Examen *Logique* (24 janvier 2018)

Les documents ne sont pas autorisés

1. (Il n'existe pas d'énumération des ensembles r.e. infinis.) Soit $W_e = \mathrm{dom}\,\phi_e = \{x \in \mathbf{N} : \Phi^1(e,x) \downarrow\}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive totale $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que
$$\{W_{g(x)} : x \in \mathbf{N}\} = \text{ensembles r.e. infinis.}$$
En raisonnant par absurde, supposons que g soit une telle fonction et soit $L_s = W_{g(s)}$ pour tout $s \in \mathbf{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction récursive f telle que pour tout x, $f(x+1) > f(x)+1$ et $f(x)+1 \in L_x$. (*Indication :* On pourra commencer par démontrer que l'ensemble $\{(x,s) : x \in L_s\}$ est r.e. et donc la projection d'un ensemble primitif récursif.)
   (b) Conclure.

2. Soient V un modèle de ZFC et M une classe de V qui est une sous-structure élémentaire de V. On suppose que M contient tous les ordinaux de V. Le but de cet exercice est de montrer que $M = V$.

   On notera Ord la classe des ordinaux de V, et les notions considérées (cardinalité, etc.), sans précision supplémentaire, le seront toujours dans V.
   (a) Soit $y = F(\alpha)$ une classe fonctionnelle de V, de domaine Ord, définie par une formule sans paramètre. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$, on a $F(\alpha) \in M$.
   (b) On fixe $\alpha \in \mathrm{Ord}$, et on notera κ le cardinal de V_α. Montrer que $V_\alpha \in M$ et qu'il existe $f \in M$ qui, dans V et dans M, est une bijection entre κ et V_α.
   (c) En déduire que $V_\alpha \subseteq M$ et conclure.

3. Soient $\mathcal{L}$ un langage, $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{L}$-structures finies ou dénombrables, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{N}$. On note par M l'ultraproduit $\prod_{n\in\mathbf{N}} M_n/\mathcal{U}$. On veut montrer que M est soit finie, soit de cardinalité $2^{\aleph_0}$.

   On rappelle que pour un ordinal α, ${}^{\alpha}2$ désigne l'ensemble des fonctions de α dans 2.
   (a) Commençons par supposer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\{n \in \mathbf{N} : |M_n| \leqslant N\} \in \mathcal{U}$. Montrer qu'alors M est finie.
   (b) On se place maintenant dans le cas opposé, c'est-à-dire celui où pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\{n \in \mathbf{N} : |M_n| \leqslant N\} \notin \mathcal{U}$. Montrer qu'il existe une famille $(E_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de parties de $\mathbf{N}$, et une famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions satisfaisant les propriétés suivantes :
      - $\bigcup_{i\geqslant 0} E_i = \mathbf{N}$, et pour tout $i_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on a $\bigcup_{i\geqslant i_0} E_i \in \mathcal{U}$;
      - Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $n \in E_i$, f_n est une injection de ${}^{i}2$ dans M_n.
   (c) À l'aide des f_n, construire une injection $F\colon {}^{\omega}2 \to M$ et en déduire que $|M| = 2^{\aleph_0}$.
   (d) On admettra que la théorie ACF_0 des corps algébriquement clos de caractéristique 0 est catégorique en tout cardinal non dénombrable. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur l'ensemble $\mathbf{P}$ des nombres premiers. Montrer que les corps $\prod_{p\in\mathbf{P}} \overline{\mathbf{F}_p}^{alg}/\mathcal{U}$ et $\mathbf{C}$ sont isomorphes (ici $\overline{\mathbf{F}_p}^{alg}$ dénote la clôture algébrique du corps fini $\mathbf{F}_p$).

4. Pour cet exercice on pourra utiliser le *principe du plus petit élément* qui est démontrable dans PA : pour toute formule $\phi(x,\bar{w})$
$$\mathsf{PA} \vdash \forall \bar{w} \quad \big(\exists x \phi(x,\bar{w})\big) \to \exists x \,\big(\phi(x,\bar{w}) \land \forall y < x\, \neg\phi(y,\bar{w})\big).$$

Un autre fait utile concernant les modèles $\mathcal{M}$ de PA est qu'il existe des bijections définissables (sans paramètres) entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^k$ pour tout k ; en particulier toute formule $\phi(x, \bar{a})$ est équivalente dans $\mathcal{M}$ à une formule $\phi'(x, b)$ avec un seul paramètre b.

Soit $\mathcal{M} \models$ PA. On dit qu'un élément $a \in \mathcal{M}$ est *définissable* s'il existe une formule $\phi(x)$ (sans paramètres) telle que $\mathcal{M} \models \forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow x = a)$. On note par $K(\mathcal{M})$ l'ensemble de tous les éléments définissables de $\mathcal{M}$.

(a) Montrer que si $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ sont des modèles de PA, alors $K(\mathcal{M}_1) = K(\mathcal{M}_2)$.

(b) Montrer que $K(\mathcal{M})$ est toujours dénombrable, que $K(\mathcal{M}) \prec \mathcal{M}$ et que $K(\mathcal{M}) = \mathbf{N} \iff \mathcal{M} \equiv \mathbf{N}$.

(c) Soit $I(\mathcal{M})$ le segment initial engendré par $K(\mathcal{M})$, i.e.,

$$I(\mathcal{M}) = \{a \in \mathcal{M} : \exists b \in K(\mathcal{M})\ a \leq b\}.$$

Montrer que $I(\mathcal{M}) \prec \mathcal{M}$.

(*Indication :* Dans cette partie on pourra utiliser le codage des suites d'éléments de $\mathcal{M}$: on rappelle que certaines suites $(x_u)_{u<w}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, avec $w \in \mathcal{M}$, peuvent être codées par un élément [1] z de $\mathcal{M}$. Chaque élément $z \in \mathcal{M}$ code une suite, et on notera $(z)_u$ le u-ème élément de la suite codée par z ; l'application $(z, u) \mapsto (z)_u$, de $\mathcal{M}^2$ dans $\mathcal{M}$, est alors définissable (sans paramètre). On rappelle que PA $\vdash \forall z\ \forall u\ (z)_u \leqslant z$, ainsi que le principe de collection suivant :

$$\mathsf{PA} \vdash \forall w\ \exists z\ \forall u < w\ \big((\exists x \phi(x, u)) \rightarrow \phi((z)_u, u)\big)$$

pour toute formule ϕ. Tous ces résultats pourront être utilisés sans démonstration.)

(d) Utiliser le théorème de compacité pour construire un $\mathcal{M} \models$ PA pour lequel $K(\mathcal{M}) \precneqq I(\mathcal{M}) \precneqq \mathcal{M}$.

1. En TD, il a été vu comment coder une suite par deux éléments de $\mathcal{M}$, mais on peut évidemment ramener ce nombre à un grâce à une bijection définissable.