Introduction au domaine de recherche : risque de longévité *

Yang Lu
Tuteur : Gérard Biau

19/10/2011, Ecole Normale Supérieure

Résumé

Ce document a pour de présenter mon domaine de recherche : le risque de longévité. Il s'inspire des travaux effectués durant le stage d'été 2011 au sein de Fixage, société d'actuariat-conseil et fera l'objet de futurs approfondissements dans le cadre de stage en temps partiel prévu cette année an sein de SCOR, société de réassurance, et d'une future thèse CIFRE au seine de la même entreprise. Je voudrais remercier vivement Mr. Biau, mon tuteur à l'ENS pour m'a fait découvrir le domaine de l'actuariat et qui m'a guidé dans ce choix.

Mots clés : actuariat, statistique

*Rapport présenté pour la soutenance du mémoire de magistère de la FIMFA (Formation Interuniversitaires Des Mathématiques Fondamentales et Applicaquées) en vue d'obtenir le diplôme de l'Ecole Normale Supérieure.

Table des matières

1 Introduction

On le voit de plus en plus clair : l'amélioration de l'espérance de vie a été considérable depuis plus d'un siècle dans les pays industrialisés. L'enrichissement des sociétés, les progrès médicaux, les améliorations de qualité de vie, la paix...Tout cela contribue à des taux de mortalité de plus en plus faible.

Selon une étude récente de Swiss Re[I] [22], un Suisse né aujourd'hui vit en moyenne 35 ans de plus que s'il était né en 1990. Selon les démographes, si la baisse de la mortalité infantile a historiquement expliqué la plupart du gain d'espérance de vie jusqu'à il y a 50 ans, la longévité de la population adulte et retraitée constitue maintenant le facteur le plus important. Il vient par conséquent un vieillisement de la population, l'un des défis majeurs de notre société. Quant à l'industrie d'assurance, elle s'inquiète de plus en plus du risque de longévité, dont l'impact financier pourrait être très important dans le futur car il s'agit d'un risque non mutualisable.

Il est donc très important, pour les organismes assureurs, de pouvoir prédire correctement l'évolution de la mortalité dans le futur. Or, ce n'est guère aisé. Les modèles de mortalité tenant compte de son évolution dans le temps sont récents, datant des années 1980. En plus, historiquement, les régulateurs, les praticiens et les académiques ont systématiquement sous-estimer le progrès de l'espérance de vie, en Europe comme aux Etats-Unis. Parmi les difficultés spécifiques que rencontrent les assureurs, on peut notamment citer un faible nombre d'historique, avec souvent seulement une dizaine d'années de profondeur, et une taille réduite du portefeuille. Dans ce rapport nous nous intéressons aux différents modèles de mortalité, surtout à leur application aux **petits échantillons**. Nous commençons par le modèle le plus classique, à savoir Lee-Carter, puis nous proposons deux améliorations de ce dernier avant de nous intéresser aux modèles relationnels.

2 Principe

Pour tarifier une rente viagère (un produit d'assurance qui verse, chaque année, une somme prédéfinie jusqu'au décès du bénéficiaire), l'actuaire doit pouvoir estimer la probabilité de décès à chaque âge des assurés de façon correcte. Il lui faut donc connaître le niveau de mortalité de la population d'assurés pour estimer correctement la durée de son engagement. Mathématiquement, si nous notons $q_{x,t}$, appelée **quotient de mortalité** (ou taux de mortalité) est la probabilité pour un individu d'âge x à l'instant t de décéder durant l'année à venir.

Nous l'indexons par l'âge x et l'année t pour deux raisons. Premièrement, ces deux indices sont souvent disponibles, que ce soit pour les portefeuilles d'assurance ou la population générale. Deuxièmement, la probabilité de décès dépend fortement de l'âge et de la date de naissance de cette personne. En effet, à l'échelle logarithmique, au-delà d'un certain âge[II], le taux de mortalité est globalement croissante (de façon quasi-linéaire) par rapport à l'âge x (cf. figure 2) et décroissante par rapport au temps t (cf. figure 2). Il ne suffit alors pas, pour l'actuaire, de savoir la mortalité de la population dans le passé mais il faut la prédire dans le future. S'il tarifie la rente viagère en utilisant les taux de mortalité en 2009, il y a un risque de sous-tarification car à âge fixé, la mortalité des individus va baisser dans le futur, l'assureur devra alors payer plus d'argent aux assurés. Tel est le risque de longévité. Sa conséquence peut être très importantes car c'est un engagement long (quelques dizaines d'années) et le risque et non-mutualisable entre les assurés, pourtant principe fondamentale de l'assurance.

I. Swiss Re est la seconde société mondiale de réassurance après Munich Re.

II. Le niveau de mortalité n'est en général pas monotone avant 30 ans en raison d'un boss aux alentours de 25 ans, période d'âges à laquelle le taux de décès violents (suicide, accident) est élevé.

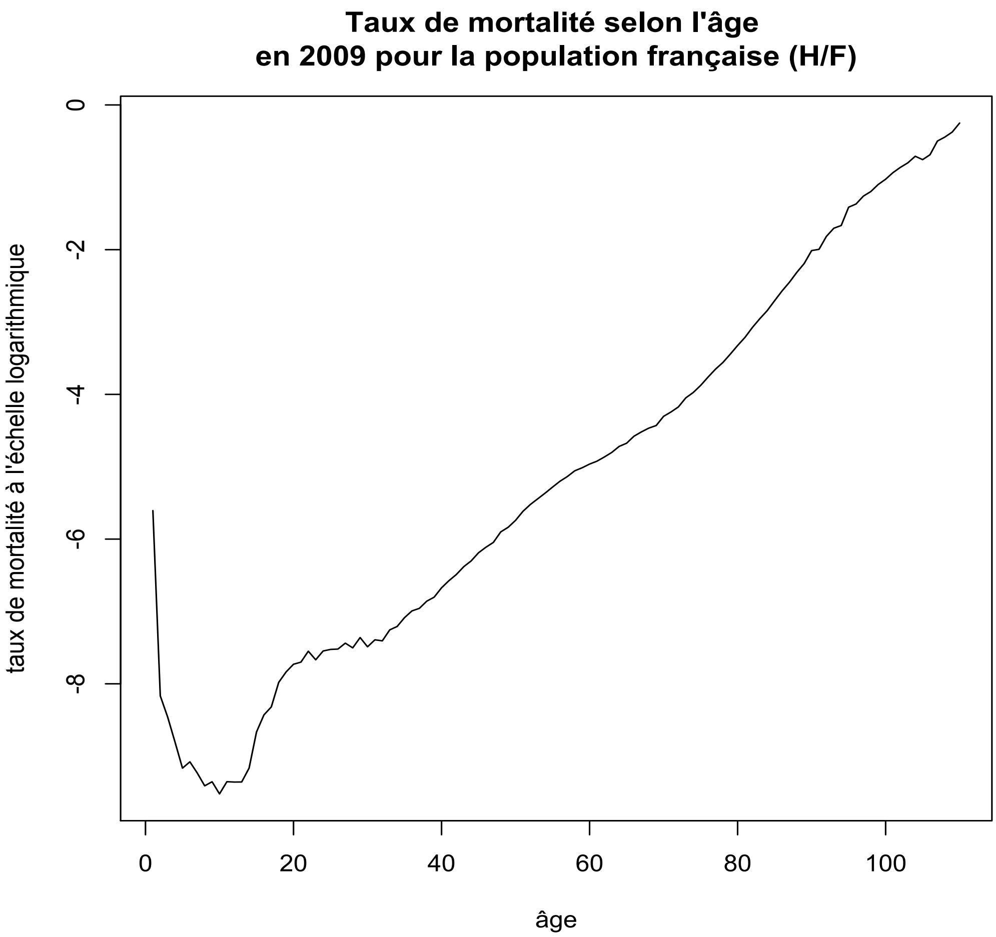

FIGURE 1 – Graphique de $x \mapsto \log(q_{x,t})$ à t fixé

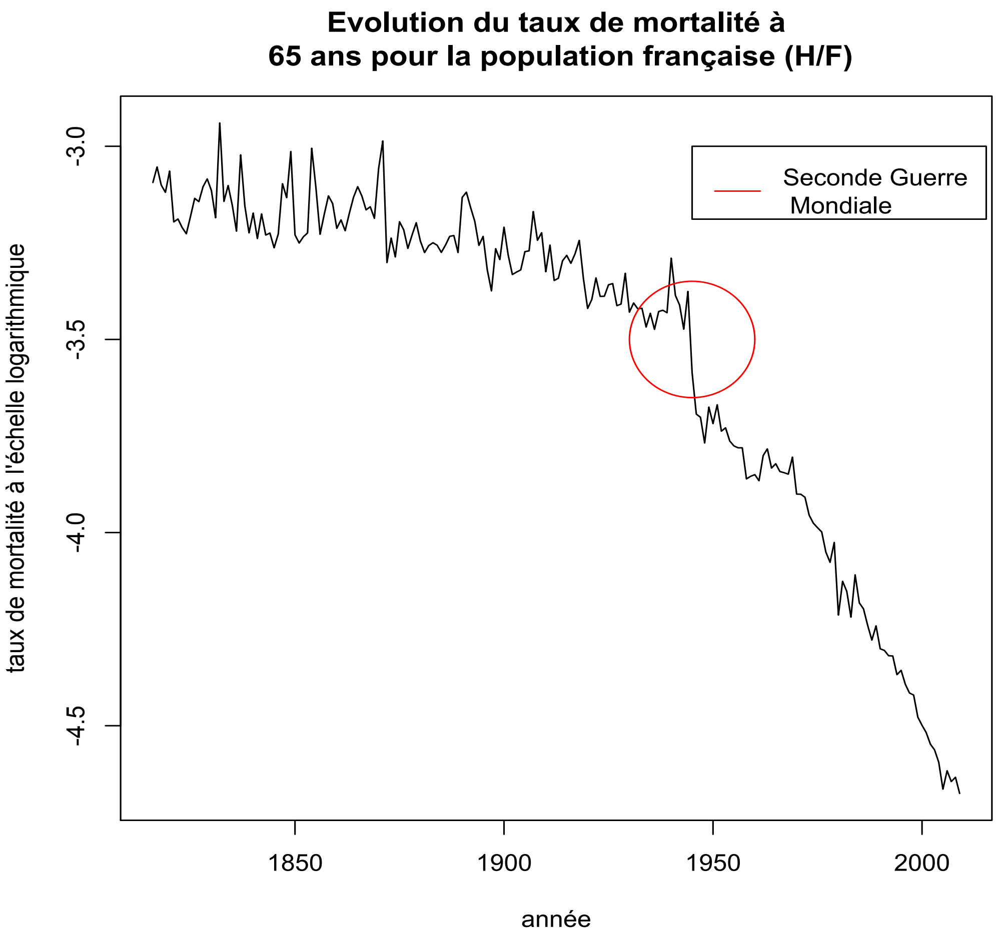

FIGURE 2 – Graphique de $t \mapsto \log(q_{x,t})$ à x fixé

Le risque de longévité a été longtemps reléguée au second plan en raison de taux de rendement financier élevés[III]. Aujourd'hui, de nombreux acteurs du secteurs ont pris conscience de son importance. En plus, historiquement, les régulateurs, les praticiens et les académiques ont systématiquement sous-estimer le progrès de l'espérance de vie, en Europe comme aux Etats-Unis.

3 La modélisation de l'évolution du taux de mortalité

Cette section présente quelques modèles de mortalité les plus étudiés. Elle ne se veut pas être une lecture exhaustive de la littérature mais a pour but d'illustrer les différents points de vue sur ce sujet qui intéresse les actuaires, les démographes et les bio-statisticiens depuis de longue date.

3.1 Approache série temporelle

Les modèles basés uniquement sur des techniques de séries temporelles sont les plus fréquemment utlisés dans la littérature. Pour chaque âge x fixé, la suite $(q_x(t), t = t_{\min}, ..., t_{\max})$ peut être vue comme une série chronologique. Ces séries sont de plus très corrélées car le phénomène

III. En effet, la prime collectée par l'assureur est placée sur les marchés financiers pour être se protéger contre l'inflation. Quand le taux d'intérêt est élevé, le revenu d'investissement de l'assureur est peut compenser des éventuelles pertes techniques, c'est-à-dire le cas où la prime reçue ne suffit pas à couvrir son engagement futur de longévité (ou une catastrophe naturelle) améliore (resp. aggrave) les taux de mortalité à tout âge. Or nous ne pouvons pas modéliser ces séries simultanément par des modèles de type VAR [IV] ou processus de diffusion, car la dimension (égale au nombre d'âges considérés) d'un tel processus multi-varié serait trop grande, ce qui rendrait l'estimation et la prédiction des modèles mentionnés très inefficace.

3.1.1 Modèle de Lee-Carter

Le modèle de Lee-Carter suppose, que l'évolution dans le temps de ces séries est entraînée par un processus commun, avec des degrés de sensibilité différentes pour des âges différents. Ces séries chronologiques sont supposées parfaitement corrélées et ainsi, le modèle réduit le nombre de séries temporelles à modéliser à 1. En d'autres termes, soit $\hat{\mu}_x(t)$ l'estimation brute de [V] $\mu_x(t)$, Lee & Carter [1] propose la paramétrisation suivante :

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t} \tag{1}$$

où les $\epsilon_{x,t}$ sont des termes d'erreurs centrées. Comme tous les modèles économétriques, les hypothèses supplémentaires peuvent être faites sur leurs lois et leur inter-dépendance (la plus simple étant "i.i.d. et gaussien").

Le modèle de Lee-Carter (1992, cf. [1]) est l'un des pionniers parmi les modèles de mortalités dits stochastiques. En effet, en calibrant les paramètres α_x, β_x et κ_t sur les données historiques, il suppose que α, β sont constants dans le temps et modélise les $(\kappa_t)_t$ par une série temporelle de type ARMA et la projette dans le futur. Ainsi, le modèle introduit l'idée que non seulement les nombres de décès sont aléatoires, mais la probabilité selon laquelle les décès se produisent est elle-même aléatoire.

La méthode de calibration initiale proposée par Lee & Carter [1] repose sur la décomposition d'une matrice en valeurs singulières, qui consiste à écrire (sous certaines conditions) une matrice rectangulaire en une somme optimale de matrices de rang 1 (c'est-à-dire de produits d'une matrice ligne par une matrice colonne). L'optimalité dont il est question signifie que la première matrice de rang 1 constitue la meilleure approximation de rang 1 de la matrice initiale. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Delwarde & Denuit [2] pour une justification théorique plus détaillée. D'autres méthodes de calibrations sont toutefois disponibles avec des hypothèses sur les résidus légèrement plus souples et réalistes.

3.1.2 Les généralisations du Lee-Carter

Le modèle de Lee-Carter a fait l'objet de nombreuses critiques et de généralisations. Certains proposent par exemple de continuer la décomposition en valeurs singulières jusqu'à l'ordre deux, à savoir

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_{1,x}\kappa_{1,t} + +\beta_{2,x}\kappa_{2,t} + \epsilon_{x,t} \tag{2}$$

Il existe en outre toute une autre classe d'extensions du Lee-Carter qui tient compte de l'effet génération (dite de cohorte par les démographes). En d'autres termes, ces modèles suppose que le taux de mortalité $q_x(t)$ dépend non seulement de l'âge x et de l'année t, mais également de l'année de naissance $t-x$. Par exemple, Renshaw & Haberman [12] propose le modèle suivant

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_{1,x}\kappa_{1,t} + +\beta_{2,x}\kappa_{2,t-x} + \epsilon_{x,t} \tag{3}$$

L'idée fondamentale de ces modèles (âge-période-cohorte) est que, nous pouvons décomposer l'amélioration de la mortalité en ces trois effets, qui sont indépendants : les progrès observés entre

IV. Vector autoregression

V. Nous définissons $\mu_x(t)$, appelée taux instantanée de mortalité, (ou la fonction du hasard) par

$$\mu_x(t) = -\log(1 - q_x(t))$$

deux périodes, qui concernent l'ensemble des âges et de cohortes , sont attribuables à la variable période, en revanche, les progrès observés entre deux cohortes, qui s'appliquent à l'ensemble des âges et des périodes, sont attribués à la variable cohorte. Par exemple, la canicule de l'été 2003 est essentiellement un effet période alors que l'augmentation du taux d'activité des femmes depuis quelques décennies est plutôt un effet de cohorte. Néanmoins, ces critères de classification restent qualitatives, une théorie explicative peine à voir le jour.

Un autre problème de ces variantes de Lee-Carter est que certains sont sur-paramétriés, ce qui rend l'estimation des paramètres peu robustes, et par conséquent, leur pouvoir de prédiction est limité. Nous pouvons alors imposer des *a priori* des structures à certains paramètres pour réduire la dimension. Par exemple, Cairns et al. [15] propose une version modifiée [VI] de l'équation 2 :

$$\mathrm{logit} q_x(t) = \kappa_{1,t} + (x - \overline{x})\ \kappa_{2,t} + \epsilon_{x,t} \tag{4}$$

où $\overline{x} = \frac{1}{2}(x_{\min} + x_{\max})$ quand on considère la plage d'âges $x_{\min},...,x_{\max}$. Par rapport à l'équation 2, ce modèle impose donc

$$\alpha_x = 0$$
$$\beta_{1,x} = 1$$
$$\beta_{2,x} = x - \overline{x}$$

Les travaux récents ont également étudié la possibilité de modéliser les paramètres indexés par l'âge tels que $\beta_{2,x}$ par des B-splines (basic spline) ou des P-splines [VII]. Pour une lecture plus détaillée, l'article de [9] est une excellente référence sur les techniques de lissage non-paramétriques (notamment les splines).

Un autre avantage de l'espérance de vie est qu'elle est simple :

3.2 Approache démographique

Rappelons d'abord que la plupart des modèles de mortalité qu'utilisent les actuaires sont élaborés par les démographes. Le modèle de Lee-Carter [1] que nous venons de décrire en fait également partie. Il a été d'abord utilisé pour projeter l'espérance de vie aux Etats-Unis. Celle-ci est un indicateur est un indicateur très important en démographie. Alors que les modèles de mortalité prenant en compte de l'allongement de vie date des années 1990, l'homme possède des historiques bien plus longs pour l'espérance de vie.

Traditionnellement les démographes calculent les espérances de vie dites périodiques. C'est l'espérance de vie pour une génération virtuelle dont la mortalité à chaque âge est donné par les taux de mortalité d'une même année. Dans la plupart des pays une section de statistiques du gouvernement (INSEE pour la France) est chargée de donner les taux de mortalité observés chaque année. L'espérance de vie périodique est alors facile à calculer et ne nécessite *a priori* pas de modèles sous-jacents. Il est également possible de calculer l'espérance de vie pour chaque vraie génération, cela nécessite l'estimation des taux de mortalité du futur et dépend donc du modèle choisi.

VI. Nous définissons la fonction logit par

$$]0,1[\mapsto \mathbb{R}$$
$$q \to \mathrm{logit} q = \log\left(\frac{q}{1-q}\right)$$

L'avantage d'introduire la fonction logit est de transformer le taux de mortalité q compris dans $]0,1[$ en une quantité dans $\mathbb{R}$ tout entier, *a priori* plus facile à modéliser.

VII. Pour la méthode de B-spline, le choix de B-spline optimal $x \mapsto \beta_x$ est obtenu en maximisant une fonction de logvraisemblance. Si la courbe initiale est peu régulière, alors le B-spline trouvé pourrait aussi l'être. L'idée des P-splines est alors d'ajouter un terme qui pénalise des variations brutes de la valeur de B-spline entre les points voisins, afin de garantir une meilleure régularité du B-spline obtenu.

Récemment (Canudas-Romo [21], 2008) a introduit le concept de *âge modal* au décès. Sa définition est la suivante : soit $f(\cdot, t)$ la fonction de répartition de l'âge au décès à l'année t. alors l'âge modal st défini comme

$$M(t) = \max_{x} f(t, y)$$

et la déviation autour de cet âge est

$$SD(M+)(t) = \sqrt{\frac{\int_{M(t)}^{\infty} (x - M(t))^2 f(x,t)dx}{\int_{M(t)}^{\infty} f(x,t)dx}}$$

Par conséquent, $M(t)$ est l'âge auquel le plus grand nombre de décès est observés, et $SD(M+)(t)$, équivalent de l'écart-type pour l'âge moyen au décès, mesure la concentration des décès autour de l'âge modal $M(t)$. Plus $SD(M+)(t)$ est petit, plus les décès sont concentrés autour de $M(t)$, les démographes parlent alors d'une *compression de mortalité.*

3.3 Approache biostatistique

frailty model and avis d espert et decomposition cause de deces et les modèles biostat Cox (propotionnal hazard model)

3.3.1 Modèles de survie

Les modèles de survie (ou dite de durée) sont, pour la plupart d'entre eux, issus de la statistique bio-médicales. Parmi eux nous pouvons notamment citer **le modèle du hasard proportionnel de Cox**, qui modélise la fonction de hasard d'une population hétérogène. C'est-à-dire, chaque individu possède un risque différent :

$$\mu(X) = \mu_0 \exp(\beta^T X)$$

où le vecteur X est la variable explicative de l'individu. On trouve dans le même état d'esprit un modèle plus élaboré, celui de frailty [VIII], où le facteur $e^{\beta^T X}$ est remplacé par un terme aléatoire :

$$\mu = \mu_0 Z$$

où Z est une variable aléatoire dont la loi est connue.

4 Aspects pratiques

4.1 Construction des tables de mortalité adaptées aux portefeuilles d'assurance

4.1.1 Antisélection et nécessité des tables propres au portefeuilles

Le phénoùène de l'antisélection est très marqué sur les portefeuilles de rentes. En effet, le souscripteur a souvent une meilleure connaissance de son état de santé que l'assureur, il a donc plus d'intérêt à acheter une rente s'il s'estime être en bonne santé. Par conséquent, l'assureur doit observer un niveau de mortalité plus faible sur son portefeuille que sur la population générale. Tarifier le contrat avec une table de mortalité construite sur la base de données nationales présente alors un grand risque de perte. D'où la nécessité de construire une table propre au portefeuille étudié.

VIII. *fragilité* en français

4.1.2 Difficultés

Or en pratique, de telles constructions sont assez délicates à mener. En effet, en général la taille des portefeuilles est très inférieure à la population générale, ce qui signifie une forte fluctuation des taux bruts. En plus, alors que nous possèdons des données de plus de 100 ans sur la mortalité des pays industrialisés, l'historique que possède l'assureur dépasse rarement 15 ans, il est alors assez difficile de bien mesurer la tendance d'évolution de la mortalité.

Le sujet des modèles de mortalité pour les petits échantillons ayqnt fait l'objet de mon rapport de stage [25] de l'été 2011, nous ne le développons pas dans ce mémoire. [25] propose quelques amélioration pour l'application du modèle Lee-Carter aux petits échantillons et s'intéresse également à la comparaison des méthodes usuelles, ainsi que le risque d'estimation et leur impact sur le calcul de l'engagement.

4.2 Solutions de couverture pour l'assureur

4.2.1 Réassurance

Pour éviter une trop grande volatilité de son résultat d'exploitation, l'assureur peut transférer une partie du risque viagère au réassureur [IX]. Des entraves existent cependant ce type de produits de réassurance. Premièrement, la capacité des réassureurs paraît limité (le risque de longévité étant un risque potentiellement de très grande ampleur), et le prix de tels produits est assez cher. Deuxièmement, les assureurs peuvent être réticents envers des contrats de long terme avec les réassureurs à cause du risque de crédit [X].

4.2.2 Titrisation (*Insurance-Linked Securities*)

Le concept de titrisation des risques d'assurance remonte aux années 1990 où des obligations indexées sur les risques de catastrophes naturelles sont apparues pour la première fois. L'idée est de profiter de la capacité du marché financier, qui est beaucoup plus grand que le marché de réassurance, pour transférer les risques extrêmes que portent un assureur (ou un réassureur) au marché. Quand la survenance des catastrophes dans une période prédéfinie dépasse un certain seuil (souvent un indice), le remboursement du coupon et du nominal est diminué pour compenser la perte de l'assureur. Cela constitue donc une alternative à la réassurance pour les assureurs. L'idée des titrisations de risque de mortalité est exactement similaire.

Si le principe paraît simple, sa mise en oeuvre demeure compliquée. En effet, pour attirer les investisseurs, ces produits de titrisation doivent avoir un profil de risque facile à comprendre pour eux. Il convient alors d'utiliser des indices transparents tels que les taux de mortalité de la population générale pour élaborer les produits. Or les assureurs cherche surtout à couvrir son propre risque de mortalité. Il y a alors un risque que la politique de couverture par des émission de titres soit insuffisant. L'assureur doit alors bien quantifier la corrélation (ou co-intégration) entre la mortalité de son portefeuille et celle de la population générale. Ce sujet a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et est loin d'être achevé.

Une autre problématique à la mode est la tarification des produits indexé sur la mortalité. La finance moderne a connu un grand essor durant les trente dernières années, grâce, entre autre, à l'utilisation des modèles mathématiques tels que Black-Scholes. La littérature est abondante sur ce sujet et nous ne rentrons pas en détail. Récemment plusieurs auteurs ont essayé d'appliquer ces modèles de finance quantitative au problème de tarification des produits de titrisation d'assurances, mais la théorie n'est qu'à ses débuts.

IX. La réassurance, pour schématiser, est lassurance des sociétés dassurances. Elle permet aux assureurs de faire face aux pics de sinistralité exceptionnels du type tempête Lothar de 1999 ou attentats du World Trade Center. Ainsi la réassurance aide à empêcher la faillite dun assureur qui na pas les fonds disponibles en cas de très grande catastrophe. Historiquement, la réassurance s'est développée d'abord dans les domaines de non-vie (tels que les incendies et les séïsmes), mais son domaine de compétence s'est étendue, petit à petit, à des risques vie (assurance santé, invalidité, dépendance, décès, longévité, etc.)

X. Le réassureur présente un risque de défaut, qui est d'autant (au moins comptablement) plus important quand la durée de l'engagement est long

Références

[1] R.D.Lee & L.R.Carter : *Modeling and forecasting U.S. mortality* (1992)

[2] A.Delwarde & M.Denuit : *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives, édition ECONOMICA*(1992)

[3] A.Tsybakov : *Introduction à l'estimation fonctionnelle*(2006)

[4] A.Cairns, D.Blake, K.Dowd, G.Coughlan, D.Epstein, A.Ong & I.Balevich : *A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States*(North American Actuarial Journal, 2009)

[5] V.Lelieur : *Utilisation des méthodes de Lee-Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons,* mémoire d'actuariat(2005)

[6] D.Hainaut : *Multi Dimensions Lee-Carter Model with Switching Mortality*

[7] F.Planchet : *Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers*

[8] B.Zhao : *A Modified Lee-Carter Model for Analyzing Short Base Period Data*

[9] I.D.Currie & M.Durba& P.H.C.Eilers : *Smoothing and forecasting mortality rates*

[10] C.Dengsøe & S.F.Jarner : *Amélioration de l'espérance de vie et viabilité des régimes de sécurité sociale, rapport national-Danemark,* (rapport présenté devant la conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale)

[11] N.Li & R.D.Lee : *Coherent mortality forecasts for a group of populations : An extension of the Lee-Carter method*

[12] A.Renshaw & S.Haberman : *A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors.*(2006)

[13] S.F.Jarner, E.M. Kryger & C.Dengsøe : *The evolution of death rates and life expectancy in Denmark*(2008)

[14] S.Loisel & D.Serant : *In the Core of Longevity Risk : Dependence in Stochastic Mortality Models and Cut-offs in Prices of Longevity Swaps*(2007)

[15] A.Cairns & D.Blake & K.Dowd : *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty : Theory and Calibration*(2006)

[16] J.Bongaarts : *Long-Range Trends in Adult Mortality : Models And Projection Methods*(2004)

[17] F.Planchet : *Risque de longévité et détermination du besoin en capital*(2008)

[18] F.Meslé : *Espérance de vie : un avantage féminin menacé ?*(2004)

[19] L.guerin : *Construction de tables de mortalité féminines par génération à partir d'une approche par grandes causes médicales de décès - modélisations Lee-Carter,* mémoire d'actuariat(2006)

[20] M.-B.Viville : *Comparaison de méthodes d'ajustement de la mortalité des rentiers dans un but prospectif,* mémoire d'actuariat(2008)

[21] V.Canudas-Romo : *The modal age at death and the shifting mortality hypothesis*(2008)

[22] Swiss Re : *A Window into the Future : Understanding and Predicting Longevity* (2011)

[23] H.Booth & L.Tickle : *Mortality modelling and forecasting : A review of methods*(2008)

[24] A.Quashie & M.Denuit : *Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges*(2005)

[25] Yang Lu : *Modèles stochastiques de mortalité pour des petits échantillons : quelques améliorations et comparaisons,* rapport de stage(2011)