

# Quelques aspects de théorie de Morse différentiable et discrète

*Introduction à un domaine de recherche*

Antoine Fermé  
*encadré par*  
Emmanuel Ferrand

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorie de Morse lisse</b>	<b>2</b>
1.1 Fonctions de Morse . . . . .	2
1.2 Abondance des fonctions de Morse . . . . .	3
1.2.1 Stratification naturelle de l'espace des fonctions lisses . . . . .	3
1.2.2 Famille de fonctions et diagrammes de Cerf associé . . . . .	4
1.2.3 Exemple : La lemniscate de Geronon . . . . .	5
1.3 Complexe associé à une fonction de Morse . . . . .	6
1.4 Bifurcations du complexe de Morse-Thom-Smale . . . . .	8
<b>2 Théorie de Morse discrète</b>	<b>8</b>
2.1 Fonctions de Morse discrètes . . . . .	8
2.1.1 CW-complexe bien recollé et collapse . . . . .	8
2.1.2 Fonction de Morse discrète . . . . .	9
2.1.3 Gradient discret . . . . .	10
2.1.4 Complexe de Morse-Forman . . . . .	11
2.2 Familles de fonctions de Morse discrètes ? . . . . .	12

## Introduction

La motivation originale de ce travail était de chercher, suivant le principe de René Thom si fructueux en théorie des singularités, comment *mettre en famille* des fonctions de Morse discrètes. Le but étant d'y trouver des possibilités analogues aux familles à paramètres de fonctions différentiables. Une définition naïve de famille se révélant triviale, nous avons étudié divers aspects de la théorie de Morse "classique" (*i.e.* différentiable) et de la "nouvelle" théorie de Morse discrète, en espérant comprendre ce qui peut se transporter d'un monde à l'autre.

# 1 Théorie de Morse lisse

## 1.1 Fonctions de Morse

**Définition 1.1.1.** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application lisse entre deux variétés différentielles.

Un point  $x \in V$  est un *point régulier de  $f$*  si  $f$  est submersive en  $x$ . Sinon,  $x$  est un *point critique de  $f$* . Un point  $y \in W$  est une *valeur critique de  $f$*  s'il existe un point critique  $x \in f^{-1}(y)$ . Dans le cas contraire  $y$  est une *valeur régulière de  $f$* .

Nous noterons  $\text{Crit}(f)$  l'ensemble des points critiques de  $f$ .

*Remarque 1.1.2.* Une valeur régulière n'est pas forcément une valeur atteinte par  $f$ . En fait tout point de  $W \setminus f(V)$  est une valeur régulière de  $f$ .

*Note 1.1.3.* Si on note  $T_x f$  l'application tangente à  $f$  en  $x$  :

$$x \text{ point critique de } f \iff T_x f : T_x V \rightarrow T_{f(x)} W \text{ n'est pas de rang maximal.}$$

En particulier si  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $df$  est la 1-forme différentielle associée à  $f$  alors

$$x \text{ point critique de } f \iff df_x = 0$$

À partir de maintenant  $V$  désignera toujours une variété différentielle de dimension  $n$ , et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse sur  $V$ . Bien que la différentielle de  $f$  en un point  $x$  de  $V$  soit bien définie, ses dérivés d'ordre supérieures dépendent en général de la carte choisie. Miraculeusement, il se trouve que si  $x$  est un point critique de  $f$ , sa dérivée d'ordre 2 acquiert un sens intrinsèque :

**Proposition 1.1.4.** Soit  $x \in V$  un point critique de  $f$ . La différentielle seconde de  $f$  en  $x$  est une forme bilinéaire symétrique bien définie sur  $T_x V$  par la formule :

$$(1.1.1) \quad \forall X, Y \in T_x V \quad (d^2 f)_x(X, Y) = X \cdot (\tilde{Y} \cdot f)$$

Où l'action d'un vecteur de  $T_x V$  sur une fonction est définie par :

$$X \cdot f = df_x(X)$$

Et  $\tilde{Y}$  est un champ de vecteurs défini au voisinage de  $x$  prolongeant  $Y$  (i.e. tel que  $\tilde{Y}_x = Y$ ), de telle sorte que  $\tilde{Y} \cdot f$  corresponde à  $y \mapsto df_y(\tilde{Y}_y)$ .

*Démonstration.* On a l'identité suivante :

$$X \cdot (\tilde{Y} \cdot f) - Y \cdot (\tilde{X} \cdot f) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_x \cdot f = df_x([\tilde{X}, \tilde{Y}]_x) = 0 \text{ car } x \text{ critique,}$$

qui permet de déduire que (1.1.1) ne dépend pas du choix de prolongement de  $Y$  et que  $d^2 f$  est bien une forme bilinéaire symétrique.  $\square$

**Définition 1.1.5.** Un point critique de  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est *non-dégénéré* si  $(d^2 f)_x$  est une forme bilinéaire non-dégénérée. L'*indice* de  $f$  en  $x$  est alors défini comme le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicité) de  $(d^2 f)_x$ , ou de manière équivalente comme la dimension maximale d'un sous-espace de  $T_x V$  sur lequel  $(d^2 f)_x$  est définie négative. L'indice d'un point critique, étant relié directement à la signature d'une forme quadratique, est indépendant du choix d'un système de coordonnées locales. C'est un entier compris entre 0 et  $n$  noté  $I(x)$ . De plus on note  $\text{Crit}_k(f)$  l'ensemble des points critiques non-dégénérés d'indice  $k$  de  $f$ .

**Définition 1.1.6.** Une fonction lisse  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est *de Morse* si tous ses points critiques sont non-dégénérés.

**Définition 1.1.7.** Une fonction de Morse est *excellente* si l'ensemble de ses valeurs critiques est en bijection avec l'ensemble de ses points critiques, *i.e.*  $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y)$  contient au plus un point critique.

Les fonctions de Morse ont une forme canonique au voisinage de leurs points critiques. Réciproquement cette forme caractérise les points critiques non-dégénérés (aussi appelés *points de type Morse*).

**Théorème 1.1.8.** (*Lemme de Morse [Mil63]*) Soit  $x$  un point critique non-dégénéré de  $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors il existe un système de coordonnées local  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$ , telle qu'on ait dans cette carte<sup>1</sup> :

$$f(y) = f(x) - \|y_-\|^2 + \|y_+\|^2$$

où  $y_- = (y_1, \dots, y_k)$  et  $y_+ = (y_{k+1}, \dots, y_n)$  avec  $k$  l'indice de  $f$  en  $x$ , et  $\|\cdot\|^2$  est la norme euclidienne canonique *i.e.* la somme des carrés des coordonnées. Un tel couple  $(\mathcal{U}, y)$  est appelé une carte de Morse de  $f$  en  $x$ .

## 1.2 Abondance des fonctions de Morse

### 1.2.1 Stratification naturelle de l'espace des fonctions lisses

Définissons les sous-ensembles suivants de l'espace des fonctions infiniment différentiables définies sur la variété  $V$  :

1.  $\mathcal{F}^0 \subset C^\infty(V)$  l'ensemble des fonctions de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes (*i.e.* excellentes).
2.  $\mathcal{F}_\alpha^1 \subset C^\infty(V)$  l'ensemble des fonctions de Morse qui ont exactement une valeur critique double (donc non excellentes).
3.  $\mathcal{F}_\beta^1 \subset C^\infty(V)$  l'ensemble des fonctions dont toutes les valeurs critiques sont distinctes, et tous les points critiques sont non-dégénérés (*i.e.* de type Morse) sauf un qui est de type *naissance-mort*. En ce point critique, il existe une carte locale  $y = (y_1, \dots, y_n)$  telle que  $f$  prenne la forme (au terme constant près) :

$$(1.2.1) \quad y_1^3 - y_2^2 - \dots - y_{k+1}^2 + y_{k+2}^2 + \dots + y_n^2$$

Tous ces sous-ensembles sont disjoints. De plus  $\mathcal{F}^0$ , et  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}_\alpha^1 \cup \mathcal{F}_\beta^1$  forment un début de stratification de  $C^\infty(V)$ . En effet on peut munir  $C^\infty(V)$  d'une topologie<sup>2</sup> telle que :

**Proposition 1.2.1.** *La strate  $\mathcal{F}^0$  des fonctions de Morse excellentes sur  $V$  est un ouvert dense de  $\mathcal{F} = C^\infty(V)$ .*

---

1. Nous supposons toujours que les cartes en un point  $x$  de  $V$ , envoient  $x$  sur l'origine de  $\mathbb{R}^n$  *i.e.* le point  $y = 0$  correspond à  $x$ .

2. En réalité on définit deux topologies sur  $C^\infty(V)$  qui coïncident si  $V$  est compacte, et dont l'une est strictement plus fine sinon (voir la section 2.1 de [Hir76]).

*Note 1.2.2.* La suite de la stratification est du même acabit : chaque  $\mathcal{F}^i$  contient différentes composantes connexes, dont les fonctions diffèrent par le type de point critique rencontré, la multiplicité de valeurs critiques, et le nombre de ces phénomènes. Par exemple, la décomposition de  $\mathcal{F}^2$  est la suivante :

- les fonctions dont toutes les valeurs critiques sont distinctes, et tous les points critiques sont de Morse, sauf un de la forme  $-y_1^4 - y_2^2 - \dots - y_{k+1}^2 + y_{k+2}^2 + \dots + y_n^2$ .
- les fonctions dont toutes les valeurs critiques sont distinctes, et tous les points critiques sont de Morse, sauf deux qui sont de type naissance-mort.
- les fonctions qui ont exactement un point dégénéré de type naissance-mort, et une valeur critique double correspondant à deux points de Morse.
- les fonctions qui ont exactement un point dégénéré de type naissance-mort, et une valeur critique double correspondant à un point de Morse et au point de naissance-mort.
- les fonctions de Morse qui ont exactement une valeur critique triple.
- les fonctions de Morse qui ont exactement deux valeurs critiques doubles.

### 1.2.2 Famille de fonctions et diagrammes de Cerf associé

**Définition 1.2.3.** Soit  $\Lambda$  une variété avec ou sans bord (pas forcément compacte). Une *famille à paramètres de fonctions* sur  $V$  est une fonction (lisse) :

$$\begin{aligned} f : \Lambda \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) &\mapsto f_\lambda(x) = f(\lambda, x). \end{aligned}$$

Tandis que  $V$  est l'espace de définition de la famille  $f$ ,  $\Lambda$  est appelé l'espace des paramètres de cette famille. Si  $\Lambda$  est de dimension  $k$ , on dira que  $f$  est une famille à  $k$  paramètres. De plus si  $\Lambda = [a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , on dira que  $f$  est un *chemin de fonctions* reliant  $f_a$  à  $f_b$ .

Ces termes sont justifiés par le fait que si on fixe un point de l'espace des paramètres  $\lambda \in \Lambda$ , alors  $f_\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une simple fonction définie sur  $V$ . En faisant varier les paramètres  $\lambda$ , on obtient de nouvelles fonctions de manière lisse, d'où la réalisation du principe de "famille".

*Remarque 1.2.4.* On peut tout aussi bien considérer  $f$  comme une famille sur  $\Lambda$  et  $V$  comme l'espace des paramètres. Les fonctions de la famille sont alors les  $f^x = f(\bullet, x)$  pour  $x \in V$ . De plus on peut considérer  $f$  comme une seule fonction sur la variété produit  $\Lambda \times V$ . Ces différents points de vue nous seront utiles dans la seconde partie pour chercher une définition de famille dans la catégorie discrète.

**Définition 1.2.5.** Soit  $f : [0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un chemin de fonctions. On peut lui associer deux courbes (figure 1) :

- L' *indicatrice*  $\mathcal{I}$  de  $f$ , le "lieu des points critiques" : c'est la partie de  $V \times [0, 1]$  formée des  $(\lambda, x)$  tels que  $x$  soit un point critique de  $f_\lambda$ .
- Le *diagramme de bifurcations*  $\mathcal{C}$ , aussi appelé *diagramme de Cerf*, de  $f$ , le "graphe des valeurs critiques" : c'est l'image de l'indicatrice par l'application  $(x, \lambda) \mapsto (\lambda, f_\lambda(x))$  i.e. la partie de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  formée des  $(\lambda, \alpha)$  tel que  $\alpha$  soit une valeur critique de  $f_\lambda$ .

L'indicatrice est certainement l'objet qui nous intéresse le plus, car il explicite complètement la dynamique des points critiques de  $f_t$  quand  $t$  varie. Néanmoins c'est un sous-ensemble de  $V \times [0, 1]$ , donc difficile à visualiser dès que  $V$  est de dimension  $\geq 2$ . Au contraire, le diagramme de Cerf est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , et, si le chemin observé est suffisamment "bon" – i.e. si presque toutes ses fonctions sont de Morse excellentes – on peut y lire la plupart

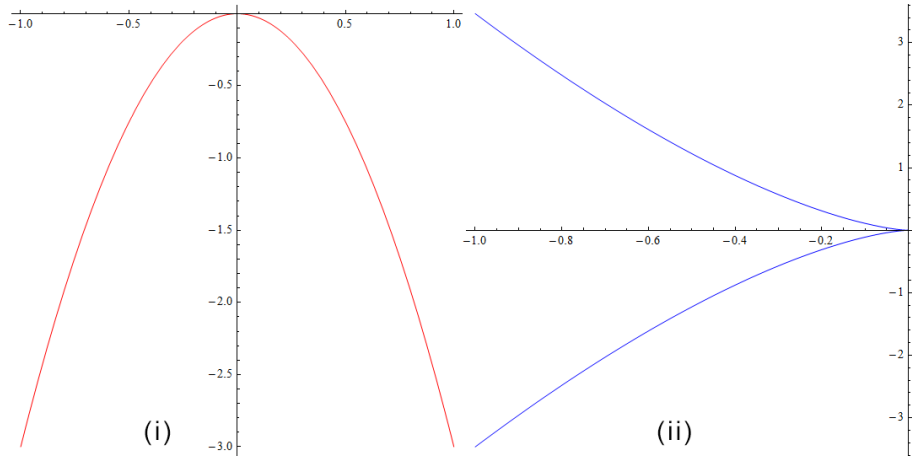


FIGURE 1 – Indicatrice (i) et diagramme de Cerf (ii) de la famille  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}, (t, x) \mapsto x^3 + tx$ . Sur (i) le temps est en ordonnée, et la position des points critiques en abscisse. Sur (ii) le temps est en abscisse et les valeurs critiques en ordonnée. Cette famille a deux points critiques de Morse pour  $t < 0$ , un point critique de naissance-mort pour  $t = 0$ , et aucun point critique si  $t > 0$ .

des informations qu'on aimerait extraire de l'indicatrice. En effet pour une fonction de Morse excellente, on a une bijection entre les points critiques et les valeurs critiques. Donc sur un intervalle de temps tel que les  $f_t$  sont toutes des fonctions de Morse excellentes, on a une bijection entre les branches du diagramme de Cerf et les branches de l'indicatrice, *i.e.* on peut identifier les points critiques et suivre leur évolution directement sur le diagramme de Cerf.

La définition précise de chemin suffisamment "bon" est la suivante :

**Définition 1.2.6.** Soit  $f$  un chemin de fonctions  $[0, 1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  est *excellent* si :

- Il est à valeurs dans  $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$
- Il ne rencontre  $\mathcal{F}^1$  qu'en un nombre fini de points
- En chaque point où il rencontre  $\mathcal{F}^1$ , les points d'intersection du diagramme de Cerf de  $f$  sont transverses.

Alors, le résultat suivant - dû à J.Cerf dans [Cer70]- permet de dire qu'on peut toujours se restreindre à étudier de tels chemins, pourvu qu'on cherche à joindre deux fonctions de  $\mathcal{F}^0$ .

**Théorème 1.2.7.** *L'espace des chemins excellents est un ouvert dense de l'espace de tous les chemins dans  $\mathcal{F}$ . En particulier, pour tout  $f_0, f_1 \in \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$  il existe un chemin excellent reliant  $f_0$  à  $f_1$ .*

### 1.2.3 Exemple : La lemniscate de Geronio

Soit

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow x^4 - x^2 + y^2.$$

Le niveau 0 de  $G$  est une sous-variété immergée de  $\mathbb{R}^2$  (appelée ainsi car étudiée par C.-C. Geronio au 19ème siècle). C'est une immersion du cercle  $V = \mathbb{S}^1$  avec un point double en  $(0, 0)$  (voir figure 2). Cette immersion est paramétrisée par :

$$\forall u \in ]-\pi, \pi] \quad \iota(u) = \begin{cases} x(u) = \cos(u) \\ y(u) = \cos(u) \sin(u) \end{cases}$$

Considérons la famille de fonctions :

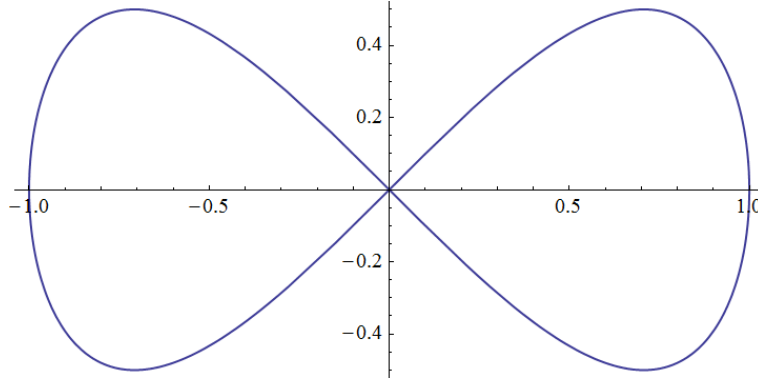


FIGURE 2 – La lemniscate de Gerono.

$$F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) \rightarrow \langle \lambda, x \rangle$$

*i.e.* ce sont les fonctions "hauteurs" pour toutes les directions de  $\mathbb{R}^2$ . On vérifie à la main que la famille  $f$  - induite par  $F$  via composition avec l'immersion de  $\mathbb{S}^1$  décrite plus haut - est composée de fonctions  $f_t$  qui sont toutes de Morse excellente sauf un nombre fini de temps  $t_i$  où  $f_{t_i} \notin \mathcal{F}^0$ . On a représenté quelques-unes de ces fonctions sur la figure 3.

Si  $-\frac{\pi}{3} < t \bmod \pi < \frac{\pi}{3}$  elles ont deux points critiques : un maximum  $M$  et un minimum  $m$ ; si  $\frac{\pi}{3} < t \bmod \pi < \frac{2\pi}{3}$  elles ont quatre points critiques deux maxima et deux minima. Si on calcule le diagramme de Cerf (figure 4) et l'indicatrice du chemin  $(f_\theta)_\theta$ , on voit que  $f_\theta$  est de Morse excellente sauf en  $\theta = \frac{\pi}{3} \bmod \pi$  où  $f_\theta$  a un point de naissance,  $\theta = \frac{\pi}{3} \bmod \pi$  où elle a un point de mort, et  $\theta = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$  où elle a un point de croisement. On en conclut que ce chemin est excellent.

### 1.3 Complexe associé à une fonction de Morse

Soit  $f$  une fonction de Morse sur la variété  $V^n$ . Souvenons-nous que si l'on se donne une structure riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $V$ , on peut définir le *gradient* de  $f$  comme le champ de vecteurs sur  $V$  défini par :

$$\forall y \in V \quad \forall Y \in T_y V \quad \langle (\mathbf{grad} f)_y, Y \rangle = df_y(Y)$$

Conformément à la vision physique d'un flot descendant le long de  $V$ , nous prendrons comme convention de désigner par *gradient* le champ de gradient "descendant"  $-\mathbf{grad} f$ .

Muni de ce champ de vecteurs  $X = -\mathbf{grad} f$ , on peut définir un complexe de chaînes de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -modules engendrés par les points critiques de  $f^3$ .

**Définition 1.3.1.** Le *complexe de Morse-Thom-Smale*  $(C_*(f), \partial_X)$  est défini par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C_k(f) = \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} \mathbb{Z}x.$$

---

3. En fait, il faut supposer que  $X$  vérifie une condition supplémentaire dite *de Smale*. Mais si la métrique riemannienne choisie sur  $V$  est générique  $-\mathbf{grad} f$  fait l'affaire.

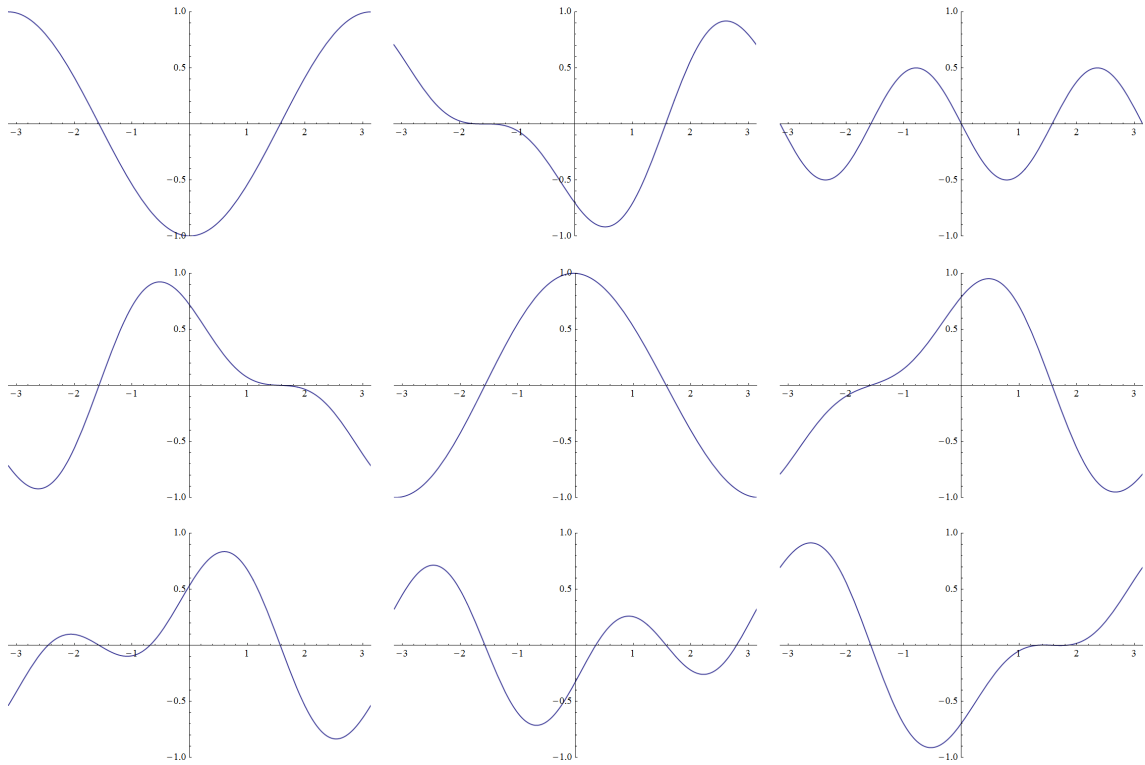


FIGURE 3 – La fonction  $f_\theta$  sur le cercle ( $[-\pi, \pi]$  recollé aux bords) pour des valeurs croissantes de  $\theta$  de 0 à  $2\pi$  (dans le sens de lecture) en exhibant les accidents.

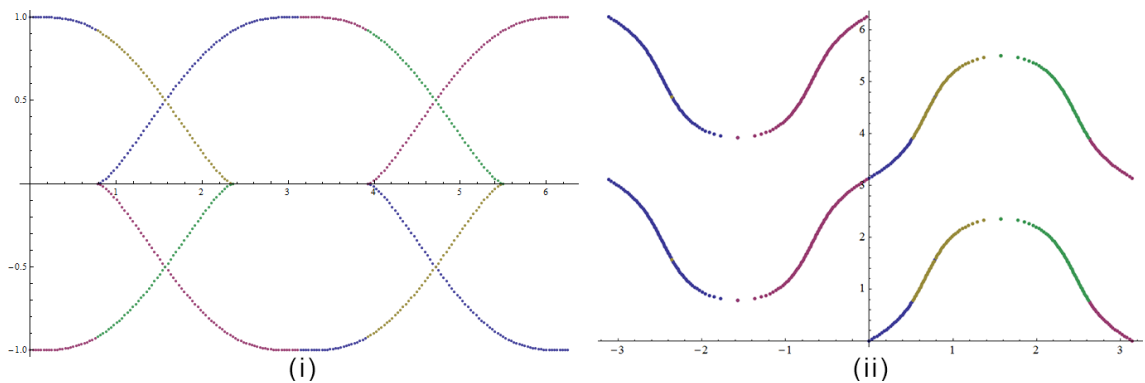


FIGURE 4 – (i) Le diagramme de Cerf de la famille  $f_\theta$  sur le cercle (en abscisse  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ ). (ii) Son indicatrice (en ordonnée  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ ) sur le cercle vu comme l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  recollé aux bords. On peut y suivre le trajet des points critiques sur  $\mathbb{S}^1$ . On remarque que les tangentes horizontales correspondent aux naissances (ou morts selon si l'indicatrice est **au-dessus** ou **en-dessous** de sa tangente) de points critiques.

On a évidemment  $C_k(f) = 0$  si  $k < 0$  ou si  $k > n$ . L'application bord  $\partial : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f, X)$  est défini sur les générateurs, puis étendu par linéarité à  $C_k(f, X)$ , via la formule :

$$\text{Si } x \in \text{Crit}_k(f), \partial x = \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y)y = \sum_{\{y; I(x)-I(y)=1\}} n(x, y)y$$

où  $n(x, y)$  est le nombre modulo 2 de courbes intégrales de  $X$  (*i.e.* de lignes de gradient descendant de  $f$ ) joignant le point  $x$  au point  $y$ .

**Théorème 1.3.2.** *L'homologie  $H_*^{\text{Morse}}(V)$  de ce complexe ne dépend pas du choix du couple  $(f, X)$ . Elle est isomorphe à  $H_*^{\text{Sing}}(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  l'homologie singulière modulo 2 de  $V$ .*

## 1.4 Bifurcations du complexe de Morse-Thom-Smale

Supposons qu'on ait un chemin excellent  $f$  joignant deux fonctions de  $\mathcal{F}^0$ . Alors on peut définir leur complexe associé, en tout temps où  $f_t$  est de Morse. On peut montrer que le complexe de Morse-Thom-Smale est inchangé sur un intervalle de temps où  $f_t$  est de Morse excellente. Par contre si  $f$  traverse la strate  $\mathcal{F}^1$ , le complexe peut subir des *bifurcations*, qu'on peut aussi classifier.

Ainsi, de manière réciproque, en comparant les complexes de Morse associés à deux fonctions de Morse, on peut calculer le nombre minimum de bifurcations nécessaires pour transformer le premier complexe en le second. Et en déduire, le nombre d'accidents minimal sur tout chemin excellent joignant  $f_0$  à  $f_1$ .

## 2 Théorie de Morse discrète

### 2.1 Fonctions de Morse discrètes

#### 2.1.1 CW-complexe bien recollé et collapse

Soit  $\Delta$  un CW-complexe (voir l'appendice de [Hat02] pour les définitions et propriétés classiques). On note  $\mathcal{C}_\Delta$  l'ensemble de cellules de  $\Delta$ . La notation  $\sigma^k$  fait référence à une cellule  $\sigma$  de dimension  $k$ . Pour indiquer les relations d'appartenance entre les cellules, on note  $\tau > \sigma$  (ou  $\sigma < \tau$ ) quand  $\sigma \neq \tau$  et  $\sigma \subset \bar{\tau}$  où  $\bar{\tau}$  est l'adhérence de  $\tau$  dans  $\Delta$ . On note  $\tau \geq \sigma$  si  $\tau = \sigma$  ou  $\tau > \sigma$ .

Supposons que  $\sigma^k$  soit une face de  $\tau^{k+1}$ . Notons  $\bar{\mathbb{D}}^{k+1}$  la  $k+1$ -boule fermée, soit :

$$\phi : \bar{\mathbb{D}}^{k+1} \rightarrow \delta$$

l'application caractéristique de  $\tau$  *i.e.*  $\phi$  est une application continue qui est un homéomorphisme de  $\bar{\mathbb{D}}^{k+1}$  sur  $\tau$  :

**Définition 2.1.1.** (face bien recollée) La face  $\sigma^k$  de  $\tau^{k+1}$  est *bien recollée* si :

- $\phi : \phi^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$  est un homéomorphisme,
- $\overline{\phi^{-1}(\sigma)}$  est une  $k$ -boule fermée dans  $\partial\bar{\mathbb{D}}^{k+1} = \mathbb{S}^k$ .

Sinon on dit que  $\sigma$  est une face *mal recollée* de  $\tau$ .

Un CW-complexe est *bien recollé* (ou *régulier*) si toutes ses faces sont bien recollées. En particulier un polyèdre (avec une décomposition polyédrique fixée) ou un complexe simplicial est toujours un CW-complexe bien recollé.



### 2.1.2 Fonction de Morse discrète

Soit  $\Delta$  un CW-complexe fini (*i.e.* compact) bien recollé, et  $\mathcal{C}^\Delta$  l'ensemble de ses cellules.

**Définition 2.1.2.** Une *fonction de Morse discrète* sur  $\Delta$  est une assignation d'un nombre réel à chaque cellule de  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto f(\sigma) \end{aligned}$$

qui vérifie les contraintes suivantes pour tout  $\sigma \in \mathcal{C}_k^\Delta$  :

$$\#\{\tau^{k+1} > \sigma; f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$$

$$\#\{\nu^{k-1} < \sigma; f(\nu) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$$

**Définition 2.1.3.** Soit  $f$  une fonction de Morse discrète sur  $\Delta$ , alors  $\sigma \in \mathcal{C}_k^\Delta$  est un point critique d'indice  $k$  (ou une *k-cellule critique*) si :

1.  $\#\{\tau^{k+1} > \sigma; f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$ .
2.  $\#\{\nu^{k-1} < \sigma; f(\nu) \geq f(\sigma)\} = 0$ .

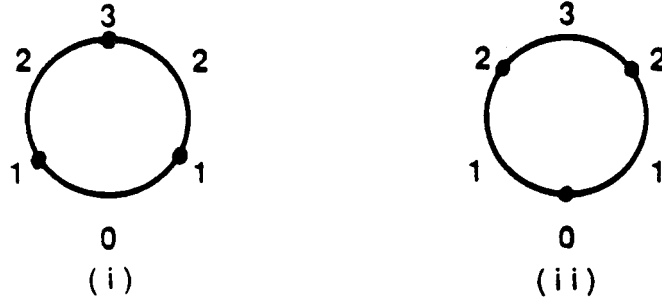


FIGURE 5 – de [For98]. La figure (ii) définit bien une fonction de Morse discrète, ses cellules critiques sont  $f^{-1}(0)$  et  $f^{-1}(3)$ . Par contre (i) enfreint la condition 2 pour la 1-cellule du bas  $\sigma : \#\{\nu^0 < \sigma; f(\nu) \geq f(\sigma)\} = 2$ , et la condition 1 pour la 0-cellule du haut  $\sigma' : \#\{\tau^1 > \sigma'; f(\tau) \leq f(\sigma')\} = 2$ .

Une fonction de Morse discrète est donc globalement croissante avec la dimension des cellules, sauf en une face, ou une coface. Une cellule critique est exactement une cellule où  $f$  est "strictement croissante", et son indice est alors égal à sa dimension. Une  $k$ -cellule n'est pas critique si et seulement si l'une des conditions suivantes (qui ne peuvent être vraies en même temps) est vérifiée :

- (a)  $\exists \tau^{k+1} > \sigma$  tel que  $f(\tau) \leq f(\sigma)$
- (b)  $\exists \nu^{k-1} < \sigma$  tel que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$

*Remarque 2.1.4.* Cette définition est bien un analogue discret de la notion de point critique d'indice  $k$ . Par exemple si  $x$  est un point critique d'indice  $k = 1$  d'une fonction de Morse lisse  $f$ , cette fonction a la forme suivante dans une carte de Morse :

$$f(y) = f(0) - y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

Elle est décroissante des deux côtés selon la direction  $y_1$  et croissante dans toutes les directions transverses. Maintenant si  $\sigma$  est une arête critique d'une fonction de Morse discrète  $f$  sur un

complexe simplicial. Alors  $f$  est strictement plus grande sur  $\sigma$  que sur chacun des points de son bord, et inférieur à sa valeur sur un 2-simplexe dont le bord contient  $\sigma$  (voir la figure 6). Dit autrement,  $f$  décroît quand on se déplace le long de l'arête  $\sigma$  vers ses bords, et croît dans les directions transverses.

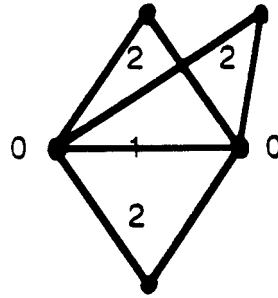


FIGURE 6 – de [For98]. Une 1-cellule critique.

### 2.1.3 Gradient discret

**Définition 2.1.5.** Un *champ de vecteurs discret*  $V$  sur  $\Delta$  est un ensemble de couples  $(\sigma^k < \tau^{k+1})$  de cellules de  $\Delta$  tel que chaque cellule est dans au plus un couple.

La représentation graphique sur  $\Delta$  d'un tel  $V$  consiste, pour chaque couple de  $V$ , à tracer une flèche qui part de  $\sigma^k$  pour aller vers  $\tau^{k+1}$  (figure 7). On peut aussi voir  $V$  comme une application :

$$V : \mathcal{C}_\Delta \rightarrow \mathcal{C}_\Delta \cup 0$$

$$\sigma^k \mapsto V(\sigma) = \begin{cases} \tau^{k+1} & \text{si } (\sigma, \tau) \in V \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



FIGURE 7 – de [For98]. Un champ de vecteurs discrets.

Fixons  $f$  une fonction de Morse discrète sur  $\Delta$ . On peut définir son gradient  $V_f$  comme le champ de vecteurs discret suivant : Soit  $\sigma^k$  une cellule non-critique. Il y a deux possibilités :

- il existe une  $k - 1$ -cellule  $\nu^{k-1} < \sigma$  telle que  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ , alors  $(\nu, \sigma) \in V_f$ ,
- il existe une  $k + 1$ -cellule  $\sigma < \tau^{k+1}$  telle que  $f(\sigma) \geq f(\tau)$ , alors  $(\sigma, \tau) \in V_f$ .

Les flèches de  $V_f$  indiquent les "défauts de croissance de  $f$  avec la dimension des cellules". Les cellules non-couplées dans  $V_f$  sont donc exactement les cellules critiques de  $f$  (figure 8).

On peut définir l'analogue des courbes intégrales, pour un champ de vecteurs discret :

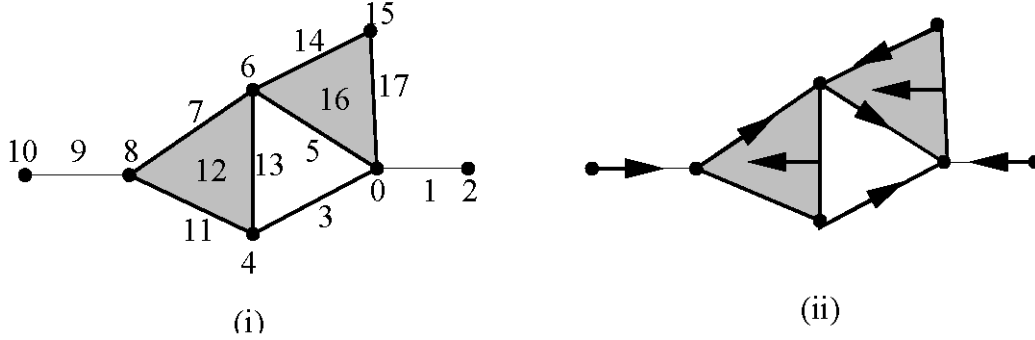


FIGURE 8 – de [For02]. (ii) est le gradient discret associé à la fonction de Morse discrète (i).

**Définition 2.1.6.** Soit  $V$  un champ de vecteurs discret sur  $\Delta$ . Soit  $r \geq 0$ , une  $V$ -orbite de longueur  $r$  est une suite de  $k$ -cellules :

$$(2.1.1) \quad \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$$

telle que  $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$  et  $\sigma_{i+1} < V(\sigma_i)$  i.e.  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  sont deux faces différentes de la même  $k+1$ -cellule. Si  $V = V_f$  on dira qu'une  $V_f$ -orbite est une *ligne de gradient de  $f$* .

#### 2.1.4 Complexe de Morse-Forman

Supposons donc que le complexe des chaînes cellulaires du CW-complexe  $\Delta$  soit bien défini, i.e. on a fixé une orientation de chaque cellule de  $\Delta$ .

**Définition 2.1.7.** Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux cellules orientées. Le *nombre d'incidence* entre  $\sigma$  et  $\tau$  noté  $\langle \sigma, \tau \rangle \in \{-1, 0, 1\}$  est défini par (et étendu par linéarité aux chaînes cellulaires) :

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ -1 & \text{si } \sigma = -\tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $V$  le gradient discret de  $f$ . Alors pour une  $k$ -cellule  $\sigma$ , on oriente la  $k+1$ -cellule  $V(\sigma)$  par la convention

$$\langle \sigma, \partial V(\sigma) \rangle = -1$$

où  $\partial$  est l'application bord du complexe des chaînes cellulaires. Dit autrement si  $(\sigma, \tau) \in V$ ,  $V(\sigma) = \pm\tau$  selon que l'orientation induite sur  $\sigma$  en tant que bord de  $\tau$  est négative, ou positive. Par exemple si  $\sigma$  est un 0-simplexe,  $V(\sigma) = \tau$  si  $\tau$  est orienté dans le même sens que la flèche représentant  $(\sigma, \tau)$ .

Soit  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$  une  $V$ -orbite. La *multiplicité* de  $\gamma$  est définie par :

$$m(\gamma) = \prod_{i=0}^{r-1} - \langle \sigma_i, \partial V(\sigma_i) \rangle \langle \sigma_{i+1}, \partial V(\sigma_i) \rangle \quad (= \pm 1)$$

C'est une comparaison entre l'orientation de la cellule  $\sigma_r$  et la l'orientation de  $\sigma_0$  transportée par la  $V$ -orbite (voir figure 9). Notons  $\mathcal{M}(\sigma, \sigma')$  l'ensemble des  $V$ -orbites commençant en  $\sigma$  et aboutissant en  $\sigma'$ , et  $\text{Crit}_k(f) = \text{Crit}_k(V)$  l'ensemble des  $k$ -cellules critiques de  $f$  (ou de  $V$ ).

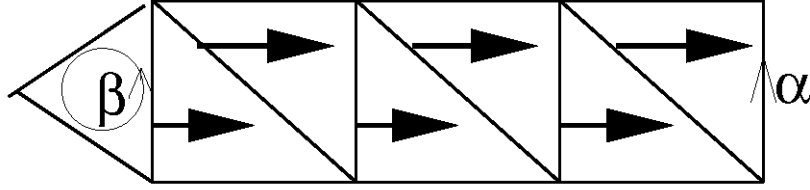


FIGURE 9 – de [For02]. Une  $V$ -orbite  $\gamma$  de  $\beta$  à  $\alpha$ . Sa multiplicité est  $m(\gamma) = +1$

**Définition 2.1.8.** Le complexe de Morse-Forman  $(C_*(V), \partial_V)$  du gradient discret  $V$  sur  $\Delta$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est défini par :

$$C_k(V) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Crit}_k(V)} \mathbb{Z}\sigma$$

Et si  $\tau \in \text{Crit}_{k+1}(V)$  :

$$\partial_V \tau = \sum_{\sigma \in \text{Crit}_k(V)} n(\tau, \sigma) \sigma$$

$$\text{où } n(\tau, \sigma) = \sum_{\tilde{\sigma} < \tau} \langle \partial \tau, \tilde{\sigma} \rangle \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(\tilde{\sigma}, \sigma)} m(\gamma).$$

Ce complexe est bien l'analogie discret du complexe de Morse-Thom-Smale. Il est engendré par les points critiques, et l'application bord compte les lignes de gradients reliant (des faces) des  $(k+1)$ -cellules critiques aux  $k$ -cellules critiques.

**Théorème 2.1.9.** [For98] L'homologie du complexe  $(C_*(V), \partial_V)$  est isomorphe à l'homologie cellulaire du CW-complexe  $\Delta$ .

## 2.2 Familles de fonctions de Morse discrètes ?

Il y a plusieurs manières d'envisager une famille à paramètre discrète. Commençons par le cas des chemins. Un chemin est une fonction  $f : [0, 1] \times \mathcal{C}_\Delta$  continue (voire lisse) pour la topologie induite par  $[0, 1]$ , *i.e.* c'est simplement la donnée de chemins continus dans  $\mathbb{R}$  pour chaque cellule de  $\Delta$ , qui respectent les conditions de Morse discrètes pour tout  $t$ .

On peut aussi voir une famille de fonctions sur  $\Delta$  avec pour espace de paramètre un CW-complexe  $\Gamma$  comme une fonction sur le CW-complexe  $\Gamma \times \Delta$ . Alors - si  $\Gamma$  est bien recollé et fini - la meilleure "différentiabilité" qu'on puisse demander à la "grosse" fonction  $F : \Gamma \times \Delta$  est d'être une fonction de Morse discrète. Dans ce cas, si  $\sigma$  est un sommet de  $\Gamma$ ;  $\sigma \times \Delta$  est un sous-CW-complexe de  $\Gamma \times \Delta$  et un résultat de Forman affirme que les tranches de  $F : F_\sigma : \sigma \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de Morse discrètes. On pourrait imaginer que cela définisse bien un chemin "lisse" de fonction de Morse discrètes, mais apparemment non : L'article [KKM08] montre que, dans le cas où  $\Gamma$  est une subdivision du 1-simplexe (*i.e.* une subdivision  $t_1, \dots, t_r$  de  $[0, 1]$ ), si on se fixe des fonctions de Morse discrète quelconque sur chaque tranche  $t_i \times \Delta$ , on peut les prolonger en une "grosse" fonction de Morse discrète sur  $\Gamma \times \Delta$ . Il n'y aurait donc **aucune condition** qui restreigne quelle fonctions peuvent apparaître sur deux tranches voisines *i.e.* toutes les familles à 1-paramètre de fonction de Morse discrète sont "lisses". On ne peut donc pas extraire des informations reliant les fonctions  $F_0$  et  $F_1$ .

## Références

- [Cer70] Jean Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théoreme de la pseudo-isotopie. *Publications mathématiques de l'IHES*, 39(1) :7–170, 1970.
- [For98] Robin Forman. A discrete Morse theory for cell complexes. *Advances in Mathematics*, 134 :90–145, 1998.
- [For02] Robin Forman. A user's guide to discrete Morse theory. *Sém. Lothar. Combin*, 48 :35pp, 2002.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.
- [KKM08] Henry King, Kevin Knudson, and Neza Mramor. Birth and death in discrete morse theory. *arXiv preprint arXiv :0808.0051*, 2008.
- [Mil63] John Willard Milnor. *Morse theory*. Number 51. Princeton university press, 1963.