Partiel d'analyse complexe

Durée : 2h. Aucun document autorisé. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème de Weierstrass sur l'existence de fonctions holomorphes de zéros fixés dans un ouvert de $\mathbb{C}$.

Questions diverses. Les questions suivantes n'ont pas de rapport entre elles.

1° Trouver le nombre de zéros dans le disque unité (comptés avec multiplicité) des fonctions suivantes :

$$f_1(z) = z^{2015} - 6z^{42} + 2, \qquad f_2(z) = e^z - 5z^{2015} - 2.$$

2° Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ une application holomorphe, telle que $f \circ f = f$. Montrer que ou bien f est constante ou bien $f = \mathrm{Id}_\mathrm{U}$.

3° Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $\mathrm{Re} f > \mathrm{Im} f$. Montrer que f est constante.

Exercice 1.

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^s \operatorname{Log} x}{x^2 - 1} dx$$

en précisant pour quels nombres complexes s l'intégrale existe.

Exercice 2. Soit U un ouvert *borné* de $\mathbb{C}$, et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ une application holomorphe. On suppose que f admet un point fixe $a \in \mathrm{U}$. Posons $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n facteurs) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut établir les trois propriétés suivantes (H. Cartan) :

(a) $|f'(a)| \leqslant 1$;

(b) $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est bijective ;

(c) si $|f'(a)| < 1$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers l'application constante égale à a.

On pourra utiliser le théorème de Montel tout juste vu en cours, qui implique que toute sous-suite $(f_{n'})$ admet une sous-suite $(f_{n''})$ convergeant uniformément sur tout compact de U.

1° Démontrer le résultat dans le cas où $\mathrm{U} = \mathbb{D}$.

On suppose maintenant U général.

2° Montrer (a). En déduire que si f est bijective, alors $|f'(a)| = 1$.

3° Montrer que si $f'(a) = 1$, alors f est la fonction identité.

4° (i) Montrer que si une suite de fonctions holomorphes (g_n) sur U converge uniformément sur tout compact vers une fonction non constante g sur U, et si $g_n(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ pour tout n, alors $g(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$.

(ii) En déduire (b).

5° Montrer (c).

Exercice 3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On définit l'enveloppe polynômiale de K comme l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\text{pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}],\ |\mathrm{P}(z)| \leqslant \sup_\mathrm{K} |\mathrm{P}|.$$

Déterminer l'enveloppe polynômiale de K.