École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications

Examen d'analyse complexe

Durée : 3h. Aucun document autorisé. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1.

1° *Question de cours.* Soit $\mathbb{D}$ le disque unité. Démontrer le lemme de Schwarz : si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe et $f(0) = 0$, alors $|f'(0)| \leqslant 1$.

2° Soit $a \in \mathbb{D}^*$. Donner un exemple de biholomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(0) = a$. Y en a-t-il d'autres ? Que dire de φ^{-1} ? Calculer $|\varphi'(0)|$ et $|\varphi'(a)|$.

3° Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. En appliquant la première question à une application bien choisie F telle que $\mathrm{F}(0) = 0$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Que dire si l'égalité est atteinte en un $z_0 \in \mathbb{D}$?

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on pourra utiliser, en justifiant leurs propriétés, les produits de Blaschke, définis à partir d'une suite finie ou infinie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbb{D}^*$:

$$\mathrm{B}(z) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}.$$

1° Démontrer la formule de Jensen : si f est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\mathrm{D}(0,r)}$, ne s'annulant ni en 0 ni sur $\partial\mathrm{D}(0,r)$, alors

$$\operatorname{Log}|f(0)| + \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Log}\frac{r}{a_n} = \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi},$$

où les a_n ($n \geqslant 1$) sont les zéros (répétés suivant leur multiplicité) de f dans $\mathrm{D}(0,r)$. On pourra commencer par montrer la formule dans le cas particulier où $r = 1$ et f est un produit de Blaschke fini.

2° En déduire que si f est une fonction holomorphe bornée sur le disque unité $\mathbb{D}$, non identiquement nulle, et f s'annule aux points $a_1, a_2, \ldots$ (répétés suivant leur multiplicité), alors

$$\sum_{n\geqslant 1} (1 - |a_n|) < \infty. \qquad (*)$$

3° Montrer la réciproque, à savoir : si une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, finie ou infinie, d'éléments de $\mathbb{D}$ (éventuellement répétés) satisfait (*), alors il existe une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$, qui ne s'annule qu'en les points a_n, avec une multiplicité égale au nombre de répétitions dans la suite (a_n).

4° Montrer qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$, qui ne peut être prolongée comme fonction holomorphe sur aucun ouvert plus grand.

Exercice 3. Pour $0 < r < \mathrm{R} < \infty$, on définit l'anneau $\mathrm{A}(r, \mathrm{R}) = \{r < |z| < \mathrm{R}\}$. Le but de cet exercice est de démontrer que deux anneaux $\mathrm{A}(r_1, \mathrm{R}_1)$ et $\mathrm{A}(r_2, \mathrm{R}_2)$ sont biholomorphes si et seulement si $\mathrm{R}_1/r_1 = \mathrm{R}_2/r_2$.

1° *Question de cours.* Énoncer et démontrer la forme forte du principe de réflexion de Schwarz.

2° Montrer qu'on peut se ramener au cas $r_1 = r_2 = 1$.

3° Supposons donné un biholomorphisme $f : \mathrm{A}(1, \mathrm{R}_1) \to \mathrm{A}(1, \mathrm{R}_2)$. Montrer que, si besoin en remplaçant f par R_2/f, on a $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$ et $\lim_{|z|\to \mathrm{R}_1} |f(z)| = \mathrm{R}_2$. On pourra commencer par montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'image $f(\mathrm{A}(1, 1+\varepsilon))$ n'intersecte pas le cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{R}_2}$.

4° Montrer que f s'étend en une fonction holomorphe $f : \mathrm{A}(1/\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1) \to \mathrm{A}(1/\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_2)$. On pourra poser $g(\tau) = f(e^{i\tau})$ et raisonner sur un logarithme de g.

Montrer de même que f s'étend en une fonction holomorphe $f : \mathrm{A}(1, \mathrm{R}_1^2) \to \mathrm{A}(1, \mathrm{R}_2^2)$.

5° Montrer que f s'étend en une fonction entière, puis conclure.

Exercice 4.

1° *Question de cours.* (i) On rappelle les fonctions de réseau

$$\mathrm{G}_k(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

pour $\tau \in \mathbb{H}$ (le demi-plan supérieur). Montrer la relation

$$\mathrm{G}_k\left(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k}\mathrm{G}_k(\tau) \quad \text{si } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

(ii) On rappelle l'équation différentielle satisfaite par la fonction $\wp$ de Weierstraß : $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, où $g_2 = 60\mathrm{G}_2$ et $g_3 = 140\mathrm{G}_3$. On définit la fonction $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$. Démontrer que la fonction Δ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$.

2° Soit une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, invariante sous l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$. Montrer que si f est bornée, alors f est constante (étudier son comportement à l'infini en considérant la variable $q = e^{2\pi i\tau}$, puis raisonner sur sa restriction à un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$).

3° On définit la fonction η de Dedekind par

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n\geqslant 1} (1 - e^{2i\pi n\tau}).$$

(i) Montrer qu'on définit ainsi une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$.

(ii) *(difficile, ne tenter qu'après avoir fini le reste de l'examen)* Montrer l'identité

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau). \tag{†}$$

On pourra commencer par montrer la formule pour $\tau = iy$ avec $y > 0$, en déduisant l'égalité des logarithmes de (†) à partir de l'intégrale de contour $\int_c \cot(\pi s)\cot(\pi \frac{s}{\tau})\frac{ds}{s}$, avec c le bord du losange de sommets $\pm k$, $\pm kiy$ ($k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$).

On rappelle le comportement de Δ par rapport à $q = e^{2\pi i\tau}$ en $q = 0$: on a $\Delta(q) \sim (2\pi)^{12}q$. En déduire l'identité $\Delta = (2\pi)^{12}\eta^{24}$.