupe du premier moment conditionnel à l'environnement :

$$M_n^{e_0,\ldots,e_{n-1}} f(x) = \mathbb{E}_{Z_0=\delta_x}\left[\sum_{u\in\mathbb{G}_n} f(X(u))|\xi_0 = e_0,\ldots \xi_{n-1} = e_{n-1}\right], \text{ pour } n \in \mathbb{N}, e_i \in \mathcal{E}, x \in \mathcal{X}.$$

On peut définir les $M_n^{e_0\cdots e_n}$ sur les fonctions mesurables positives, remarquer qu'ils envoient une fonction positive sur une fonction positive, qu'ils sont additifs, et que pour toute fonction f mesurable positive, ces opérateurs vérifient les propriétés :

$$M_{n+p}^{e_0,\ldots,e_{n+p-1}} f = M_n^{e_0,\ldots,e_{n-1}} M_p^{e_n,\ldots,e_{n+k-1}} f = M_1^{e_0}\ldots M_1^{e_{n+p-1}} f.$$

On note dans la suite $M^e = M_1^e$. Pour voir ces opérateurs réellement comme des opérateurs linéaires, il nous faut trouver un sous espace des fonctions mesurables sur $\mathcal{X}$ qui soit préservé par l'action des M^e, pour $e \in \mathcal{E}$. On souhaiterait de plus que la fonction constante $f = 1$ soit dans cet espace, ainsi le nombre d'individus à chaque temps serait intégrable conditionnellement à l'environnement. On peut envisager de trouver une fonction $V : X \longrightarrow [1,\infty[$ telle que, pour chaque $e \in \mathcal{E}$, il existe $A > 0$ telle que $M_1^e V \leq AV$. Alors les M^e ont bien une action linéaire sur l'espace $\mathcal{B}(V)$ des fonctions f mesurables telles que $\frac{f}{V}$ est borné sur X.

On cherche donc à étudier le comportement asymptotique des variables aléatoires $M^{\xi_0}\ldots M^{\xi_n} f(x)$ lorsque n tend vers l'infini, deux axes d'études se dégagent alors :

— On peut essayer d'adapter à ce cadre le procédé de contraction de Hilbert : munir $\mathcal{B}(V)$ d'une norme et définir une forme d'action projective des M_1^e, qui soit contractante pour une distance bien choisie sur l'espace projectif associé. [Bir57] propose notamment une façon de définir un analogue de la distance proposée précédemment sur des espaces de dimension infinie. On peut espérer d'en déduire pour chaque f l'existence d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, notée $l(f)$, telle que pour chaque $x \in \mathbb{X}$:

$$M_n^{\xi_0,\cdots\xi_{n-1}} \cdot f(x) \xrightarrow{d} l(f).$$

De là, on pourrait espérer adapter la démarche de Furstenberg, Kesten, Athreya et Karlin et de Pham, Peigné, Lepage et remonter à des résultats de conditions ou de vitesse d'extinction. Pour que cette démarche fonctionne, on serait bien entendu amené à imposer des hypothèses sur les lois de reproduction et les lois environnementales, mais il n'est pas clair qu'on arrive à mettre en place ce type de méthode avec des hypothèses biologiquement satisfaisantes.

Typiquement, cela pourrait nécessiter des contrôles de certaines quantités qui soient uniformes sur l'espace des types. Si l'uniformité est peu exigeante lorsque le nombre de type est fini, elle l'est beaucoup plus sur un espace infini : ce genre de résultats pourraient être insatisfaisants pour une application biolgoique.

— Une autre méthode pourrait être d'adapter des résultats de contraction de Harris sous des hypothèses de Doeblin-Lyapunov. Cette méthode s'inspire des articles [HM11],[Ban+21]. Dans le premier, on étudie des puissances d'opérateurs liés à des chaînes de Markov, de la forme :

$$P\phi(x) = \int_{\mathcal{X}} \phi(y)P(x,dy), \text{ où } P(x,dy) \text{ est un noyau de Markov.}$$

On suppose qu'on dispose d'une fonction V positive sur $\mathcal{X}$ et d'une mesure de probabilité ν sur $\mathcal{X}$, et de réels $\alpha < 1$, $\beta > 0$ et θ et $R > 2\theta/(1-\alpha)$ tels que :

$$PV \leq \alpha V + \theta \text{(condition de Lyapunov)}$$

$$\forall x \in \mathcal{X}, V(x) \leq R \Rightarrow P(x,\cdot) \geq c\nu(\cdot) \text{(condition de Doeblin)}$$

La condition de Doeblin impose la présence d'une zone dans laquelle une partie de la masse est déplacée indépendemment du point de depart, la condition de Lyapunov implique un retour régulier dans cette zone. Sous ces conditions, les puissances de P convergent géométriquement vers une mesure invariante pour une norme bien choisie.

Dans le deuxième article, ce type de démarche est généralisé (en temps continu, mais la démarche centrale repose sur des arguments de temps discret) pour des opérateurs qui ne sont pas liés à des noyaux de chaînes de Markov et ne sont donc pas conservatifs ($P1 \neq 1$ en général), pour établir une convergence à vitesse géométrique vers une mesure invariante. Cette généralisation au cas non conservatif nécessite des hytpohèses supplémentaires et aboutit à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$, h mesurable sur $\mathbb{X}$ et γ mesure sur $\mathbb{X}$ telles que :

$$|\exp(-\lambda n)P^n f(x) - h(x)\gamma(f)| \leq CV(x)\exp(-\omega n).$$

Pour toute $|f| \leq V$ et $x \in \mathcal{X}$, où C et ω sont des constantes positives indépendantes de f et x. On peut espérer que cette démarche puisse être adaptée en remplaçant les puissances de P par le produits des M^{e_i}, sous réserve que les M^{e_i} vérifient des hypothèses simlaires, et qu'elle donne des résultats intéressants lorsqu'on choisit aléatoirement les opérateurs.

Références

[AK71a] Krishna B. Athreya et Samuel Karlin. « Branching Processes with Random Environments, I : Extinction Probabilities ». In : *Ann. Math. Statist.* 42.5 (oct. 1971), p. 1499-1520. doi : 10.1214/aoms/1177693150. url : https://doi.org/10.1214/aoms/1177693150.

[AK71b] Krishna B. Athreya et Samuel Karlin. « Branching Processes with Random Environments, II : Limit Theorems ». In : *Ann. Math. Statist.* 42.6 (déc. 1971), p. 1843-1858. doi : 10.1214/aoms/1177693051. url : https://doi.org/10.1214/aoms/1177693051.

[Ban+21] Vincent Bansaye et al. *A non-conservative Harris ergodic theorem.* 2021. eprint : 1903.03946.

[Bir57] Garrett Birkhoff. « Extensions of Jentzsch's Theorem ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 85.1 (1957), p. 219-227. issn : 00029947. url : http://www.jstor.org/stable/1992971.

[Bra18] Peter Timothy Braunsteins. *Extinction in branching processes with countably may types.* 2018. url : https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/210538.

[FK60] H. Furstenberg et H. Kesten. « Products of Random Matrices ». In : *Ann. Math. Statist.* 31.2 (juin 1960), p. 457-469. doi : 10.1214/aoms/1177705909. url : https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909.

[GK01] J. Geiger et G. Kersting. « The Survival Probability of a Critical Branching Process in a Random Environment ». In : *Theory of Probability and Its Applications - THEOR PROBAB APPL-ENGL TR* 45 (jan. 2001). doi : 10.1137/S0040585X97978440.

[GKV03] Jochen Geiger, Götz Kersting et Vladimir A. Vatutin. « Limit theorems for subcritical branching processes in random environment ». en. In : *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques* 39.4 (2003), p. 593-620. doi : 10.1016/S0246-0203(02)00020-1. url : http://www.numdam.org/item/AIHPB_2003__39_4_593_0.

[Hen97] H. Hennion. « Limit theorems for products of positive random matrices ». In : *Ann. Probab.* 25.4 (oct. 1997), p. 1545-1587. doi : 10.1214/aop/1023481103. url : https://doi.org/10.1214/aop/1023481103.

[HM11] Martin Hairer et Jonathan C. Mattingly. « Yet Another Look at Harris' Ergodic Theorem for Markov Chains ». In : *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI.* Sous la dir. de Robert Dalang, Marco Dozzi et Francesco Russo. Basel : Springer Basel, 2011, p. 109-117. isbn : 978-3-0348-0021-1.

[HSV67] C. R. Heathcote, E. Seneta et D. Vere-Jones. « A Refinement of Two Theorems in the Theory of Branching Processes ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 12 (2 jan. 1967). doi : 10.1137/1112033.

[KNS66] H. Kesten, P. Ney et F. Spitzer. « The Galton-Watson Process with Mean One and Finite Variance ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 11 (4 jan. 1966). doi : 10.1137/1111059.

[KS66] H. Kesten et B. P. Stigum. « A Limit Theorem for Multidimensional Galton-Watson Processes ». In : *Ann. Math. Statist.* 37.5 (oct. 1966), p. 1211-1223. doi : 10.1214/aoms/1177699266. url : https://doi.org/10.1214/aoms/1177699266.

[LPP18] E. Le Page, M. Peigné et C. Pham. « The survival probability of a critical multi-type branching process in i.i.d. random environment ». In : *Ann. Probab.* 46.5 (sept. 2018), p. 2946-2972. doi : 10.1214/17-AOP1243. url : https://doi.org/10.1214/17-AOP1243.

[LPP96] Russell Lyons, Robin Pemantle et Yuval Peres. « Conceptual Proofs of L Log L Criteria for Mean Behavior of Branching Processes ». In : *The Annals of Probability* 23 (oct. 1996). doi : 10.1214/aop/1176988176.

[Pha17] C. Pham. « Conditioned limit theorems for products of positive random matrices ». In : *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics* 15 (mar. 2017). doi : 10.30757/ALEA.v15-04.

[VD16] Vladimir Vatutin et Elena Dyakonova. « Multitype branching processes evolving in i.i.d. random environment : probability of survival for the critical case ». In : *Theory of Probability & Its Applications* 62 (déc. 2016). doi : 10.1137/S0040585X97T988782.