Dynamique topologique et théorie de Ramsey

Adrien Abgrall, Maxime Ramzi
sous la direction de Todor Tsankov et Noé de Rancourt

Contents

1 Introduction

La dynamique topologique est l'étude des actions de groupes ayant des propriétés topologiques supplémentaires, notamment des actions continues de groupes topologiques sur des espaces topologiques et en particulier, comme ce sera le cas dans ce mémoire, sur des espaces compacts.

Par ailleurs, la théorie de Ramsey étudie des propriétés combinatoires de classes de structures finies (par exemple les ensembles finis, les graphes finis, les ensembles finis totalement ordonnés ou encore les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini) relatives à la notion de coloriage :

les propriétés de Ramsey caractérisent les structures dans lesquelles peu importe le coloriage qu'on introduit, on peut trouver de grandes sous-structures monochromatiques.

Ces deux champs d'étude *a priori* totalement distincts présentent en fait des liens forts, lorsqu'il s'agit d'étudier la dynamique d'un groupe qui se réalise comme le groupe d'automorphismes d'une structure (dénombrable) dont les sous-structures finies ont des propriétés liées à la théorie de Ramsey.

Un résultat fondateur à ce sujet est le théorème de Pestov (1998) qui affirme que toute action continue sur un espace compact du groupe des bijections croissantes de $\mathbb{Q}$ dans lui-même (muni de la topologie de la convergence simple) admet un point fixe. La preuve de Pestov utilise le théorème de Ramsey (1930) portant sur les ensembles finis et le théorème de Pestov lui est même équivalent. Plus tard, Kechris, Pestov et Todorcevic généralisent cette preuve à un cadre bien plus étendu, établissant un théorème de correspondance très riche (2003). Par la suite, d'autres auteurs comme Zucker, Van Thé, Tsankov ... ont affiné cette correspondance, mettant en regard des propriétés de dynamique topologique et leurs analogues en théorie de Ramsey.

Dans ce mémoire, on présente d'abord les cadres d'étude de la dynamique topologique et de la théorie de Ramsey, ainsi que de la théorie de Fraïssé qui permet de formaliser la notion de structure et de décrire les structures ayant les propriétés qui nous conviennent. On énonce et démontre ensuite le théorème de correspondance de Kechris, Pestov et Todorcevic, puis quelques unes de ses applications, et enfin on décrit brièvement les variantes plus élaborées de la correspondances qui ont été formulées par la suite.

2 Théorie de Fraïssé

2.1 Introduction

La théorie des modèles donne un point de vue général sur la notion d'ensemble muni d'une structure, et de morphisme entre de tels ensembles. Les résultats de Fraïssé traitent de certaines structures assez particulières, mais dont on verra par la suite que les groupes d'automorphismes présentent des propriétés remarquables. Commençons donc par en introduire les concepts fondamentaux.

2.2 Structures et morphismes

Pour décrire une structure on doit se donner un *langage* L (dit *du premier ordre*) constitué de deux familles au plus dénombrables de symboles tous distincts qu'on notera $(R_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ et de deux fonctions "arité" de I dans $\mathbb{N}^*$ et de J dans $\mathbb{N}$: ce sont les symboles de relations et de fonctions (une *constante* désigne une fonction d'arité 0). Si $J = \emptyset$ on dit que le langage est *relationnel*. Ces symboles ne représentent rien pour le moment, ce qui motive les définitions suivantes.

Définition 1.

- Une *L-structure* $\mathbf{A}$ est la donnée d'un ensemble A non vide (appelé *univers* de $\mathbf{A}$) et d'interprétations $(R_i^{\mathbf{A}})_{i\in I}$ et $(f_j^{\mathbf{A}})_{j\in J}$ telles que l'interprétation d'un symbole de relation d'arité m soit une relation sur A d'arité m autrement dit une partie de A^m et l'interprétation d'un symbole de fonction d'arité n soit une fonction de A^n dans A.

- Si $\mathbf{A} = (A, (R_i^{\mathbf{A}})_{i\in I}, (f_j^{\mathbf{A}})_{j\in J})$ est une L-structure, une *sous-structure* de $\mathbf{A}$ est une L-structure $\mathbf{B} = (B, (R_i^{\mathbf{B}})_{i\in I}, (f_j^{\mathbf{B}})_{j\in J})$ telle que $B \subset A$, pour tout $i \in I$, $R_i^{\mathbf{B}} = R_i^{\mathbf{A}} \cap B^m$ (où m est l'arité de R_i) et pour tout $j \in J$, $f_j^{\mathbf{B}} = (f_j^{\mathbf{A}})|_{|B^n}^{B}$ (où n est l'arité de f_j) : en particulier on a nécessairement $f_j(B^n) \subset B$.

- Si $\mathbf{A} = (A, (R_i^{\mathbf{A}})_{i\in I}, (f_j^{\mathbf{A}})_{j\in J}), \mathbf{B} = (B, (R_i^{\mathbf{B}})_{i\in I}, (f_j^{\mathbf{B}})_{j\in J})$ sont deux L-structures, un *plongement* de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ est une fonction **injective** $\phi\colon A \to B$ telle que pour tout $i \in I, (x_1, \cdots, x_m) \in A^m$ (où m est l'arité de R_i) on ait

$$R_i^{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_m) \Leftrightarrow R_i^{\mathbf{B}}(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_m))$$

et pour tout $j \in J, (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$ (où n est l'arité de f_j) on ait

$$\phi(f_j^{\mathbf{A}}(x_1, \cdots, x_n)) = f_j^{\mathbf{B}}(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_n))$$

- Un *isomorphisme* est un plongement surjectif, un *automorphisme* est un isomorphisme d'une L-structure dans elle-même.

Remarque 1. Une sous-structure est entièrement déterminée par son univers.

Si L est relationnel, tout sous-ensemble non vide de l'univers d'une structure est l'univers d'une sous-structure.

L'inclusion entre une L-structure et une de ses sous-structures définit toujours un plongement.

Une intersection quelconque d'univers de sous-structures est un univers de sous-structure, si $\mathbf{A}$ est une L-structure d'univers A et $P \subset A$ ceci permet de définir la *sous-structure engendrée* par P dont l'univers est l'intersection de tous les univers de sous-structures contenant P (l'intersection n'est pas vide car A y figure) : c'est la plus petite sous-structure dont l'univers contient P (au sens de l'inclusion des univers), on pourra la noter $\langle P \rangle$. On qualifiera naturellement de *finiment engendrée* une sous-structure engendrée par un ensemble fini, ou toute L-structure qui vue comme sous-structure d'elle même l'est.

L'image d'un plongement de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ (deux L-structures) est une sous-structure de $\mathbf{B}$ isomorphe à $\mathbf{A}$ via la corestriction du plongement à son image.

La composée de deux plongements est un plongement, la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme, ainsi si $\mathbf{A}$ est une L-structure, la composition munit naturellement l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ des automorphismes de $\mathbf{A}$ d'une structure de groupe.

Dorénavant, sauf en cas explicite d'ambiguïté, on identifiera toute L-structure à son univers.

On ordonnera souvent les sous-structures d'une L-structure par l'inclusion des univers, et les plongements entre sous-structures par l'inclusion des graphes.

Exemple 1. Si l'on prend L le langage sans relations, avec trois symboles de fonctions e, $.^{-1}$ et $\times$ d'arités respectives 0, 1 et 2, un groupe où l'on interprète ces fonctions comme le neutre, l'inverse et le produit est une L-structure, et les notions de sous-structure (engendrée) coïncident avec celles de sous-groupe (engendré), mais attention, de nombreux objets sont des L-structures sans être des groupes car l'on n'impose aucune propriété sur les interprétations des opérations sinon leurs arités ($\mathbb{N}$ muni de la constante 3, de la fonction successeur et de l'opération produit conviendrait par exemple).

Notation 1. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux L-structures, on notera $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ l'ensemble des plongements de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$. Cette dernière notation prolonge celle des coefficients binômiaux, pour $L = \{<\}$ et la L-structure $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel au sens où, si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{N}$ sont finis on a :

$$\left|\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}\right| = \binom{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}$$

On peut désormais définir certaines propriétés des L-structures qui serviront à énoncer et à démontrer les résultats de Fraïssé.

Définition 2. Soit $\mathbf{A}$ une L-structure, on dira que

- $\mathbf{A}$ est *localement finie* si toute sous-structure de $\mathbf{A}$ finiment engendrée est finie.
- $\mathbf{A}$ est *rigide* si l'identité est le seul automorphisme de $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{A}$ est *ultrahomogène* si pour toutes sous-structures finiment engendrées $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$, tout isomorphisme entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ se prolonge en un automorphisme de $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}$ a la *propriété d'extension* si pour toutes sous-structures finiment engendrées $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ telles que $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$, tout plongement de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}$ se prolonge en un plongement de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}$ est une *structure de Fraïssé* si elle est ultrahomogène et au plus dénombrable

On a la proposition suivante, évidente pour les L-structures finies.

Proposition 1. *Une L-structure dénombrable est ultrahomogène si et seulement si elle a la propriété d'extension.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une L-structure ultrahomogène, $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ deux sous-structures finiment engendrées de $\mathbf{A}$, et $f\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ un plongement. f se corestreint à son image en un isomorphisme entre des sous-structures finiment engendrées de $\mathbf{A}$, donc se prolonge en un automorphisme $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, alors $g_{|\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ est bien un plongement prolongeant f (on n'utilise pas la dénombrabilité de $\mathbf{A}$ dans ce sens).

Réciproquement si $\mathbf{A}$ est une L-structure dénombrable et a la propriété d'extension, et si $f_0\colon \mathbf{B_0} \to \mathbf{C_0}$ est un isomorphisme entre deux structures finiment engendrées de $\mathbf{A}$, on procède par principe du va-et-vient : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une énumération de $\mathbf{A}$. On construit par récurrence des suites croissantes pour l'inclusion $(\mathbf{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-structures finiment engendrées et $(f_n\colon \mathbf{B_n} \to \mathbf{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'isomorphismes tels que $x_n \in \mathbf{B_n} \cap \mathbf{C_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Une fois cette construction effectuée il suffira de poser $f = \bigcup f_n\colon \mathbf{A} = \bigcup \mathbf{B_n} \to \mathbf{A} = \bigcup \mathbf{C_n}$ qui est bien un automorphisme de $\mathbf{A}$ prolongeant f_0. L'initialisation est donnée par f_0, et si $f_n\colon \mathbf{B_n} \to \mathbf{C_n}$ est construite, on note $i_n\colon \mathbf{C_n} \to \mathbf{A}$ l'inclusion, en appliquant la propriété d'extension à $\mathbf{B_n} \subset \mathbf{B'_n} = \langle \mathbf{B_n} \cup \{x_{n+1}\}\rangle$ et $i_n \circ f_n$ on peut prolonger f_n en un isomorphisme $f'_n\colon \mathbf{B'_n} \to \mathbf{C'_n}$ avec $\mathbf{C_n} \subset \mathbf{C'_n}$. De même en appliquant la propriété d'extension à $\mathbf{C'_n} \subset \mathbf{C_{n+1}} = \langle \mathbf{C'_n} \cup \{x_{n+1}\}\rangle$ et $i'_n \circ (f'_n)^{-1}$ ($i'_n\colon \mathbf{B'_n} \to \mathbf{A}$ est l'inclusion) on obtient un isomorphisme $f_{n+1}^{-1}\colon \mathbf{C_{n+1}} \to \mathbf{B_{n+1}}$ avec $\mathbf{B'_n} \subset \mathbf{B_{n+1}}$ et f_{n+1} prolonge f_n ce qui conclut la preuve. $\square$

Exemple 2. Toute structure sur un langage relationnel est localement finie, puisque dans ce cas la sous-structure engendrée par une partie est exactement cette partie, par exemple, si L comporte uniquement un symbole $<$ de relation binaire, la L-structure $\mathbb{Q}$ où $<$ est interprété par l'ordre usuel strict est localement finie.

Cette structure a d'autres propriétés : toutes ses sous-structures finiement engendrées sont rigides et elle a la propriété d'extension, d'après la propriété précédente c'est donc une structure de Fraïssé.

Autre exemple avec un langage comportant des fonctions : on prend $L = \{+\} \cup \{q. \mid q \in \mathbb{Q}\}$, où $+$ est un symbole de fonction binaire et les $q.$ des symboles de fonctions unaires et on considère la L-structure d'univers l'ensemble $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ des suites rationnelles stationnaires à 0, où $+$ est interprété comme l'addition vectorielle usuelle et $q.$ comme le produit par le scalaire q : une sous-structure correspond exactement à un sous-espace vectoriel : cette L-structure a également la propriété d'extension par le théorème de la base incomplète et donc est une structure de Fraïssé, mais elle n'est pas localement finie.

2.3 Classes de Fraïssé

On souhaite à présent parler de collections de L-structures, et de leurs propriétés, mais il est important de noter que ces collections ne seront pas forcément des ensembles. En effet, les propriétés raisonnables des L-structures, comme par exemple celles qu'on a présenté ci-dessus, sont préservées par isomorphisme, il est donc raisonnable d'envisager que nos collections soient closes par isomorphisme, mais ceci peut produire des collections de très grande taille (en bijection avec l'univers ensembliste dans lequel on travaille), qu'on ne peut appeler ensembles. On les désignera donc comme des *classes de L-structures*, mais il est à noter qu'on ne considérera que les classes *au plus dénombrables* de L-structures ce qui par abus de langage signifie que la collection ne comporte qu'un ensemble au plus dénombrable de classes d'isomorphisme.

L'exemple le plus naturel de classe de L-structures est le suivant :

Définition 3. Soit $\mathbf{A}$ une L-structure, son *âge* $\mathrm{Age}(\mathbf{A})$ est la classe de toutes les L-structures finiment engendrées qui se plongent dans $\mathbf{A}$, autrement dit toutes les sous-structures finiment engendrées de $\mathbf{A}$ ainsi que toutes les L-structures qui leur sont isomorphes.

Si $\mathbf{A}$ est dénombrable, l'ensemble de ses parties finies l'est aussi, et $\mathrm{Age}(\mathbf{A})$ est alors une classe au plus dénombrable de L-structures, qui a des propriétés agréables qui motivent la définition suivante.

Définition 4. Une *classe de Fraïssé* $\mathcal{K}$ est une classe dénombrable (close par isomorphisme) de L-structures finiment engendrées satisfaisant les propriétés suivantes :

- *Hérédité* : $\mathcal{K}$ est close par sous-structures
- *Plongements simultanés* : Si $\mathbf{A}, \mathbf{A'} \in \mathcal{K}$, il existe $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ et $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $f'\colon \mathbf{A'} \to \mathbf{B}$ des plongements

- *Plongements amalgamés* : Si $\mathbf{A}, \mathbf{A'}, \mathbf{C} \in \mathcal{K}$, et si $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ et $g'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{A'}$ sont des plongements, il existe $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ et $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $f'\colon \mathbf{A'} \to \mathbf{B}$ des plongements tels que $f \circ g = f' \circ g'$

Proposition 2. *Si* $\mathbf{A}$ *est une* L*-structure de Fraïssé,* $\mathrm{Age}(\mathbf{A})$ *est une classe de Fraïssé.*

Preuve. On a déjà montré la dénombrabilité et $\mathrm{Age}(\mathbf{A})$ est bien close par isomorphisme par définition. Vérifions l'hérédité : si $\mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{A})$, soit $f\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ un plongement. Pour toute sous-structure $\mathbf{C}$ de $\mathbf{B}$, $f_{|\mathbf{C}}$ est encore un plongement donc $\mathbf{C} \in \mathrm{Age}(\mathbf{A})$. Vérifions maintenant les plongements simultanés : si $\mathbf{B}, \mathbf{B'} \in \mathrm{Age}(\mathbf{A})$, soit $f\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ et $f'\colon \mathbf{B'} \to \mathbf{A}$ des plongements. f et f' plongent encore $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B'}$ dans la sous-structure de $\mathbf{A}$ engendrée par l'union de leurs images, qui est bien finiment engendrée. Enfin pour les plongements amalgamés, si $\mathbf{B}, \mathbf{B'}, \mathbf{C} \in \mathrm{Age}(\mathbf{A})$ (on prend donc $f\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ et $f'\colon \mathbf{B'} \to \mathbf{A}$ des plongements) et $g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ et $g'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B'}$ sont des plongements, $f \circ g$ et $f' \circ g'$ sont des plongements donc des isomorphismes sur leurs images respectives $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D'}$. Par ultrahomogénéité, l'isomorphisme $(f \circ g) \circ (f' \circ g')^{-1}\colon \mathbf{D'} \to \mathbf{D}$ se prolonge en un automorphisme ϕ de $\mathbf{A}$, ainsi on a $f \circ g = \phi \circ f' \circ g'$, donc les plongements f et $\phi \circ f'$ conviennent si l'on les corestreint à la sous-structure engendrée par l'union de leurs images comme pour les plongements simultanés. □

Cet exemple est en fait une généralité car le théorème de Fraïssé affirme que toutes les classes de Fraïssé sont de cette forme.

Théorème 1. *Si* $\mathcal{K}$ *est une classe de Fraïssé, il existe une* L*-structure de Fraïssé* $\mathbf{A}$*, unique à isomorphisme près, telle que* $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\mathbf{A})$*. On appelle* $\mathbf{A}$ *la limite de Fraïssé de* $\mathcal{K}$ *et l'on note* $\mathbf{A} = \mathrm{Flim}(\mathcal{K})$*.*

Preuve. On a l'unicité par principe du va-et-vient : si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux L-structures de Fraïssé qui conviennent, on énumère leurs éléments par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on construit par récurrence des suites croissantes $(\mathbf{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-structures finiment engendrées respectivement de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et $(\phi_n\colon \mathbf{A_n} \to \mathbf{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'isomorphismes, telles que pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \mathbf{A_n}$ et $b_n \in \mathbf{B_n}$. On choisit pour $\mathbf{A_0}$ une sous-structure finiment engendrée quelconque de $\mathbf{A}$, appartenant donc à $\mathrm{Age}(\mathbf{A}) = \mathcal{K} = \mathrm{Age}(\mathbf{B})$, pour $\mathbf{B_0}$ une sous-structure de $\mathbf{B}$ à laquelle $\mathbf{A_0}$ est isomorphe, et pour ϕ_0 un tel isomorphisme. Si $\mathbf{A_n}, \mathbf{B_n}, \phi_n$ sont construits, on note $\mathbf{A'_n} = \langle \mathbf{A_n} \cup \{a_{n+1}\}\rangle \in \mathrm{Age}(\mathbf{A}) = \mathcal{K}$ et on sait qu'il existe $\mathbf{C_n}$ une sous-structure de $\mathbf{B}$ et $f\colon \mathbf{A'_n} \to \mathbf{C_n}$ un isomorphisme. $f \circ \phi_n^{-1}$ est un plongement de $\mathbf{B_n}$ dans $\mathbf{C_n}$ qu'on peut restreindre en un isomorphisme sur son image puis prolonger en un automorphisme g de $\mathbf{B}$. Alors on a un isomorphisme $g^{-1} \circ f\colon \mathbf{A'_n} \to \mathbf{B'_n}$ qui prolonge ϕ_n (en particulier $\mathbf{B_n} \subset \mathbf{B'_n}$) car si $\phi_n(a) = b$, $f \circ \phi_n^{-1}(b) = f(a)$ donc $g(b) = f(a)$ d'où $g^{-1} \circ f(a) = b$. On applique ensuite le même raisonnement à $f^{-1} \circ g$ et $\mathbf{B_{n+1}} = \langle B_n \cup \{b_{n+1}\}\rangle$: on obtient $\phi_{n+1}\colon \mathbf{A_{n+1}} \to \mathbf{B_{n+1}}$ prolongeant ϕ_n pour un certain $\mathbf{A_{n+1}}$ contenant $\mathbf{A'_n}$ donc a_{n+1}. On a finalement $\bigcup \phi_n\colon \bigcup \mathbf{A_n} = \mathbf{A} \to \bigcup \mathbf{B_n} = \mathbf{B}$ un isomorphisme, ce qui prouve l'unicité.

Pour l'existence, soit $(\mathbf{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une famille comportant (au moins) un représentant par classe d'isomorphisme de $\mathcal{K}$, on construit par récurrence une suite d'entiers $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de plongements $(\phi_n\colon \mathbf{A_{i_{n-1}}} \to \mathbf{A_{i_n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout n, $\mathbf{A_n}$ se plonge dans $\mathbf{A_{i_n}}$. Pour cela on procède comme suit : on commence par fixer $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des paires de plongements entre éléments de la famille $(\mathbf{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ayant même source, en effet pour i, j fixés il y a un nombre au plus dénombrable de plongements entre $\mathbf{A_i}$ (engendré par P finie) et $\mathbf{A_j}$ car ils sont entièrement déterminés par leur restriction à P (deux plongements coïncidant sur P coïncident sur une sous-structure donc sur $\langle P\rangle = \mathbf{A_i}$).

On initialise avec $i_0 = 0$, et si les suites sont construites jusqu'au rang n, soit k minimal tel qu'on ait $p_k\colon \mathbf{A_i} \to \mathbf{A_j}$ et $q_k\colon \mathbf{A_i} \to \mathbf{A_{i_{n'}}}$ avec $n' \leq n$ mais qu'il n'existe pas de plongement $p'\colon \mathbf{A_j} \to \mathbf{A_{i_n}}$ vérifiant $p' \circ p_k = \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_{n'+1} \circ q_k$. Si un tel k existe, on utilise la propriété des plongements amalgamés entre p_k et $\phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_{n'+1} \circ q_k$, on obtient $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ et deux plongements, $p'\colon \mathbf{A_j} \to \mathbf{B}$ et $q'\colon \mathbf{A_{i_n}} \to \mathbf{B}$. S'il n'y a pas de tel k on pose simplement $\mathbf{B} = \mathbf{A_{i_n}}$. On applique à présent la propriété des plongements simultanés entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A_{n+1}}$, on obtient $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ dans laquelle se plongent $\mathbf{B}$ (via q'') et $\mathbf{A_{n+1}}$, enfin soit ψ un isomorphisme entre $\mathbf{C}$ et un élément de la famille $(\mathbf{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, disons $\mathbf{A_{i_{n+1}}}$. $\mathbf{A_{n+1}}$ se plonge dans $\mathbf{C}$ donc dans $\mathbf{A_{i_{n+1}}}$ et $\mathbf{A_{i_n}}$ également via $\phi_{n+1} = \psi \circ q'' \circ q'$. Remarquons qu'on a alors un plongement $p'' = \psi \circ q'' \circ p'\colon \mathbf{A_j} \to \mathbf{A_{i_{n+1}}}$ vérifiant $p'' \circ p_k = \phi_{n+1} \circ \cdots \phi_{n'+1} \circ q_k$ ce qui garantit que k ne sera plus choisi à nouveau à une étape ultérieure d'hérédité.

Ces suites étant construites et la classe $\mathcal{K}$ étant close par isomorphismes, on peut sans perte de généralité supposer que les ϕ_n sont des inclusions. On considère alors $\mathbf{M} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{A_{i_n}}$ qui est naturellement une L-structure dont tous les $\mathbf{A_{i_n}}$ sont des sous-structures. Vérifions que $\mathbf{M}$ est bien la limite de Fraïssé de $\mathcal{K}$: par construction, $\mathbf{M}$ est au plus dénombrable. De plus, tout élément de $\mathcal{K}$ se plonge dans l'un des $\mathbf{A_{i_n}}$ donc dans $\mathbf{M}$, ainsi $\mathcal{K} \subset \mathrm{Age}(\mathbf{M})$. Réciproquement une L-structure finiment engendrée se plongeant dans $\mathbf{M}$ se plonge dans un $\mathbf{A_{i_n}}$ (car l'image du plongement dans $\mathbf{M}$ est engendrée par P finie, et pour n tel que $P \subset \mathbf{A_{i_n}}$, $\langle P \rangle \subset \mathbf{A_{i_n}}$) or $\mathbf{A_{i_n}} \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est close par sous-structure donc on a bien $\mathrm{Age}(\mathbf{M}) = \mathcal{K}$.

Il reste donc seulement à montrer l'ultrahomogénéité de $\mathbf{M}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathbf{M}$ a la propriété d'extension : si on a fixé $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ des sous-structures finiment engendrées, on prend $\mathbf{A_i}$ et $\mathbf{A_j}$ auxquels ils sont isomorphes, et $p\colon \mathbf{A_i} \to \mathbf{A_j}$ le plongement représentant l'inclusion entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Un plongement de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{M}$ correspond à un plongement de $\mathbf{A_i}$ dans $\mathbf{M}$, qui se corestreint en $q\colon \mathbf{A_i} \to \mathbf{A_{i_n}}$ car son image est finiment engendrée. (p, q) apparaît dans notre énumération des plongements, disons au rang $(p_{n'}, q_{n'})$. S'il n'existait aucun plongement $p'\colon \mathbf{A_j} \to \mathbf{A_{i_k}}$ avec $k \geq n$ tel que $p' \circ p_{n'} = \phi_k \circ \cdots \circ \phi_{n+1} \circ q_{n'}$, cela signifierait que n' n'est jamais choisi comme indice minimal dans l'hérédité, donc qu'à toutes les étapes d'hérédité au delà du rang n' on choisit un indice inférieur strictement à n', ce qui contredit la remarque qui conclut l'hérédité affirmant que chaque indice est choisi au plus une fois.

Donc un tel plongement existe, autrement dit $p' \circ p$ se corestreint en q à $\mathbf{A_{i_n}}$. Si $in\colon \mathbf{A_{i_k}} \to \mathbf{M}$ est l'inclusion, $in \circ p'\colon \mathbf{A_j} \to \mathbf{M}$ est un plongement et le plongement correspondant de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{M}$ prolonge effectivement celui de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{M}$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 2. Il est notable que si $\mathcal{K}$ est une classe de Fraïssé de L-structures finies, tous les éléments de $\mathcal{K} = \mathrm{Age}(\mathrm{Flim}(\mathcal{K}))$ sont finis donc $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ est localement finie.

D'autre part, $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})$ est finie si et seulement si les cardinaux des éléments de $\mathcal{K}$ sont bornés (finis) car $|P| \leq |\langle P \rangle|$ d'une part et si $\mathbf{A}$ se plonge dans $\mathbf{B}$, $|\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$ d'autre part.

2.4 Point de vue topologique

Si $\mathbf{A}$ est une L-structure dénombrable, qu'on peut supposer à isomorphisme près d'univers $\mathbb{N}$, le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ apparaît comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_\infty$, le groupe des permutations de $\mathbb{N}$, qui a une structure de groupe topologique polonais (espace topologique séparable et métrisable par une distance complète, muni d'une structure de groupe où le produit et l'inverse sont continus), par exemple pour la distance

$$d\colon (f, g) \mapsto 2^{-\min\{n \mid n \in \mathbb{N},\, f(n) \neq g(n)\}} + 2^{-\min\{n \mid n \in \mathbb{N},\, f^{-1}(n) \neq g^{-1}(n)\}}$$

En ne gardant que le premier des deux termes, on obtient une autre distance d' qui cette fois n'est plus complète mais est invariante à gauche, dans la mesure où $d'(h \circ f, h \circ g) = d'(f, g)$ pour tout f, g, h éléments du groupe. Mais le choix de la distance importe peu, le point capital est qu'elle métrise la convergence simple, c'est à dire la topologie induite sur $\mathfrak{S}_\infty$ par la topologie produit sur $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ d'un nombre dénombrable de copies discrètes de $\mathbb{N}$, ainsi on peut employer des caractérisations séquentielles. Pour cette topologie, $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ est fermé et on a mieux que la réciproque :

Proposition 3. *Le groupe d'automorphismes d'une L-structure dénombrable $\mathbf{A}$ d'univers $\mathbb{N}$ est un sous-groupe fermé de $\mathfrak{S}_\infty$ et pour tout sous-groupe fermé G de $\mathfrak{S}_\infty$, il existe un langage relationnel L_G, et une L_G-structure de Fraïssé d'univers $\mathbb{N}$ dont G est le groupe d'automorphismes.*

Preuve. Si $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A})^\mathbb{N}$ est une suite convergente dans $\mathfrak{S}_\infty$ vers ϕ, ϕ est une bijection et également un plongement car si $f_j^\mathbf{A}$ est l'interprétation d'un symbole de fonction n-aire et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f_j^\mathbf{A}(\phi_k(x_1), \cdots, \phi_k(x_n)) = \phi_k(f_j^\mathbf{A}(x_1, \cdots, x_n))$ donc puisque la suite (ϕ_k) converge simplement c'est à dire stationne point par point, en prenant k assez grand on a $f_j^\mathbf{A}(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_n)) = \phi(f_j^\mathbf{A}(x_1, \cdots, x_n))$ et de même si $R_i^\mathbf{A}$ est l'interprétation d'un symbole de relation m-aire et $(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{N}^m$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $0 < l \leq m$ on ait $\phi_k(x_l) = \phi(x_l)$, ainsi $R_i^\mathbf{A}(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_m)) \Leftrightarrow R_i^\mathbf{A}(\phi_k(x_1), \cdots, \phi_k(x_m)) \Leftrightarrow R_i^\mathbf{A}(x_1, \cdots, x_m)$.

Réciproquement étant donné G, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G agit à gauche coordonnée par coordonnée sur $\mathbb{N}^n$, on note $(O_{n,i})_{i \in I_n}$ les orbites de cette action (en nombre au plus dénombrable), et on définit $L_G = (R_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, i \in I_n}$ qui est bien un langage relationnel, l'arité de $R_{n,i}$ étant n. On définit $\mathbf{A}$ une L_G-structure d'univers $\mathbb{N}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$: $R_{n,i}^\mathbf{A} = O_{n,i}$. Cette structure est bien dénombrable et localement finie (car relationnelle). $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ car si $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ et $g \in G$, $(g(x_1), \cdots, g(x_n)) = g \cdot (x_1, \cdots, x_n) \in O_{n,i} \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in O_{n,i}$. Réciproquement si $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\phi(0), \cdots \phi(n))$ est dans l'orbite de $(0, \cdots, n)$ donc il existe $g_n \in G$ tel que $\phi(k) = g_n(k)$ pour tout $k \leq n$. La suite (g_n) converge simplement vers $\phi \in \mathfrak{S}_\infty$ donc $\phi \in G$ car G est fermé, ainsi $G = \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$. Enfin $\mathbf{A}$ est ultrahomogène car si f est un isomorphisme entre $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ deux sous-structures finiment générées donc finies de $\mathbf{A}$, $(b_1, \cdots, b_n) = (f(a_1), \cdots, f(a_n))$ est dans l'orbite de $(a_1, \cdots, a_n)$ donc s'écrit $(g(a_1), \cdots, g(a_n))$ pour un certain $g \in G = \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ qui prolonge donc f en un automorphisme. $\mathbf{A}$ est donc bien une structure de Fraïssé. □

D'autre part, il est intéressant de souligner que l'ensemble des L-structures d'univers $\mathbb{N}$, vu comme

$$\prod_{i\in I} 2^{(\mathbb{N}^{m_i})} \times \prod_{j\in J} \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{n_j})}$$

(où m_i est l'arité de R_i et n_j celle de f_j) est muni d'une structure d'espace topologique produit ($2 = \{0; 1\}$ et $\mathbb{N}$ sont vus comme des espaces topologiques discrets), et que si L est relationnel, cet espace est compact par le théorème de Tychonoff car J est vide.

Enfin on sera également amené à considérer la topologie sur des ensembles de parties d'un ensemble X ou plus généralement de coloriages finis de X de la forme k^X avec $k \in \mathbb{N}$ qui deviennent également compacts par Tychonoff (le cas de l'ensemble des parties est simplement $k = 2$).

Ceci termine l'étude préliminaire des outils de théorie de Fraïssé dont nous aurons besoin par la suite.

3 Théorie de Ramsey

3.1 Introduction

La théorie de Ramsey est un regroupement de résultats plus ou moins indépendants les uns des autres, qui étudie les conditions sous lesquelles de l'ordre peut apparaître dans du désordre. Souvent cela se met sous la forme "Soit M un objet d'un tel type, on le colorie avec un nombre fini de couleurs. Quelle taille doit avoir M pour qu'on soit sûr d'avoir un objet $N \leq M$ vérifiant telles et telles propriétés, monochromatique ?".

3.2 Un premier exemple motivant, et des définitions

On commence par un exemple très simple d'un résultat de type Ramsey.

Définition 5. Un *graphe non orienté* G est un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets et E est un ensemble de paires non ordonnées de V (dites arêtes). Si V est un ensemble quelconque, le *graphe complet* sur V est le graphe $(V, \mathcal{P}_2(V))$ où $\mathcal{P}_2(V)$ désigne l'ensemble des parties de V à 2 éléments. Le *graphe discret* sur V est $(V, \emptyset)$. Une *clique* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $A \subset V$ tel que $(A, E \cap \mathcal{P}_2(A))$ soit le graphe complet sur A, dualement une *anticlique* est un sous-ensemble $A \subset V$ tel que $E \cap \mathcal{P}_2(A) = \emptyset$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tel que $|V| \geq 6$. On note K_n le graphe complet sur V, $n = |V|$. Colorions les arêtes de K_n en rouge si elles sont dans E, en bleu sinon. On choisit 6 points distincts quelconques de V, on appelle A le sous-ensemble de V consituté de ces points. On fixe $x \in A$. 5 arêtes partent de x vers des sommets de A (dans K_n), et elles sont coloriées en rouge et bleu. Donc pour l'une des deux couleurs, il y a au moins 3 arêtes de cette couleur.
S'il y a 3 arêtes rouges partant de x, notons a, b, c leurs 3 autres extrémités. De deux choses l'une, ou bien il existe parmi ces 3 sommets deux sommets qui sont reliés, disons a, b. Dans ce cas, $\{a, b, x\}$ forme une clique (un sous-graphe complet à 3 éléments de G), ou bien les 3 arêtes $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ ne sont pas dans G, auquel cas $\{a, b, c\}$ forme une anticlique.
S'il y a 3 arêtes bleues partant de x, on fait le même raisonnement dans le graphe complémentaire de G.
Dans tous les cas, on a ou bien une clique de taille 3, ou une anticlique de taille 3. Ainsi, on a prouvé :

Proposition 4. *Pour tout graphe non orienté G à plus de 6 sommets, il existe 3 points formant un sous-graphe complet de G ou un sous-graphe discret de G.*

Que se passe-t-il si on remplace 3 par n quelconque ? Peut-on trouver N tel que tout graphe à (plus de) N sommets contienne ou bien une clique de taille n ou bien une anticlique de taille n ? De plus, si on se place dans K_N, cela revient à demander si toute coloration des arêtes de K_N en deux couleurs admet un sous-ensemble de taille n monochromatique. On peut donc aussi se demander ce qui se passe si on augmente le nombre de couleurs. Il y a finalement une généralisation qui consiste à passer de $\mathcal{P}_2(V)$ à $\mathcal{P}_k(V)$ pour k quelconque; cette généralisation consiste intuitivement à augmenter la dimension de nos graphes. Tout ceci mène aux définitions suivantes :

Notation 2. Soit $\lambda, \mu, \nu, \kappa$ des cardinaux. On note $[\lambda]^\mu$ l'ensemble des sous-ensembles de λ de cardinal μ. On appelle coloration de $[\lambda]^\mu$ à l'aide de ν couleurs toute application $c\colon [\lambda]^\mu \to \nu$. Etant donnée une telle coloration c, un sous-ensemble $X \subset \lambda$ de cardinal $\geq \mu$ est dit monochromatique pour c si la restriction de c à $[X]^\mu$ est constante.
Si $\lambda \geq \kappa \geq \mu$, on note $\lambda \to (\kappa)^\mu_\nu$ la proposition "Pour toute coloration c de $[\lambda]^\mu$ à l'aide de ν couleurs, il existe $X \subset \lambda$ de cardinal κ qui est monochromatique".

On a introduit ces définitions en toute généralité mais nous nous intéresserons essentiellement à des entiers, donc tous ces cardinaux seront finis. Un des intérêts de la généralité de cette définition est qu'elle permet une preuve simplifiée du théorème de Ramsey fini, qu'on présente dans ce qui suit.

3.3 Le théorème de Ramsey (fini et infini)

On va montrer :

Théorème 2. *(Ramsey) Pour tout entiers $k \geq 1, n \geq d$, il existe $N \geq n$ tel que $N \to (n)^d_k$.*

On va présenter la preuve par compacité de ce résultat, en montrant en premier lieu $\aleph_0 \to (n)^d_k$ pour de tels entiers. Cela suffit: en effet, admettons ce résultat dans un premier temps, et soit n, d, k tels que dans l'énoncé du théorème. Supposons que pour tout N, on ait une coloration $c_N\colon [N]^d \to k$ qui n'admette pas de sous-ensemble monochromatique de taille n. On va alors en déduire une coloration de $\aleph_0$ avec la même propriété.
On considère un ensemble de variables propositionnelles deux à deux distinctes $P_{j,s}$ pour $j < k, s \in [\aleph_0]^d$. Ces variables sont supposées représenter "$c(s) = j$" (où c est la coloration qu'on essaie de construire). On considère sur ces variables la théorie constituée des axiomes suivants :

- "c est une coloration", formellement pour tout $s \in [\aleph_0]^d$, on a l'axiome

$$(\bigvee_{j<k} P_{j,s}) \wedge (\bigwedge_{i \neq j < k} \neg(P_{j,s} \wedge P_{i,s}))$$

- "c n'a pas de sous-ensemble monochromatique de taille n". Formellement, pour tout $J \subset \aleph_0$ de taille n on a l'axiome

$$\bigwedge_{j<k} \bigvee_{s \in [J]^d} \neg P_{j,s}$$

Ces axiomes nous donnent une théorie T. Si T est consistante et δ est une valuation qui la satisfait, alors on en déduit une coloration $c\colon [\aleph_0]^d \to k$ en posant $c(s) =$ l'unique j tel que $\delta(P_{j,s}) = 1$ (cela est bien défini par le premier type d'axiomes). Le deuxième type d'axiomes assure alors que $\aleph_0$ n'a pas de sous-ensemble monochromatique de taille n pour c.
Or T est consistante : en effet soit $\Sigma \subset T$ une sous-théorie finie. On a alors un ensemble fini $K \subset [\aleph_0]^d$ et un ensemble fini $R \subset [\aleph_0]^n$ tels que Σ consiste des axiomes écrits avant uniquement pour $s \in K$ et $J \in R$. On peut alors prendre N suffisamment grand pour contenir tous les entiers naturels qui apparaissent dans un $s \in K$ et un $J \in R$, et $N \geq n$. On prend alors une coloration c sur $\aleph_0$ qui prolonge c_N, et en définissant $\delta(P_{j,s}) = 1$ si $c(s) = j$, 0 sinon, on obtient une valuation qui satisfait Σ, par choix de N et de c_N. Donc T est finiment consistante, et donc par compacité elle est consistante. Cela contredit $\aleph_0 \to (n)^d_k$.
Il reste donc à prouver ce résultat. On prouve en fait plus fort: pour tous $k \geq 1, d$, $\aleph_0 \to (\aleph_0)^d_k$, ce qui suffit clairement. On prouve ceci par récurrence sur d. Pour $d = 0$, il n'y a rien à faire car tout sous-ensemble est monochromatique car $[X]^0 = \{\emptyset\}$ pour tout X. Pour $d = 1$, c'est exactement le

principe des tiroirs : on partitionne $\aleph_0$ (qui est en bijection évidente avec $[\aleph_0]^1$) en un nombre fini de sous-ensembles, l'un d'eux doit être infini.

Supposons le résultat acquis au rang d, et soit $c\colon [\aleph_0]^{d+1} \to k$ une coloration. Soit $M \subset \aleph_0$ infini et m un minorant strict de M. Alors il existe $N \subset M$ infini tel que $s \mapsto c(\{m\} \cup s)$ soit constante sur $[N]^d$. En effet, $|M| = \aleph_0$ et par hypothèse de récurrence, $\aleph_0 \to (\aleph_0)^d_k$ donc M a un sous-ensemble monochromatique pour la coloration $\tilde{c}\colon s \mapsto c(\{m\} \cup s)$.On construit alors par récurrence une suite (m_i) d'entiers et une suite (c_i) de couleurs (éléments de k) telles que pour tous $i_0 < ... < i_d$, on ait $c(\{m_{i_0}, ..., m_{i_d}\}) = c_{i_0}$.
Pour cela on pose $m_0 = 0$, $M_0 = \aleph_0 \setminus \{0\}$, et on applique ce qui précède pour obtenir $M_1 \subset M_0$ infini tel que pour tout $s \in [M_1]^d$, $c(\{0\} \cup s) = c_0$. On continue alors en prenant $m_1 = \min M_1$ et $M_1' = M_1 \setminus \{m_1\}$. On obtient alors $M_2 \subset M_1'$ infini tel que pour tout $s \in [M_2]^d, c(\{m_1\} \cup s) = c_1$. On continue comme ceci par récurrence et il est clair que nos suites vérifient les propriétés annoncées.
Par le principe des tiroirs, k étant fini, l'une des couleurs apparaît infiniment souvent dans (c_i), soit j une telle couleur. On considère alors $N = \{i \mid c_i = j\}$, et alors par construction, N est infini et monochromatique pour c. Donc $\aleph_0 \to (\aleph_0)^{d+1}_k$, ce qui complète la récurrence, et donc la preuve.

On peut aussi évidemment donner une preuve purement finitiste de ce théorème, dont on peut dire qu'elle donne des bornes plus explicites que celle qu'on vient de donner, mais on se contentera ici de celle-ci.

3.4 Théorie de Ramsey structurelle

Colorier $[N]^d$ revient à colorier les sous-structures des N $(= \{0, ..., N-1\})$ et chercher un sous-ensemble monochromatique revient à chercher une sous-structure dont tous les sous-structures sont coloriées de la même couleur, où ici "structure" ne veut rien dire de plus que "ensemble". Mais ce point de vue mène à la généralisation suivante :

Notation 3. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont des L-structures, on écrira $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ si et seulement si il existe un plongement de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ (c'est un préordre). Si $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$, on peut écrire $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \subset \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$ (ce n'est une inclusion à proprement parler que si on représente les plongements uniquement par leur graphe, mais on a toujours une injection canonique via la composition à gauche par l'inclusion de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C}$)
On a alors une notion similaire de coloration de $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ à l'aide de k couleurs, pour $k \geq 1$. Pour une telle coloration $c\colon \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}} \to k$, une sous-structure $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ est dite homogène ou monochromatique si la restriction de c à $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ est constante.
La notation $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$ signifie alors : pour toute coloration de $\binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$ à l'aide de k couleurs, il existe $\gamma \in \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ tel que $\gamma(\mathbf{B})$ est monochromatique (cela revient à dire que $f \in \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \mapsto c(\gamma \circ f)$ est constante, symboliquement on dit que la restriction de c à $\gamma \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ est constante).

Si par exemple on prend $L = \{<\}$, $\mathbf{C} = (N, \in)$, $\mathbf{B} = (n, \in)$, $\mathbf{A} = (d, \in)$, N, n, d entiers, alors $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$ si et seulement si $N \to (n)^d_k$ (en effet un plongement $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ correspond alors exactement à un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ de cardinal d).

Définition 6. Soit $\mathcal{K}$ une classe de L-structures. On dit que $\mathcal{K}$ a la *propriété de Ramsey* si quel que soit $k \geq 1$ et $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$ tels que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, il existe $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ tel que $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ et $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$.

Le théorème de Ramsey fini peut donc s'énoncer comme suit : la classe des ordres totaux finis a la propriété de Ramsey. Dans ce mémoire, nous allons, suivant [KPT], expliciter un lien entre le fait que $\mathcal{K}$ ait la propriété de Ramsey et des propriétés dynamiques d'un groupe lié à $\mathcal{K}$, sous certaines hypothèses sur $\mathcal{K}$.
Faisons déjà une remarque simple sur la propriété de Ramsey :

Proposition 5. *Une classe $\mathcal{K}$ de L-structures a la propriété de Ramsey si et seulement si quel que soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, il existe $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ telle que $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_2$.*

Preuve. ($\rightarrow$) : Immédiat par définition.
($\leftarrow$) : Supposons la condition écrite, et prouvons par récurrence sur $k \geq 1$ que pour toutes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}, \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, il existe $\mathbf{C} \in \mathcal{K}, \mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ telle que $\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{B})_k^{\mathbf{A}}$. C'est clair pour $k = 1$ et le cas $k = 2$ est donné par hypothèse. Supposons le résultat acquis pour k et soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}, \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$.
On choisit $\mathbf{C} \in \mathcal{K}, \mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ telle que $\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{B})_k^{\mathbf{A}}$. On choisit ensuite $\mathbf{D} \in \mathcal{K}, \mathbf{D} \geq \mathbf{C}$ telle que $\mathbf{D} \rightarrow (\mathbf{C})_2^{\mathbf{A}}$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse en fait). Nous affirmons qu'alors $\mathbf{D} \rightarrow (\mathbf{B})_{k+1}^{\mathbf{A}}$. Soit en effet $c\colon \binom{\mathbf{D}}{\mathbf{A}} \rightarrow k+1$ une coloration. Définissons $\tilde{c}\colon \binom{\mathbf{D}}{\mathbf{A}} \rightarrow 2$ par $\tilde{c}(\gamma) = 0$ si $c(\gamma) \in k$, $\tilde{c}(\gamma) = 1$ sinon (i.e. si $c(\gamma) = k$), pour $\gamma\colon \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ plongement. Par hypothèse, nous avons alors $\gamma_0 \in \binom{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}$ tel que $\tilde{c}$ restreinte à $\binom{\mathbf{C}_0}{\mathbf{A}}$ soit constante, où on a posé $\mathbf{C}_0 = \gamma_0(\mathbf{C})$.
Si elle est constante égale à 1, alors c l'est aussi (égale à k), et donc puisque $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$, nous avons une sous-structure $\gamma_0(\mathbf{B}) = \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{C}_0$ et $(\gamma_0)_{|\mathbf{B}} \in \binom{\mathbf{C}_0}{\mathbf{B}}$, et alors c restreinte à $\binom{\mathbf{B}_0}{\mathbf{A}}$ est constante, et on a obtenu ce qu'on voulait.
Sinon, elle est constante égale à 0 et donc c restreinte à ce même ensemble est à valeurs dans k. Ainsi en abusant la notation c on a la coloration $c\colon \binom{\mathbf{C}_0}{\mathbf{A}} \rightarrow k$. $\mathbf{C}_0$ étant isomorphe à $\mathbf{C}$, il est clair que $\mathbf{C}_0 \rightarrow (\mathbf{B})_k^{\mathbf{A}}$ par choix de $\mathbf{C}$. De ce fait il existe $\gamma_1 \in \binom{\mathbf{C}_0}{\mathbf{B}}$ telle que c restreinte à $\binom{\mathbf{B}_1}{\mathbf{A}}$ soit constante, où $\mathbf{B}_1 = \gamma_1(\mathbf{B})$. Mais alors $\gamma_1 \in \binom{\mathbf{D}}{\mathbf{A}}$, et on a aussi obtenu ce qu'on voulait.
Cela prouve l'affirmation, et donc conclut la récurrence, et ainsi la preuve. $\square$

Remarque 3. Les éléments d'une classe $\mathcal{K}$ de L-structures finies ayant la propriété de Ramsey sont rigides, c'est à dire qu'ils n'ont qu'un automorphisme (l'identité). En effet, soit $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $k = |\mathrm{Aut}(\mathbf{A})|$. Par hypothèse il existe $\mathbf{C} \geq \mathbf{A}$ telle que $\mathbf{C} \rightarrow (\mathbf{A})_k^{\mathbf{A}}$. Alors pour tout $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ isomorphe à $\mathbf{A}$ on choisit un tel isomorphisme $\phi_{\mathbf{B}}$, et on définit une bijection $c_{\mathbf{B}}\colon \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ par $c_{\mathbf{B}}(p) = \phi_{\mathbf{B}} \circ p$ (la définition est bonne car entre des structures finies isomorphes, donc de même cardinal, tout plongement est un isomorphisme). On définit enfin $c\colon \binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ par $c(p) = c_{Im(p)}(p)$. Alors d'après la propriété de Ramsey, il existe $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ isomorphe à $\mathbf{A}$ telle que $c_{|\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}} = c_{\mathbf{B}}$ soit constante, autrement dit $|\mathrm{Aut}(\mathbf{A})| = 1$ car $c_{\mathbf{B}}$ est surjective, donc $\mathbf{A}$ est bien rigide.
C'est pour cette raison qu'on devra parfois introduire une relation binaire dans le langage, interprétée comme un ordre total, afin d'obtenir la rigidité nécessaire à la propriété de Ramsey (on l'a déjà fait en réalité, pour réinterpréter structurellement le théorème de Ramsey fini).

4 Dynamique topologique

4.1 Introduction

La dynamique topologique étudie les transformations d'un espace topologique sous l'action de fonctions continues $X \rightarrow X$. Nous nous restreignons au cadre où ces fonctions sont des homéomorphismes provenant d'une action d'un groupe topologique et où X est compact. Cela mènera à des considérations sur les différents types d'actions d'un groupe G, que l'on reliera dans la suite de ce mémoire à des propriétés d'une certaine classe de structures associée à G.

4.2 Flots, flots minimaux (universels)

Définition 7. Un *système dynamique* est un triplet (G, X, ρ) où G est un groupe topologique, X un espace topologique compact non vide (au sens francophone, c'est-à-dire en particulier séparé), et $\rho\colon G \times X \rightarrow X$ est une action continue.
On notera souvent $g \cdot x$ au lieu de $\rho(g)(x)$.
G étant un groupe topologique donné, on dira que (X, ρ) est un *G-flot* si (G, X, ρ) est un système dynamique; et si l'action est claire dans le contexte et si cela n'entraîne aucune confusion, on parlera du "G-flot X".

Exemples 1. Si G est un groupe compact, l'action de G sur G par translation à gauche en fait un G-flot.
L'action triviale d'un groupe G sur $\{0\}$ est un G-flot.
$\mathbb{R}$ agit sur le disque unité fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ par rotations.

Définition 8. Si $(X, \rho), (Y, \tau)$ sont deux G-flots, un *morphisme* $f\colon (X, \rho) \rightarrow (Y, \tau)$ est une application continue $f\colon X \rightarrow Y$ G-équivariante, c'est-à-dire $f(\rho(g)(x)) = \tau(g)(f(x))$ pour tout

$(g, x) \in G \times X$. Plus succintement, avec les abus de notations mentionnés plus haut, c'est une application continue telle que pour tous $g, x, f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$.
Un *isomorphisme* est un morphisme $f : X \to Y$ tel qu'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tels que $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$.

Définition 9. Soit X un G-flot. Un *sous-flot* de X est un sous-espace $Y \subset X$ fermé (donc compact) non vide stable par G. En particulier un sous-flot de X muni de l'action induite est un G-flot. Un sous-flot Y est propre si $Y \neq X$.
Un G-flot X est *minimal* s'il n'admet pas de sous-flot propre.

On a facilement le résultat suivant grâce au lemme de Zorn :

Proposition 6. *Soit X un G-flot. Alors X admet un sous-flot minimal.*

Preuve. Soit $\Omega = \{Y \subset X, Y \text{ fermé non vide et } G \cdot Y \subset Y\}$, qu'on ordonne par inclusion inverse, $Y \leq Z \iff Z \subset Y$.
Alors Ω est inductif: soit en effet $\mathcal{C}$ une chaîne de Ω, et $Y = \bigcap \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, il s'agit d'une intersection décroissante de fermés non vides de X, X étant compact, c'est une intersection décroissante de compacts non vides de X, qui est donc non vide.
De plus, Y est fermé en tant qu'intersection de fermés.
Finalement, si $g \in G, y \in Y$, soit $Z \in \mathcal{C}$. Alors $y \in Z$ et donc $g \cdot y \in Z$. Donc $g \cdot y \in Y$, et donc $G \cdot Y \subset Y$, donc $Y \in \Omega$, et Y est bien un minorant pour l'inclusion, donc un majorant pour $\leq$ de $\mathcal{C}$.
Par le lemme de Zorn, Ω admet un élément maximal pour $\leq$, il est alors facile de vérifier que cet élément maximal est un sous-flot de X minimal. $\square$

Remarquons qu'un G-flot X est minimal si et seulement si pour tout $x \in X$, $G \cdot x$ est dense dans X. En particulier, si Y est un G-flot, X un G-flot minimal, et $f : Y \to X$ un morphisme de G-flots, alors f est surjective (en effet son image est compacte comme image continue d'un compact, et contient une partie dense de X).

Définition 10. Un G-flot X est un *G-flot minimal universel* s'il est minimal et si pour tout G-flot minimal Y, il existe un morphisme $\pi : X \to Y$ de G-flots.

Exemple 3. Lorsque G est compact, l'action par translation à gauche sur lui-même est un G-flot minimal universel (en fait, "le flot minimal universel" comme on verra plus tard).

Un argument de cardinalité donne l'existence, pour tout groupe topologique G, d'un G-flot minimal universel:

Proposition 7. *Soit G un groupe topologique. Il existe un G-flot minimal universel.*

Preuve. On fixe G. Pour simplifier l'écriture, on parlera désormais de "flots" au lieu de G-flots.
On a établi précédemment l'existence de flots minimaux (prendre par exemple le flot trivial sur un singleton $\{\star\}$). Nous allons d'abord borner le cardinal d'un tel flot. Soit donc X un flot minimal. Soit $x \in X$. Alors $\overline{G \cdot x}$ est un fermé non vide de X, stable par G, c'est donc X. Pour tout $y \in X$, et tout voisinage V de y, on a $V \cap G \cdot x \neq \emptyset$. On pose $\phi : G \to X$ définie par $\phi(g) = g \cdot x$. Soit $D \subset G$ une partie dense.
Considérons alors $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ définie par $f(y) = \{\phi^{-1}(V) \cap D, V \in \mathcal{V}(y)\}$; où nous notons $\mathcal{V}(y)$ l'ensemble des voisinages de y dans X. Montrons que f est injective: soit $y \neq z \in X$. Alors comme X est séparé, on a V, W voisinages de y, z respectivement tels que $V \cap W = \emptyset$. Alors $\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(W) = \emptyset$. Donc $\phi^{-1}(V) \cap D \notin f(z), \phi^{-1}(W) \cap D \notin f(y)$ (si $\phi^{-1}(V) \cap D = \phi^{-1}(U) \cap D, U \in \mathcal{V}(z)$, alors $\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(W) \cap D = \phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(W) \cap D = \phi^{-1}(U \cap W) \cap D \neq \emptyset$ par densité de $G \cdot x$ et de D), en particulier $f(z) \neq f(y)$.
Donc f est injective : $|X| \leq 2^{2^{|D|}}$. En particulier il existe un ensemble K de flots minimaux tel que tout flot minimal est isomorphe à un flot $X \in K$.

On considère alors le flot $Y = \prod_{X \in K} X$ muni de l'action de G coordonnée par coordonnée. Cet espace est bien compact comme produit de compacts (théorème de Tychonoff) et non vide comme produit d'ensembles non vides (axiome du choix), l'action ansi définie est de plus clairement continue. Donc c'est bien un flot.
Soit W un sous-flot minimal de Y (on a établi qu'il en existait).
Si Z est un flot minimal, il existe $X \in K$ et $f\colon X \to Z$ un isomorphisme de flots. On considère alors $f \circ \pi_X \colon Y \to Z$ qui est bien un morphisme de flots; où π_X est la projection de Y sur X, qui est bien un morphisme de flots par définition de l'action sur Y. Donc $(f \circ \pi_X)_{|W}$ est aussi un morphisme de flots. Ainsi W est un flot minimal, et pour tout flot minimal Z, il existe $g\colon W \to Z$ morphisme de flots: W est un flot minimal universel. □

Remarquons qu'on pourrait utiliser G à la place de D, mais que D permet d'obtenir une meilleure borne de cardinal: par exemple si G est polonais indénombrable, il a la puissance du continu mais il est séparable, on obtient donc un D de cardinal $\aleph_0$, ce qui est strictement mieux que $2^{\aleph_0}$.

Soit X, Y deux flots minimaux universels. Par définition, nous avons $f\colon X \to Y, g\colon Y \to X$ des morphismes de G-flots. Alors $g \circ f\colon X \to X$ est aussi un morphisme de G-flots. X, Y sont compacts donc f, g sont fermées, donc pour que ce soit des isomorphismes il suffit qu'elles soient injectives. On veut donc prouver que $g \circ f$ est injective, car alors f l'est, et donc inversible, et donc X, Y sont bien isomorphes. Or, on a :

Proposition 8. *Soit G un groupe topologique, X un flot minimal universel, et $f\colon X \to X$ un morphisme de flots. Alors f est injectif.*

La preuve passe par un lemme :

Lemme 1. *Soit $(I, \leq)$ un ensemble dirigé, et $((X_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{j \leq i})$ un système inverse de flots minimaux, avec $f_{ij}\colon X_i \to X_j$ morphisme de flots ($f_{ij} \circ f_{ki} = f_{kj}$ et $f_{ii} = id_{X_i}$). Alors $\varprojlim_i X_i$ est naturellement muni d'une structure de G-flot, qui est un flot minimal.*

Remarque 4. On rappelle qu'un *ensemble (ordonné) dirigé* $(I, \leq)$ est un ensemble ordonné tel que pour tous $i, j \in I$, il existe k tel que $i, j \leq k$.

Preuve. Rappelons que $\varprojlim_i X_i := \{x \in \prod_{i \in I} X_i \mid \forall j \leq i \in I, x_j = f_{ij}(x_i)\}$ est muni de la topologie induite par la topologie produit. Les f_{ij} étant des morphismes de flots, il s'agit clairement d'un sous-flot du flot produit (qui est bien un flot car compact en tant que produit de compacts).
Il reste donc à montrer qu'il est minimal. Comme on l'a remarqué, cela revient à dire que pour tout $x \in \varprojlim X_i$, $G \cdot x$ est dense dans $\varprojlim X_i$. Soit donc $x, y \in \varprojlim X_i$, et V un voisinage de y.

Notant π_j la projection de $\varprojlim_n X_i$ sur X_j, par définition de la topologie produit, on peut supposer que V est de la forme $\bigcap_{k=1} \pi_{j_k}^{-1}(U_k)$, n un entier, $j_k \in I$ et U_k ouvert dans X_{j_k} contenant y_{j_k}.
I étant dirigé, on peut choisir $l \in I, \forall k \in \{1, ..., n\}, l \geq j_k$. Soit alors W un voisinage de y_l tel que pour tout $k \in \{1, ...n\}$, $f_{lj_k}(W) \subset U_k$ (c'est possible par continuité des f_{lj_k}, et car $f_{lj_k}(y_l) = y_{j_k}$.
Comme X_l est un flot minimal, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_l \in W$. Alors pour $k \in \{1, ..., n\}$, $g \cdot x_{j_k} = g \cdot f_{lj_k}(x_l) = f_{lj_k}(g \cdot x_l) \in f_{lj_k}(W) \subset U_k$. Donc $g \cdot x \in V$.
Ainsi $G \cdot x$ est dense dans $\varprojlim_i X_i$, ceci quel que soit x: il s'agit bien d'un flot minimal. □

On peut désormais prouver la proposition.

Preuve de la proposition. En effet soit $f\colon X \to X$ un morphisme de flots qui ne soit pas injectif. Soit $x, x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = x = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.
Nous construisons par récurrence transfinie une suite $(M_\alpha, (f^\alpha_\beta)_{\beta < \alpha})$ de flots minimaux muni de morphismes de flots $f^\alpha_\beta\colon M_\alpha \to M_\beta$ qui forment un système inverse de flots de la manière suivante : $M_0 = X$, $M_1 = X, f^1_0 = f$. On suppose les $(M_\alpha, (f^\alpha_\beta)_{\beta<\alpha})$ construits pour $\alpha < \delta$. Alors il y a différents cas :

- Si δ est limite, M_δ est la limite inverse des M_α, $\alpha < \delta$, et f^δ_α est la projection canonique. C'est bien un flot minimal d'après le lemme précédent.

- Si $\delta = \lambda + 1$, λ limite, alors $M_\delta = X$, f^δ_λ est un morphisme de flots $X \to M_\lambda$ (qui existe par minimalité de M_λ et universalité de X), les autres f^δ_α sont déterminés par ce morphisme pour former un système inverse.

- Si $\delta = \beta + 1$, β non limite, alors par construction $M_\beta = X$, et donc on peut poser $M_\delta = X$, $f^\delta_\beta = f$ et les autres f^δ_α sont déterminés par ce morphisme pour former un système inverse.

Nous allons désormais obtenir une contradiction en montrant que pour κ un ordinal limite, M_κ a un cardinal supérieur à celui de κ, qui n'est pas borné, alors qu'il existe une surjection $X \to M_\kappa$ (absurde pour $\kappa > |X|$ par exemple).
En effet soit κ un ordinal limite. Par construction, $M_\kappa = \varprojlim_{\alpha<\kappa} M_\alpha$. Alors pour $\alpha < \kappa$, on peut définir $m^\alpha \in M_\kappa$ de la manière suivante: on choisit un élément de M_κ tel que $m^\alpha_{\alpha+1} = x$ (cela a un sens car $M_{\alpha+1} = X$) $m^\alpha_{\alpha+2} = x_1$, et tel que pour tout $\delta \neq \alpha + 1$, si $m^\alpha_\delta = x$, alors $m^\alpha_{\delta+1} = x_2$. Un tel élément existe toujours car f est surjective.
De plus, si $\alpha \neq \beta$, alors $x_1 = m^\alpha_{\alpha+2} \neq m^\beta_{\alpha+2}$ par construction (si $m^\beta_{\alpha+2} = x_1$, alors $m^\beta_{\alpha+1} = x$, et donc par construction de m^β, $\alpha + 1 = \beta + 1$ et donc $\alpha = \beta$.
Ainsi $m\colon \kappa \to \varprojlim_{\alpha<\kappa} M_\alpha = M_\kappa, \alpha \mapsto m^\alpha$ est injective, et donc $|\kappa| \leq |M_\kappa|$.

Cela contredit le fait qu'il existe une surjection $X \to M_\kappa$ si $|\kappa| > |X|$. On a obtenu une contradiction, donc en fait f est injective. □

On peut ainsi conclure l'argument ci-avant et conclure qu'il existe, à isomorphisme près, un unique G-flot minimal universel.

Théorème 3. *Soit G un groupe topologique. Alors il existe, à isomorphisme près, un unique G-flot minimal universel.*

On peut donc parler "du" flot minimal universel d'un groupe topologique G, que l'on notera $M(G)$ (on peut par exemple décréter qu'il s'agit de l'un de ceux construits explicitement dans la preuve d'existence). Etudier $M(G)$ permet alors d'étudier G indirectement. Un cas particulier très intéressant est le suivant :

Définition 11. Un groupe topologique G est dit *extrêmement moyennable* si et seulement si $M(G)$ est un singleton muni de l'action triviale de G. Cela revient à dire que tout G-flot admet un point fixe, ce que l'on peut aussi prendre comme définition d'extrême moyennabilité.

Exemples 2. Un groupe topologique compact non trivial n'est jamais extrêmement moyennable (il est son propre flot minimal universel). $\mathbb{Z}$ non plus n'est pas extrêmement moyennable (il agit transitivement sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Il est beaucoup plus difficile d'exhiber un groupe topologique extrêmement moyennable. Le premier connu historiquement est le groupe des isométries de l'espace de Hilbert séparable ℓ^2 (muni de la topologie de la convergence simple, voir [8]), mais le théorème qu'on montre dans la section suivante fournira de nombreux autres exemples. De plus, un sous-groupe ouvert d'un groupe extrêmement moyennable est encore extrêmement moyennable (on ne donnera pas la démonstration mais elle n'est pas difficile, se référer à [7]).

Remarque 5. La "construction" que l'on a donnée du flot minimal universel d'un groupe n'est pas très explicite (autant que la "construction" d'un nombre transcendant donnée par la dénombrabilité des algébriques). Il en existe une autre construction utilisant la *compactification de Samuel* à partir de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ bornées et uniformément continues à droite, qu'on explicitera pas plus mais qui donne un point de vue plus concret sur cet objet. Dans la suite, quand on parlera de "calculer" un flot minimal universel, cela signifiera trouver une description explicite et si possible agréable de l'espace compact et de l'action.

Il est intéressant de mentionner un résultat dû à Veech (dont une preuve se trouve dans les annexes de [KPT]) qui affirme que l'action d'un groupe localement compact sur son flot minimal universel est libre (on avait déjà ce résultat pour les groupes compacts), avec comme corollaire que le flot minimal universel d'un groupe localement compact non compact n'est jamais métrisable. En particulier, alors que de nombreux groupes usuels le sont, les groupes extrêmement moyennables non triviaux ne peuvent pas êtres localement compacts : il est légitime qu'ils soient difficiles à exhiber.

5 Théorème de correspondance

Nous sommes à présent en possession de tous les outils pour énoncer et démontrer le théorème de correspondance de Kechris, Pestov et Todorcevic

Théorème 4. *Soit* $\mathbf{M}$ *une L-structure de Fraïssé localement finie,* $\mathrm{Aut}(\mathbf{M})$ *est extrêmement moyennable si et seulement si* $\mathrm{Age}(\mathbf{M})$ *a la propriété de Ramsey.*

Grâce au théorème de Fraïssé, on peut reformuler ce résultat.

Théorème 5. *Soit* $\mathcal{K}$ *une classe de Fraïssé d'ensembles finis,* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Flim}(\mathcal{K}))$ *est extrêmement moyennable si et seulement si* $\mathcal{K}$ *a la propriété de Ramsey.*

Cette partie est principalement consacrée à la preuve de ce théorème. Sans perte de généralité, on suppose dans la suite que l'univers de $\mathbf{M}$ est $\mathbb{N}$ et on note $G = \mathrm{Aut}(\mathbf{M}) \leq \mathfrak{S}_\infty$. On procède globalement par équivalences, en commençant par réduire la propriété de Ramsey finie à une propriété de Ramsey infinie plus facilement manipulable.

5.1 Réduction à une propriété de Ramsey infinie

De même que dans la preuve de l'équivalence entre les théorèmes de Ramsey fini et infini, l'une des implications est évidente; l'autre nécessite un peu plus de travail.

Proposition 9. *Soit* $k > 1$ *entier. Pour tout* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, s'il existe* $\mathbf{C} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ *telle que* $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$*, alors* $\mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$*.*

Preuve. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, et soit $\mathbf{C}$ telle que dans les hypothèses, et $j \colon \mathbf{C} \to M$ un plongement (par exemple l'inclusion si $\mathbf{C} \subset \mathbf{M}$).
Soit $c \colon \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}} \to k$ un coloriage. Alors $\tilde{c} \colon f \mapsto c(j \circ f)$ est un coloriage de $\binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$ en k couleurs, donc il existe un plongement $g \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tel que $\tilde{c}$ restreinte à $g \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ soit constante. Alors c restreinte à $j \circ g \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ est constante, et donc $j \circ g(\mathbf{B})$ est une sous-structure c-homogène appartenant à $\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{B}}$: on a bien obtenu ce qu'on voulait. $\square$

On va démontrer la réciproque, dans le cas $k = 2$. On peut faire la remarque suivante avant la preuve: la preuve qui a été faite pour le passage du théorème de Ramsey infini au théorème de Ramsey fini s'adapte sans aucun souci à notre cas si L est relationnel; c'est si L a aussi des symboles fonctionnels que les problèmes dans cette preuve surgissent (les axiomes propositionnels qu'on avait écrits pour cette preuve ne sont plus nécessairement finis car une structure finiment générée peut avoir une infinité de sous-structures).
Ainsi si on se restreignait aux structures associées "canoniquement" aux sous-groupes fermés de $\mathfrak{S}_\infty$, on n'aurait essentiellement pas de preuve à refaire, et ce sont ces cas qui sont essentiellement intéressants pour le théorème qu'on cherche à établir. Cependant la réciproque reste vraie pour des structures quelconques, donc on propose ici la preuve générale, qui est un peu plus compliquée.

Théorème 6. *Pour tout* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, si* $\mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_2$*, alors il existe* $\mathbf{C} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ *telle que* $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_2$*.*

Preuve. Soit de telles $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$.
Supposons alors que pour tout $\mathbf{D} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$ telle que $\mathbf{B} \leq \mathbf{D}$, il existe un coloriage $c_{\mathbf{D}}$ de $\binom{\mathbf{D}}{\mathbf{A}}$ sans sous-structure homogène isomorphe à $\mathbf{B}$.
Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ qui contient les $\{E \subset \mathbb{N} \mid \mathbf{B} \cup F \subset E\}$ pour F fini (la famille de ces ensembles, F variant a la propriété de l'intersection finie, et est donc bien incluse dans un ultrafiltre).
Soit $\mathbf{A_1} = j_1(\mathbf{A})$ pour un $j_1 \in \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$. Alors l'un (exactement) des deux ensembles suivants est dans $\mathcal{U}$: $\{E \subset \mathbb{N} \mid E$ est fini et $j_1(\mathbf{A}) \cup \mathbf{B} \subset E$ et $c_{\langle E \rangle}(j_1) = 0\}$ ou $\{E \subset \mathbb{N} \mid E$ est fini et $j_1(\mathbf{A}) \cup \mathbf{B} \subset E$ et $c_{\langle E \rangle}(j_1) = 1\}$. En effet, $\{E \subset \mathbb{N} \mid E$ est fini et $j_1(\mathbf{A}) \cup \mathbf{B} \subset E\}$ est dans $\mathcal{U}$ par construction ($\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont finies par hypothèse sur $\mathbf{M}$), et ces deux ensembles en forment une partition.

Nous définissons alors $c(j_1)$ comme 0 ou 1 selon lequel de ces deux ensembles est dans $\mathcal{U}$, et

on obtient donc un coloriage $c\colon \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}} \to 2$. Par hypothèse, il existe $j \in \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{B}}$ tel que c restreint à $j \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ soit constante, disons égale à 0. Si $f \in \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$, alors $\{E \subset \mathbb{N} \mid E$ est fini et $j \circ f(\mathbf{A}) \cup \mathbf{B} \subset E$ et $c_{\langle E\rangle}(j \circ f) = 0 = c(j \circ f)\} \in \mathcal{U}$.
Par locale finitude, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ sont finies donc $\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ l'est aussi donc $\bigcap_{f\in\binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}} \{E \subset \mathbb{N} \mid E$ est fini et $j \circ f(\mathbf{A}) \cup \mathbf{B} \subset E$ et $c_{\langle E\rangle}(j \circ f) = 0 = c(j \circ f)\} \in \mathcal{U}$; soit E dans cet ensemble (qui est non vide car dans $\mathcal{U}$), et $\mathbf{E} = \langle E\rangle$. Alors $c_{\mathbf{E}}$ restreinte à $j \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ est constante égale à 0, ce qui est contradictoire avec la définition de $c_{\mathbf{E}}$.
L'hypothèse est donc absurde: il existe $\mathbf{C} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$ telle que $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_2$, ce qui est ce que nous voulions prouver. □

À l'aide des deux résultats précédents on obtient l'équivalence suivante, qui constitue le premier pas de la preuve du théorème de correspondance.

Proposition 10. $\mathrm{Age}(\mathbf{M})$ *a la propriété de Ramsey si et seulement si pour tout* $k > 1$ *entier,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M}), \mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, on a* $\mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$

Preuve. Le sens direct est exactement la proposition 9. Pour le sens réciproque on peut spécialiser en $k = 2$, appliquer le théorème 6 et revenir de $k = 2$ à k quelconque par la proposition 5. □

5.2 Actions et coloriages

À ce stade, on peut commencer à introduire des actions de G sur certains espaces associés à des coloriages, et traduire les propriétés de Ramsey comme des propriétés de ces actions.

Si $k > 1$ est un entier et $\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$, G agit sur l'ensemble $k^{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}}$ des coloriages des plongements comme suit : si $c \in k^{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}}$ et $g \in G$ on pose $(g \cdot c)\colon f \mapsto c(g^{-1} \circ f)$.

De même, pour $P \subset \mathbb{N}$, on note $G_P = \{g \in G \mid \forall x \in P,\, g(x) = x\}$ le stabilisateur point par point de P (c'est un sous-groupe de G). Alors si $k > 1$ est un entier et $\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$, G agit sur l'espace $C_{k,\mathbf{A}} = k^{G/G_{\mathbf{A}}}$ des k-coloriages des classes à gauche de $G_{\mathbf{A}}$ comme suit : pour $c \in C_{k,\mathbf{A}}$, $(g \cdot c)\colon hG_{\mathbf{A}} \mapsto c(g^{-1}hG_{\mathbf{A}})$.

On note ces deux actions de la même manière car en réalité elles sont isomorphes : en effet l'application de restriction à $\mathbf{A}$ vue de G dans $\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$ est surjective par ultrahomogénéité de $\mathbf{M}$ et passe au quotient en une application bijective ϕ de $G/G_{\mathbf{A}}$ dans $\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$ car pour $g, g' \in G$, $g_{|\mathbf{A}} = g'_{|\mathbf{A}} \Leftrightarrow g^{-1}g' \in G_{\mathbf{A}}$. De plus $(gg')_{|\mathbf{A}} = g \circ \left(g'_{|\mathbf{A}}\right)$ c'est à dire que $\phi(gg'G_{\mathbf{A}}) = g \circ (\phi(g'G_{\mathbf{A}}))$, ainsi l'application $\Phi\colon k^{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}} \to k^{G/G_{\mathbf{A}}}$ qui à c associe $c \circ \phi$ est une bijection G-équivariante.

On peut alors reformuler la propriété de Ramsey à l'aide de ces actions, ce qui nous donne un deuxième pas dans la preuve du théorème.

Proposition 11. *Pour tout* $k > 1$ *entier et* $\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$*, on a équivalence entre :*

- *Pour tout* $\mathbf{B} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$ *tel que* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*,* $\mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$
- *Pour tout* $F \subset \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$ *finie, et tout* $c \in k^{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}}$*, il existe* $g \in G$ *tel que* $(g \cdot c)_{|F}$ *soit constant.*
- *Pour tout* $F \subset G/G_{\mathbf{A}}$ *finie, et tout* $c \in C_{k,\mathbf{A}}$*, il existe* $g \in G$ *tel que* $(g \cdot c)_{|F}$ *soit constant.*

Preuve. L'équivalence entre les deux dernières propriétés est une conséquence immédiate de l'isomorphisme donné par Φ.

Supposons la première propriété et donnons-nous F comme dans la deuxième (on suppose F non vide sinon il n'y a rien à prouver). Il suffit de prendre $\mathbf{B} = \langle Im(f) \mid f \in F\rangle \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$. Comme F est non vide on a bien $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, donc par la première propriété $\mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_k$, c'est à dire que pour tout $c \in C_{k,\mathbf{A}}$, il existe $\mathbf{B}' \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$ isomorphe à $\mathbf{B}$ tel $c(p)$ prend la même valeur pour tout $p \in \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$ vérifiant $Im(p) \subset \mathbf{B}'$. Soit $g \in G$ prolongeant l'isomorphisme entre $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{B}$: $(g \cdot c)(p) = c(g^{-1} \circ p)$ prend la même valeur pour tout $p \in \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}$ vérifiant $Im(p) \subset \mathbf{B}$, en particulier pour tout $p \in F$.

Supposons enfin la deuxième propriété et donnons nous $\mathbf{B}$ comme dans la première, et posons $F = \left\{ p \in \binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}} \mid Im(p) \subset \mathbf{B} \right\}$: F est bien finie par locale finitude de $\mathbf{M}$. Pour montrer la première propriété, fixons $c \in k^{\binom{\mathbf{M}}{\mathbf{A}}}$. Par la deuxième propriété, il existe $g \in G$ tel que $(g \cdot c)_{|F}$ est constant égal à $i \in k$, et alors pour tout $p \in \binom{M}{\mathbf{A}}$ tel que $Im(p) \subset \mathbf{B}' = g(\mathbf{B})$, $g^{-1} \circ p \in F$ donc $(g \cdot c)(p) = i$ ce qui conclut car $\mathbf{B}'$ est bien isomorphe à $\mathbf{B}$. □

Remarque 6. Si $c \in C_{k,\mathbf{A}}$ est un point fixe de l'action, pour tout $g \in G$, $c = g \cdot c$ donc $c(gG_{\mathbf{A}}) = (g \cdot c)(gG_{\mathbf{A}}) = c(G_{\mathbf{A}})$ donc c est constant, et réciproquement tout coloriage constant est point fixe.

5.3 Topologie des coloriages et fin de la preuve

Pour franchir le troisième et dernier pas de la démonstration, il faut introduire des considérations topologiques dans l'action qu'on vient de considérer pour en faire un G-flot et transporter ses propriétés à tout G-flot afin d'obtenir finalement l'extrême moyennabilité de G. Cette partie de la démonstration ne nécessite plus la finitude locale de $\mathbf{M}$

Remarquons d'abord que pour tout $P \subset \mathbb{N}$, $G_{\langle P \rangle} = G_P$ (une inclusion est évidente, l'autre provient du fait que $\{x \in \mathbf{M} \mid \forall g \in G_P \, g(x) = x\}$ est une sous-structure contenant P donc contient $\langle P \rangle$) en particulier si P est fini ou finiment engendré, G_P est ouvert. Plus précisément, la famille $(G_{\mathbf{A}})_{\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})}$ forme une base de voisinages ouverts de $id_{\mathbb{N}}$ dans G. Ainsi on a le lemme suivant.

Lemme 2. *$C_{k,\mathbf{A}}$ est compact pour la topologie produit des topologies discrètes et l'action de G en fait un G-flot.*

Preuve. Le premier point provient du théorème de Tychonoff et pour le deuxième, si $g \in G$, $c_0 \in C_{k,\mathbf{A}}$ et U est un voisinage de $g \cdot c_0$, U contient un ouvert V de la forme $\{c \in C_{k,A} \mid c_{|F} = (g \cdot c_0)_{|F}\}$ pour F une partie finie de $G/G_{\mathbf{A}}$.

Pour $(h, c') \in \left(\bigcap_{kG_{\mathbf{A}} \in F} kG_{\mathbf{A}}k^{-1}g \right) \times \{c'' \in C_{k,\mathbf{A}} \mid c''_{|g^{-1} \cdot F} = (c_0)_{|g^{-1} \cdot F}\}$ (qui est un voisinage de (g, c_0) comme produit d'ouverts) et pour $kG_{\mathbf{A}} \in F$, $(h \cdot c')(kG_{\mathbf{A}}) = c'(h^{-1}kG_{\mathbf{A}}) = c'(g^{-1}kG_{\mathbf{A}}) = c_0(g^{-1}kG_{\mathbf{A}}) = (g \cdot c_0)(kG_{\mathbf{A}})$, autrement dit $(h \cdot c') \in V$, ainsi l'action est bien continue. □

On peut à présent obtenir la dernière équivalence nécessaire à la preuve, qui passe par une propriété intermédiaire utilisant des recouvrements ouverts pour caractériser la notion de points "arbitrairement proches" dans un cadre non métrique (l'article original utilise des fonctions du flot dans $\mathbb{R}$ et des considérations similaires au théorème d'Urysohn mais on peut s'en passer).

Proposition 12. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout G-flot X, il existe une base d'ouverts $\mathcal{B}$ de X telle que pour tout $k > 1$, pour tout $U = (U_i)_{i \in k}$ recouvrement ouvert fini de X extrait de $\mathcal{B}$ et pour tout F partie finie de G, il existe $i \in k$ et $x \in X$ tels que $F \cdot x \subset U_i$*
2. *G est extrêmement moyennable*
3. *Pour tout $\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$, $F \subset G$ finie, $k > 1$, $c \in C_{k,\mathbf{A}}$, il existe $g \in G$ tel que $(g \cdot c)(hG_{\mathbf{A}})$ prenne la même valeur pour tout $h \in F$*

Preuve. Supposons la première propriété, et donnons-nous un G-flot X, et la base d'ouverts $\mathcal{B}$ associée. Pour tout $U = (U_i)_{i \in k}$ recouvrement ouvert fini de X extrait de $\mathcal{B}$ et tout $F \subset G$ finie, notons

$$E_{U,F} = \{x \in X \mid \exists i \in k \, F \cdot x \subset \overline{U_i}\} = \bigcup_{i \in k} \bigcap_{g \in F} \varphi_g^{-1}\left(\overline{U_i}\right)$$

où $\varphi_g \colon x \mapsto g \cdot x$ de X dans lui-même est continue, ainsi $E_{U,F}$ est fermé et non vide par hypothèse.

Soit $U^1, \cdots, U^n$ des recouvrements ouverts finis de X extraits de $\mathcal{B}$ (U^m étant de taille k_m) et $F^1, \cdots, F^n$ des parties finies de G. Posons

$$F = \bigcup_{m=1}^{n} F^m \text{ et } U = \left(U_j = \bigcap_{m=1}^{n} U^m_{j_m} \right)_{j \in k_1 \times \cdots \times k_n}$$

$F \subset G$ est finie et U est un recouvrement ouvert fini de X (tout point de X est dans un ouvert de chaque recouvrement). Ainsi pour tout $x \in X$, on choisit $j \in k_1 \times \cdots \times k_n$ tel que $x \in U_j$: il existe un élément V_x de $\mathcal{B}$ tel que $x \in V_x \subset U_j$. De $(V_x)_{x\in X}$ on extrait un recouvrement fini V, qui est donc extrait de $\mathcal{B}$. Soit $x \in E_{V,F}$, et $V_0 \in V$ tel que $F \cdot x \subset \overline{V_0}$. Il existe $j \in k_1 \times \cdots \times k_n$ tel que

$$F \cdot x \subset \overline{V_0} \subset \overline{U_j} \subset \bigcap_{m=1}^{n} \overline{U^m_{j_m}}$$

En particulier pour tout $1 \leq m \leq n$ on a $F^m \cdot x \subset F \cdot x \subset \overline{U^m_{j_m}}$ donc $x \in E_{U^m,F^m}$: l'intersection des E_{U^m,F^m} est non vide. Ainsi par compacité, l'intersection de tous les $E_{U,F}$ pour U recouvrement ouvert fini extrait de $\mathcal{B}$ et $F \subset G$ finie est non vide. On choisit x y appartenant, x est alors un point fixe du G-flot X, en effet en supposant le contraire on a $g \in G$ tel que $g \cdot x \neq x$. X étant séparé, il existe U_x et $U_{g\cdot x}$ ouverts disjoints contenant respectivement x et $g \cdot x$, et pour tout y différent de x et $g \cdot x$ un ouvert U_y contenant y dont l'adhérence ne contient ni x ni $g \cdot x$, et quitte à les restreindre on peut supposer tous ces ouverts éléments de $\mathcal{B}$. On obtient un recouvrement ouvert de X dont on extrait un recouvrement fini U. On pose $F = \{id_{\mathbb{N}}\,; g\}$. Puisque $x \in E_{U,F}$, il existe $y \in X$ tel que $F \cdot x \subset \overline{U_y}$, autrement dit $x, g \cdot x \in \overline{U_y}$ d'où nécessairement $x = y = g \cdot x$ et une contradiction. Ainsi G est extrêmement moyennable.

Supposons maintenant la deuxième propriété, donnons-nous $\mathbf{A}$, F, k et c comme dans la troisième, et considérons l'adhérence de l'orbite de c sous l'action de G sur $C_{k,\mathbf{A}}$: $X = \overline{G \cdot c}$ est un compact, et si $x \in X$, $g \in G$ et U est un ouvert contenant $g \cdot x$, alors $\varphi_g^{-1}(U)$ est un ouvert contenant x donc rencontre $G \cdot c$: U rencontre alors $\varphi_g(G \cdot c) = G \cdot c$ ainsi comme U était quelconque, $g \cdot x \in X$ donc X est un G-flot et il contient un point fixe par hypothèse, c'est à dire un coloriage monochrome c_0 constant égal à $i \in k$. Soit $V = \{c' \in C_{k,\mathbf{A}} \mid \forall h \in F\, c'(hG_{\mathbf{A}}) = i\}$. F étant fini, V est un voisinage ouvert de $c_0 \in X = \overline{G \cdot c}$ donc V rencontre $G \cdot c$: il existe $g \in G$ tel que $(g \cdot c)(hG_{\mathbf{A}}) = i$ pour tout $h \in F$. On a obtenu la troisième propriété.

Supposons enfin la troisième propriété et donnons-nous X un G-flot. Notons $\rho\colon G \times X \to X$ l'action. Pour tout $x \in X$ et tout ouvert U contenant x, $\rho^{-1}(U)$ est un voisinage de $(id_{\mathbb{N}}, x)$, donc contient un ouvert de la forme $G_{\mathbf{A}} \times V$ avec $\mathbf{A} \in \mathrm{Age}(\mathbf{M})$ et V voisinage ouvert de x. Notons $V_{x,U} = \rho(G_{\mathbf{A}} \times V)$: $x \in V_{x,U} \subset U$ et de plus

$$V_{x,U} = \bigcup_{g \in G_{\mathbf{A}}} \varphi_g(V)$$

donc $V_{x,U}$ est un ouvert car φ_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$. Ainsi $\mathcal{B} = (V_{x,U})_{x\in U\subset X}$ (pour U ouvert) est une base d'ouverts de X. De plus avec les notations précédentes, $V_{x,U}$ est stable sous l'action de $G_{\mathbf{A}}$ car ρ est une action et $G_{\mathbf{A}}$ un sous-groupe.
Fixons $k > 1$, $U = (U_i)_{i\in k}$ un recouvrement ouvert fini de X extrait de $\mathcal{B}$, $F \subset G$ finie et $x_0 \in X$. Comme tout U_i est stable sous l'action d'un $G_{\mathbf{A_i}}$, en prenant $\mathbf{A} = \langle \bigcup \mathbf{A_i} \rangle$, chaque ouvert du recouvrement est stable sous l'action de $G_{\mathbf{A}}$. On peut alors définir $c \in C_{k,\mathbf{A}}$ en associant à la classe $gG_{\mathbf{A}}$ un indice $i = c(gG_{\mathbf{A}})$ tel que $g^{-1} \cdot x_0 \in U_i$. Cette définition ne dépend pas du représentant g choisi car si $gG_{\mathbf{A}} = hG_{\mathbf{A}}$, $g^{-1}h \in G_{\mathbf{A}}$ donc $g^{-1} \cdot x_0 = (g^{-1}h)h^{-1} \cdot x_0$ donne $g^{-1} \cdot x_0 \in U_i \Leftrightarrow h^{-1} \cdot x_0 \in U_i$ pour tout i car U_i est stable sous l'action de $G_{\mathbf{A}}$. En appliquant la troisième propriété à $\mathbf{A}$, $F' = \{h^{-1} \mid h \in F\}$, k et c, on obtient l'existence de $g \in G$ tel que $(g \cdot c)(h^{-1}G_{\mathbf{A}}) = c(g^{-1}h^{-1}G_{\mathbf{A}}) = c((hg)^{-1}G_{\mathbf{A}})$ prenne la même valeur pour tout $h \in F$, c'est à dire qu'il existe $i \in k$ tel que $hg \cdot x_0 \in U_i$ pour tout $h \in F$, autrement dit $g \cdot x_0$ répond à la première propriété, qui est donc vérifiée, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

En mettant bout à bout les propositions 10, 11 et 12, on obtient exactement que $\mathrm{Age}(\mathbf{M})$ a la propriété de Ramsey si et seulement si $G = \mathrm{Aut}(\mathbf{M})$ est extrêmement moyennable, qui est ce qu'il fallait démontrer. Cela conclut la preuve du théorème de correspondance.

Corollaire 1 (Théorème de Pestov)**.** $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ est extrêmement moyennable

Preuve. On a déjà montré que $(\mathbb{Q}, <)$ était une $<$-structure de Fraïssé localement finie. Le théorème de Ramsey fini dit exactement que son âge, c'est à dire la classe des ensembles finis totalement ordonnés a la propriété de Ramsey. Le théorème de correspondance conclut. □

On ne connaît pas de preuve de ce théorème qui n'utilise pas de propriétés apparentées à Ramsey.

Ce théorème peut se voir comme un calcul du flot minimal universel de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$, dont on montre en fait qu'il est réduit à un singleton. Mais le théorème de correspondance permet d'autres calculs de flots minimaux universels plus élaborés, comme celui qui fait l'objet de la section suivante.

5.4 Exemples

On ne donne pas de preuves dans cette section, mais on donne des exemples d'applications du théorème qu'on vient de prouver, en décrivant des classes de Fraïssé $\mathcal{K}$ et leurs limites de Fraïssé. Comme on l'a déjà mentionné, on est obligé d'introduire des ordres pour garantir la rigidité des structures considérées nécessaire à ce que la propriété de Ramsey soit vérifiée, mais la section suivante montrera par un exemple comment éliminer ces ordres peu naturels.

1. Nous avons déjà vu que pour $\mathcal{K}$ la classe des ensembles totalement ordonnés finis, on avait la propriété de Ramsey, et la limite de Fraïssé est $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre usuel. Nous obtenons donc que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)$ est extrêmement moyennable.

2. Si $\mathcal{K}$ est la classe des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps fini $k=\mathbb{F}_q$, naturellement ordonnés, alors $\mathcal{K}$ est de Fraïssé et a la propriété de Ramsey (un tel espace vectoriel E est dit naturellement ordonné si son ordre est l'ordre antilexicographique à partir d'une base et d'un ordre total donné sur cette base, et d'un ordre total sur k). On a de plus $\mathrm{Flim}(\mathcal{K})=(k^{(\mathbb{N})},<)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel de dimension dénombrable avec un ordre dont la restriction à chaque sous-espace de dimension finie est un ordre naturel. Son groupe d'automorphisme est alors extrêmement moyennable; et une méthode similaire à celle de la section suivante permet de caculer le flot minimal universel de $\mathrm{Aut}(k^{(\mathbb{N})})$ (sans ordre cette fois-ci) grâce à cette information.

3. Si $\mathcal{K}$ est la classe des graphes simples finis totalement ordonnés, alors à nouveau il s'agit d'une classe de Fraïssé avec la propriété de Ramsey, et sa limite de Fraïssé est le graphe aléatoire muni d'un ordre total convenable ; son groupe d'automorphisme est alors extrêmement moyennable et de la même manière que pour les espaces vectoriels, cette information permet de calculer le flot minimal universel du groupe d'automorphismes du graphe aléatoire (non ordonné).

6 Calcul d'un flot minimal universel

À l'aide du théorème de correspondance, on se propose de calculer le flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$.

Théorème 7. *Le flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$ est l'espace LO des ordres totaux (Linear Orders) sur $\mathbb{N}$ vu comme un sous-espace de l'espace topologique produit $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)=2^{\mathbb{N}^2}$ muni de l'action de transfert de structure : pour $g\in\mathfrak{S}_\infty$ et $\mathcal{R}\in LO$, $(g\cdot\mathcal{R})=\{(a,b)\in\mathbb{N}^2\mid(g^{-1}(a),g^{-1}(b))\in\mathcal{R}\}$, autrement dit $g\cdot\mathcal{R}$ est le seul ordre total rendant $g\colon(\mathbb{N},\mathcal{R})\to(\mathbb{N},g\cdot\mathcal{R})$ croissante.*

La preuve nécessite des prérequis sur les espaces uniformes que nous rappelons en annexe. Nous avons aussi besoin d'un lemme spécifique aux systèmes dynamiques.

Proposition 13. *Soit (G,X,ρ) un système dynamique. Alors pour tout $x_0\in X$, l'application $G\to X$ définie par $g\mapsto g\cdot x_0$ est uniformément continue (on considère l'uniformité à droite introduite sur le groupe topologique G et l'unique uniformité sur X)*

Preuve. Appelons φ cette application. Soit V un voisinage de Δ_X. Pour $x\in X$, soit U_x un voisinage ouvert de x tel que $U_x\times U_x\subset V$. Alors comme ρ est continue, on peut trouver un voisinage O_x de 1 dans G et un voisinage ouvert $V_x\subset U_x$ de x tel que $\rho(O_x\times V_x)\subset U_x$; en abrégé $O_xV_x\subset U_x$. Alors $(V_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X dont on peut donc extraire un recouvrement fini $V_1,...,V_n$ (où on a posé $V_i:=V_{x_i}$). Posons de même $O_i:=O_{x_i}$ et $U_i:=U_{x_i}$ et alors $O:=\bigcap_{i=1}^{n}O_i$ est un voisinage de 1 tel que pour tout i, $OV_i\subset U_i$.

On peut alors considérer $\widehat{O}$ (l'entourage associé à l'ouvert O, pour les notations voir en annexe) qui est un entourage dans G. Soit alors $(g,h) \in \widehat{O}$, i.e. $gh^{-1} \in O$. Soit i tel que $h \cdot x_0 \in V_i$. Alors $(g \cdot x_0, h \cdot x_0) = ((gh^{-1}) \cdot (h \cdot x_0), 1 \cdot (h \cdot x_0)) \in OV_i \times OV_i \subset U_i \times U_i \subset V$. Donc $(\varphi(g), \varphi(h)) \in V$, donc $(\varphi \times \varphi)(\widehat{O}) \subset V$, donc $(\varphi \times \varphi)^{-1}(V)$ est un entourage dans G: φ est uniformément continue. $\square$

6.1 Idée du calcul

Nous considérons un groupe topologique G muni de son uniformité associée "à droite" (si V est un voisinage de 1, on a un entourage $\{(g,h) \in G^2 \mid gh^{-1} \in V\}$); et un sous-groupe fermé H extrêmement moyennable. Soit $X = M(G)$ le flot minimal universel de G.
On a une action continue de H sur X par restriction de celle de G; et comme H est extrêmemnt moyennable on en déduit un point fixe par H, $x \in X$. En d'autres termes, $H \subset \mathrm{Stab}(x)$.
On obtient alors une surjection continue $G/H \to G \cdot x$, ou encore une application continue d'image dense $G/H \to X$. Composée avec la projection $G \to G/H$ il s'agit simplement de $g \mapsto g \cdot x$.
Des considérations topologiques montrent alors que cette application s'étend à la complétion de Cauchy de G/H, $\widehat{G/H}$.
Si H est assez gros pour que $\widehat{G/H}$ soit compact, alors il s'agit d'une application continue d'un compact dans un autre, d'image dense, donc une surjection continue, donc $\widehat{G/H}$ est alors un flot qui se surjecte sur le flot minimal universel de manière G-équivariante. S'il on trouve de plus que $\widehat{G/H}$ est un flot minimal, c'est alors le flot minimal universel.
Nous allons appliquer ces idées et vérifier les détails dans le cas $G = \mathfrak{S}_\infty, H = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$. On pourra alors calculer explicitement $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})}$ pour avoir une description explicite de $M(\mathfrak{S}_\infty)$.

6.2 Calcul du flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$

Nous considérons $\mathfrak{S}_\infty$ comme espace uniforme avec l'uniformité à droite, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ muni de l'uniformité induite, l'action à droite de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ sur $\mathfrak{S}_\infty$ vérifie alors les hypothèses permettant d'obtenir une uniformité quotient sur $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ (en effet les entourages élémentaires sont invariants sous l'action à droite - voir l'annexe).
Fixons une fois pour toutes une bijection $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, et notons $<$ l'ordre sur $\mathbb{N}$ hérité de l'ordre naturel sur $\mathbb{Q}$ via ϕ. Notons aussi $LO := \{f \in 2^{\mathbb{N}^2} | f^{-1}(\{1\})$ est un ordre total strict sur $\mathbb{N}\}$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur $\mathbb{N}$. En particulier, $< \in LO$. LO est fermé dans $2^{\mathbb{N}^2}$, et il est donc compact pour la topologie induite, d'après le théorème de Tychonoff.
On a une action naturelle de $\mathfrak{S}_\infty$ sur LO : $x(g \cdot \prec)y \iff g^{-1}x \prec g^{-1}y$ pour $\prec \in LO$. Elle est continue, en tant que restriction de l'action de $\mathfrak{S}_\infty$ sur $2^{\mathbb{N}^2}$ (qui est clairement continue). Ainsi LO est un $\mathfrak{S}_\infty$-flot. On montrera qu'il est minimal.
On a une application uniformément continue (proposition 13) $\mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{S}_\infty \cdot <$ qui à g associe $g \cdot <$, qui induit, par définition de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ une bijection $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{S}_\infty \cdot <$.

Admettons un instant que $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ est dense dans LO, et que cette bijection est uniformément continue, de réciproque uniformément continue. Cela implique en particulier $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})} \simeq \widehat{\mathfrak{S}_\infty \cdot <}$ (en tant que $\mathfrak{S}_\infty$-flots aussi), et comme LO est compact et $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ est dense dedans, $\widehat{\mathfrak{S}_\infty \cdot <} \simeq LO$: en particulier $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})} \simeq LO$. Donc $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})}$ est un flot compact, dont on montrera qu'il est minimal. Si on admet aussi un instant que LO est minimal, on peut déjà conclure: ce qu'on a expliqué dans la section précédente donne une surjection $\mathfrak{S}_\infty$-équivariante de LO (qui est un flot minimal) sur le flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$; donc LO est le flot minimal universel.
Il reste donc à montrer : LO est un flot minimal, $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ est dense dans LO, $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ et $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ sont isomorphes en tant qu'espaces uniformes munis de l'action de $\mathfrak{S}_\infty$. Le deuxième point se déduit en fait du premier.

Proposition 14. *LO est un $\mathfrak{S}_\infty$-flot minimal.*

Preuve. Nous savons déjà que c'est un $\mathfrak{S}_\infty$-flot, il ne reste qu'à montrer qu'il est minimal. Soit $\prec \in LO$, on veut montrer que $\mathfrak{S}_\infty \cdot \prec$ est dense dans LO.
Soit $\sqsubset \in LO$, et U un voisinage de $\sqsubset$. Quitte à prendre un voisinage élémentaire, on peut supposer que U est de la forme $\{\lhd \in LO \mid a_1 \lhd b_1 ... a_n \lhd b_n, \neg(c_1 \lhd d_1) ... \neg(c_m \lhd d_m)\}$ où $a_1, ..., b_n, c_1, ..., d_m$ sont fixés. Seulement, les ordres dans LO sont totaux, donc $\neg(c_i \lhd d_i)$ est équivalent à $d_i \lhd c_i \vee d_i = c_i$. Les c_i, d_i étant fixés, on peut finalement supposer (en changeant les notations) que U est de la

forme $\{\lhd \in LO \mid a_1 \lhd b_1 ... a_n \lhd b_n\}$.
Disons que $X = \{a_i, i \in \{1, ..., n\}\} \cup \{b_i, i \in \{1, ..., n\}\}$ est de cardinal m. Alors $(X, \prec_{|X})$ est bien ordonné en tant qu'ensemble fini totalement ordonné. Il est donc isomorphe à $(X, \sqsubset_{|X})$ avec un unique isomorphisme. Soit f cet isomorphisme (pour $x, y \in X, f(x) \sqsubset f(y) \iff x \prec y$), et soit $g \in \mathfrak{S}_\infty$ prolongeant f. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $f^{-1}(a_i) \prec f^{-1}(b_i)$ car $a_i \sqsubset b_i$ (car $\sqsubset \in U$), et donc $g^{-1}(a_i) \prec g^{-1}(b_i)$, et donc finalement $a_i(g\cdot \prec)b_i : g\cdot \prec \in U$.
Cela prouve que $\mathfrak{S}_\infty \cdot \prec$ est dense dans LO, et donc, puisque $\prec$ était quelconque, que LO est un flot minimal. □

Proposition 15. *L'application canonique* $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{S}_\infty \cdot <$ *est un isomorphisme d'espaces uniformes munis d'une action de* $\mathfrak{S}_\infty$.

Preuve. Notons f cette application. Notons aussi $\pi \colon \mathfrak{S}_\infty \to \mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ la projection canonique. Nous savons déjà que f est uniformément continue (par propriété des quotients et des actions de groupe topologique), $\mathfrak{S}_\infty$-équivariante (par définition) et bijective. Il reste donc à montrer que sa réciproque est uniformément continue.
Notons $\mathcal{V}$ l'uniformité obtenue sur $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ par transfert de celle sur $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$; et $\mathcal{U}$ l'uniformité quotient. L'uniforme continuité de f se traduit par $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$; pour conclure il faut donc prouver que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.
Soit donc $U \in \mathcal{U}$. Par définition, $(\pi \times \pi)^{-1}(U)$ est un entourage dans $\mathfrak{S}_\infty$, donc il existe un voisinage V de 1 tel que $\widehat{V} = \{(x, y) \in \mathfrak{S}_\infty^2 \mid xy^{-1} \in V\} \subset (\pi \times \pi)^{-1}(U)$.
Montrons que $(f \circ \pi \times f \circ \pi)(\widehat{V})$ est un entourage dans $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$, c'est-à-dire de la forme $W \cap (\mathfrak{S}_\infty \cdot <)^2$, où W est un voisinage de la diagonale de LO.
Notons $\varphi = f \circ \pi$. Quitte à prendre un V plus petit, on peut supposer $V = \{k \mid k_{|X} = id_X\}$ où X est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Montrons qu'alors $(\varphi \times \varphi)(\widehat{V})$ est de la forme désirée. On va montrer qu'il est égal à $O = \{(\lhd, \sqsubset) \in LO^2 \mid \lhd_{|X} = \sqsubset_{|X}\} \cap (\mathfrak{S}_\infty \cdot <)^2$, ce qui suffira clairement.
Premièrement, si $(g, h) \in \widehat{V}$, alors gh^{-1} coïncide avec l'identité sur X donc g^{-1} et h^{-1} sont égales sur X, donc $g\cdot <$ et $h\cdot <$ coïncident sur X.
Réciproquement soit $(\lhd, \sqsubset) \in O$. Il existe alors $g, h \in \mathfrak{S}_\infty$ tels que $g\cdot <= \lhd, h\cdot <= \sqsubset$. L'hypothèse que $\lhd$ et $\sqsubset$ coïncident sur X implique que id_X est un isomorphisme $(X, g\cdot <) \to (X, h\cdot <)$, mais g est déjà un isomorphisme $(g^{-1}X, <) \to (X, g\cdot <)$, et h en est un $(h^{-1}X, <) \to (X, h \cdot X)$. Donc $h^{-1}g$ est un isomorphisme $(g^{-1}X, <) \to (h^{-1}X, <)$. Par ultrahomogénéité de $\mathbb{Q}$, cet isomorphisme s'étend en un $q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.
On obtient que h^{-1} et $q \circ g^{-1} = (g \circ q)^{-1}$ coïncident sur X. Posons $\tilde{g} = g \circ q$, on obtient alors que $\tilde{g}h^{-1} \in V$ donc $(\tilde{g}, h) \in \widehat{V}$, donc $(\tilde{g}\cdot <, h \cdot v) \in (\varphi \times \varphi)(\widehat{V})$; or $\tilde{g}\cdot <= (gq)\cdot <= g \cdot (q\cdot <) = g\cdot <$ car $q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$, donc $(\lhd, \sqsubset) \in (\varphi \times \varphi)(\widehat{V})$, ce qui conclut: $O = (\varphi \times \varphi)(\widehat{V})$.
Donc U contient $(\pi \times \pi)(\widehat{V}) = (f^{-1} \times f^{-1})((\varphi \times \varphi)(\widehat{V}))$ qui est, d'après ce qu'on vient de prouver, un élément de $\mathcal{V}$. Donc $U \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 2. $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}}(\mathbb{Q}) \simeq \widehat{\mathfrak{S}_\infty \cdot} <$; et donc $\widehat{\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}}(\mathbb{Q}) \simeq LO$; ce dernier isomorphisme étant $\mathfrak{S}_\infty$-équivariant lorsque restreint à $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.

Preuve. La première partie provient de la proposition précédente, et des préliminaires sur les espaces uniformes.
La deuxième vient simplement du fait que $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ est dense dans LO qui est un flot compact donc un espace uniforme complet, donc $\widehat{\mathfrak{S}_\infty \cdot <} \simeq LO$ en tant qu'espaces uniformes (voir l'annexe). La $\mathfrak{S}_\infty$-équivariance est claire. □

Remarque 7. Comme on n'a pas prouvé l'existence des complétions de Cauchy, il faut lire le premier énoncé comme l'affirmation qu'une telle complétion existe pour $\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ et qu'elle est isomorphe à celle de $\mathfrak{S}_\infty \cdot <$ (dont on a, elle, prouvé qu'elle existe).

Corollaire 3. Le flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$ est, à isomorphisme près, LO.

Preuve. Soit $X = M(\mathfrak{S}_\infty)$ le flot minimal universel de $\mathfrak{S}_\infty$. On a alors une action induite de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ sur X, qui, par extrême moyennabilité, a un point fixe x.
On en déduit une application $\delta \colon \mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}) \to X$ uniformément continue, $\mathfrak{S}_\infty$-équivariante.
X est compact donc complet (en tant qu'espace uniforme), donc cette application s'étend en $\varphi \colon LO \to X$ uniformément continue d'après le corollaire précédent et par propriété universelle de la complétion de Cauchy.

Il reste à montrer que φ est $\mathfrak{S}_\infty$-équivariante (que c'est un morphisme de flots). Mais c'est clair aussi d'après le corollaire précédent : soit $g \in \mathfrak{S}_\infty, x \in LO$: il existe $(y_i) \in (\mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}))^I$ une suite généralisée telle que $y_i \to x$, et alors $\varphi(g \cdot x) = \varphi(g \cdot \lim y_i) = \varphi(\lim g \cdot y_i) = \lim \varphi(g \cdot y_i) = \lim \delta(g \cdot y_i) = \lim g \cdot \delta(y_i) = g \cdot \lim \delta(y_i) = g \cdot \lim \varphi(y_i) = g \cdot \varphi(\lim y_i) = g \cdot \varphi(x)$.
Ainsi, si Y est un flot minimal quelconque, on a un morphisme $X \to Y$ et donc un morphisme $LO \to Y$, et LO est un flot minimal; cela suffit à caractériser le flot minimal universel. □

6.3 Généralisation

Dans la sous-section "idée du calcul" on vu que notre calcul pour $\mathfrak{S}_\infty$ ne nécessitait rien de spécifique à propos de $\mathfrak{S}_\infty$, à part son lien avec LO.
En particulier, si on part d'un groupe topologique G métrisable avec une métrique d' invariante à droite, un sous-groupe fermé H extrêmement moyennable, "coprécompact", c'est-à-dire que G/H muni de la distance $\delta(fH, gH) = \inf_{(h,k)\in H^2} d'(fh, gk) = \inf_{h\in H} d'(fh, g)$ (qui est bien une distance sur G/H car H est fermé, et qui métrise bien la topologie quotient) est précompact (c'est-à-dire que sa complétion de Cauchy, au sens métrique ou uniforme - elles sont isomorphes - est compacte), alors on peut suivre notre preuve et obtenir $M(G) = \widehat{G/H}$, qui est donc métrisable en tant que complétion de Cauchy d'un espace métrique.
Ce sera en particulier le cas de tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_\infty$ qui ont d'assez gros sous-groupes extrêmement moyennables.
En fait on peut montrer que cela caractérise les groupes polonais (on rajoute donc l'hypothèse de séparabilité et de complétude) qui ont flot minimal universel métrisable : ce sont précisément ceux qui ont un sous-groupe H fermé extrêmement moyennable et coprécompact (on ne le fera pas ici, mais on peut consulter par exemple [4] et [5])

7 Généralisation de la propriété de Ramsey

La propriété de Ramsey parle de sous-structures monochromatiques, mais il est raisonnable de se demander ce qu'il se passe si on remplace cela par des sous-structures 2-chromatiques (à au plus 2-couleurs) et plus généralement l-chromatiques. On peut alors définir :

Notation 4. Soit $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{C}$ trois L-structures, k, r deux entiers. On note $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{k,r}$ la proposition que pour tout k-coloriage c de $\binom{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$, il existe un plongement $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tel que c restreint à $\gamma \circ \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ prenne au plus l valeurs.
Soit $\mathcal{K}$ une classe de L-structures. On dit que $\mathcal{K}$ a un degré de Ramsey plus petit que l si et seulement si pour tous $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ dans $\mathcal{K}$ et tout k, il existe $\mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ telle que $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{k,l}$. On dit que $\mathcal{K}$ a un degré de Ramsey l si l est le plus petit entier tel que $\mathcal{K}$ a un degré de Ramsey plus petit que l.

Dans le cas $l = 1$, on retrouve les notions présentées précédemment en particulier avoir un degré de Ramsey ≤ 1 revient à avoir la propriété de Ramsey.
Remarquons que cette notation n'a d'intérêt que pour $r > l$, et que dans la définition de degré de Ramsey on aurait pu ne parler que des $k > l$. En particulier $r = l+1$ est une valeur spécifiquement importante. En effet, nous avons, comme dans la section sur la théorie de Ramsey structurelle :

Proposition 16. *Soit $\mathcal{K}$ une classe de L-structures. On suppose que pour tous $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ dans $\mathcal{K}$, il existe $\mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ telle que $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{l+1,l}$. Alors $\mathcal{K}$ a un degré de Ramsey plus petit que l.*

Remarque 8. La réciproque est évidente, et ainsi on peut caractériser le degré de Ramsey de $\mathcal{K}$ (lorsqu'il existe) par le fait que c'est le plus petit entier vérifiant la propriété énoncée ci-dessus

Preuve. C'est la même preuve que dans la section sur la théorie de Ramsey structurelle: on procède par récurrence sur k: pour $k \leq l+1$, c'est clair (parce que c'est évident ou par hypothèse).
Pour passer de k à $k+1$, on fait la même chose: on choisit $\mathbf{C} \geq \mathbf{B}$ telle que $\mathbf{C} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{l+1,l}$, puis $\mathbf{D} \geq \mathbf{C}$ telle que $\mathbf{D} \to (\mathbf{C})^{\mathbf{A}}_{k,l}$, et le reste s'ensuit de la même manière. □

Remarque 9. Si $\mathcal{K}$ est de Fraïssé, de limite de Fraïssé $\mathbf{M}$ localement finie, alors on a un résultat analogue à la proposition 10 (ou au théorème 6), au sens où sous ces hypothèses, "$\mathcal{K}$ a un degré de Ramsey au plus l" est équivalent à "pour tous $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \in \mathcal{K}, \mathbf{M} \to (\mathbf{B})^{\mathbf{A}}_{l+1,l}$"; ce qui explique notamment le rapprochement qu'on peut faire entre le degré de Ramsey et la dynamique de $\mathrm{Aut}(\mathbf{M})$.

Comme on suppose $\mathbf{M}$ localement finie, on peut le prouver en utilisant un argument de compacité comme pour prouver l'implication (théorème de Ramsey infini $\implies$ théorème de Ramsey fini)

La propriété "avoir un degré de Ramsey égal à 1" est équivalente à "avoir un flot minimal universel trivial", d'après le théorème de correspondance. Un résultat ultérieur (dont on trouvera la démonstration dans [2] ou dans un cours de S. Todorcevic) donne également un équivalent à la propriété "avoir un degré de Ramsey fini" : il s'agit d'"avoir un flot minimal universel métrisable". Il s'agit ici d'un autre résultat de correspondance entre des propriétés dynamique et combinatoire. C'est un enrichissement remarquable, mais il existe de nombreuses autres variantes, dont certaines constituent des sujets de recherche toujours actifs aujourd'hui.

8 Annexes

8.1 Résultats sur les espaces uniformes

Définition 12. Soit X un ensemble. Une *uniformité* sur X est un filtre $\mathcal{U}$ sur $X \times X$ vérifiant de plus :

1. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $V \circ V = \{(x, y) \mid \exists z, (x, z) \in V, (z, y) \in V\} \subset U$
2. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$
3. Pour tout $U \in \mathcal{U}$, $U^{op} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\} \in \mathcal{U}$.

On dit alors que $(X,\mathcal{U})$ est un *espace uniforme*, et on appelle les éléments de $\mathcal{U}$ des *entourages*.

Exemple 4. Si (X, d) est un espace métrique, on a une uniformité sur X qui est engendrée (en tant que filtre) par $U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ pour $\epsilon > 0$. Le premier axiome est vérifié en prenant $\frac{\epsilon}{2}$ et par inégalité triangulaire; le deuxième car $d(x, x) = 0$, et le troisième par symétrie de d. Les espaces uniformes sont en fait une généralisation des espaces métriques et voir les entourages comme des U_ϵ peut donner une intuition.

Définition 13. Soit $(X,\mathcal{U})$ un espace uniforme. Pour tout $U \subset X \times X, x \in X$, on note $U[x] = \{y, (x, y) \in U\}$. Alors $\{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$ forme une base de filtre incluse dans le filtre principal engendré par x (car $(x, x) \in U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$), et on obtient une topologie sur X en déclarant que le filtre engendré est le filtre des voisinages de x. On parle de la *topologie uniforme*.

Exemple 5. Si on reprend l'exemple des espaces métriques, avec les notations précédentes, $U_\epsilon[x]$ est la boule ouverte centrée en x de rayon ϵ. Il est alors clair que la topologie induite par la distance est la même que celle induite par l'uniformité.

Définition 14. Soit $(X,\mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ deux espaces uniformes, $f : X \to Y$ une application. On dit que f est *uniformément continue* si pour tout entourage V dans Y, $(f \times f)^{-1}(V)$ est un entourage dans X.

Proposition 17. *Sous les mêmes hypothèses que dans la définition qui précède, si f est uniformément continue, alors elle est continue pour les topologies uniformes.*

Preuve. Soit $x \in X$ et O un voisinage de $f(x)$ dans Y. Par définition, il existe un entourage V dans Y tel que $V[f(x)] \subset O$. Alors $U := (f \times f)^{-1}(V)$ est un entourage dans X par hypothèse donc $U[x]$ est un voisinage de x. Si $y \in U[x]$, $(x, y) \in U$ donc $(f(x), f(y)) \in V$ donc $f(y) \in V[f(x)]$. Ainsi $f(U[x]) \subset O$. Donc f est continue en x, ceci pour tout x : f est continue. □

Proposition 18. *Soit G un groupe topologique. Pour un voisinage V de l'identité on pose $\widehat{V} = \{(g, h) \in G^2 \mid gh^{-1} \in V\}$. Alors $\{\widehat{V} \mid V$ voisinage de $1\}$ est une base de filtre sur G^2 et le filtre engendré est une uniformité (dite "uniformité à droite") telle que la topologie uniforme soit la topologie de G.*

Remarque 10. Il y a en fait une autre uniformité qui induit la topologie de G, ce sera clair par symétrie. Celle qu'on introduit ici est l'uniformité "à droite" (le nom varie d'auteur en auteur)

Preuve. Clairement $\Delta_G \subset \widehat{V}$ pour tout voisinage V de 1. Notons $\mathcal{V}$ le filtre engendré. On veut montrer que ce filtre est une uniformité, et qu'elle engendre la bonne topologie.

1. Soit $U \in \mathcal{V}$. On peut supposer que $U = \widehat{O}$ pour un voisinage O de 1. Alors comme la multiplication est continue $G \times G \to G$, il existe un voisinage W de 1 tel que $WW \subset O$. Alors si $(x,y),(y,z) \in \widehat{W}$, on a $xy^{-1}, yz^{-1} \in W$ et donc $xy^{-1}yz^{-1} \in WW \subset O$, donc $(x,z) \in \widehat{O}$, et donc $W \circ W \subset U$.

2. Si $U \in \mathcal{V}$, U contient un $\widehat{O}$, O voisinage de 1, et donc U contient Δ_G.

3. L'inversion est continue $i \colon G \to G$, donc si $U = \widehat{O}$, O voisinage de 1, on a que $V = i^{-1}(O) = i(O)$ est un voisinage de 1, et alors $\widehat{O}^{op} = \{(x,y) \mid yx^{-1} \in O\} = \{(x,y) \mid xy^{-1} \in i(O)\} = \widehat{V}$

Donc $\mathcal{V}$ est bien une uniformité. Reste à voir qu'elle induit la bonne topologie. Soit déjà $x \in G$, $\widehat{V}[x]$ un voisinage uniforme de x. $\widehat{V}[x] = \{y \mid xy^{-1} \in V\} = \{y \mid y \in i(V)x\} = i(V)x$. Or i est un homéomorphisme $G \to G$ (avec la topologie de départ), et $z \mapsto zx$ aussi, donc $i(V)x$ est un voisinage de x. Donc $\widehat{V}[x]$ est bien un voisinage de x.
Réciproquement, si V est un voisnage de x, alors $V = Vx^{-1}x$. Pour la même raison qu'avant, $xi(V)$ est un voisinage de 1 donc $\widehat{xi(V)}[x]$ est un voisinage uniforme de x. Or le calcul qu'on vient de faire montre que $\widehat{xi(V)}[x] = i(xi(V))x = i(i(V))x^{-1}x = V$. Donc V est un voisinage uniforme de x, ce qui conclut. $\square$

Ainsi tout groupe topologique est un espace uniforme, et cela aura du sens de parler d'applications uniformément continues. Une autre classe importante d'espaces topologiques qui sont automatiquement des espaces uniformes (on parle d'espace uniformisable) sont les espaces compacts.

Proposition 19. *Soit X un espace topologique compact (séparé). Alors il existe une, et une seule uniformité sur X qui induit la topologie de X.*

Preuve. Soit X un tel espace et soit $\mathcal{U}$ une telle uniformité. Soit U un entourage, $x \in X$. Soit de plus V un entourage symétrique ($V = V^{op}$ - ce choix est possible, on peut prendre $V \cap V^{op}$ si V n'est pas déjà symétrique) tel que $V \circ V \subset U$. Alors $V[x] \times V[x]$ est un voisinage de (x,x) dans $X \times X$. De plus si $(z,y) \in V[x] \times V[x]$ alors $(x,z),(x,y) \in V$ donc par symétrie, $(z,x) \in V$ et donc $(z,y) \in U$. Donc U est un voisinage de (x,x), donc finalement U est un voisinage de Δ_X.
Réciproquement, soit U un voisinage de Δ_X dans $X \times X$. Nous avons besoin de

Lemme 3. *Soit $(Y, \mathcal{V})$ un espace uniforme dont la topologie uniforme est séparée. Alors $\bigcap\{\overline{V} \mid V \in \mathcal{V}\} = \Delta_Y$.*

Preuve du lemme. Soit en effet $x \neq y \in Y$. On a alors, par séparation deux ouverts O, W disjoints tels que $x \in O, y \in W$. Par définition de la topologie uniforme, on a donc deux entourages U_1, U_2 tels que $U_1[x] \subset O, U_2[y] \subset W$. Quitte à prendre $U_1 \cap U_2$, on est réduits à un entourage U tel que $U[x] \cap U[y] = \emptyset$. Soit alors V un entourage symétrique tel que $V \circ V \circ V \subset U$ (application itérée du premier axiome des uniformités puis du troisième). Si $(a,b) \in V \cap (V[x] \times V[y])$, alors $(a,b) \in V, (x,a) \in V, (y,b) \in V$, donc par symétrie on a $(b,y) \in V$, et donc $(x,y) \in V \circ V \circ V$, et finalement $(x,y) \in U$. Donc $y \in U[x] \cap U[y]$, ce qui est absurde.
Donc $V \cap (V[x] \times V[y]) = \emptyset$. Donc $(x,y) \notin \overline{V}$; et donc $\bigcap\{\overline{V} \mid V \in \mathcal{V}\} \subset \Delta_Y$. L'inclusion réciproque est évidente. $\square$

Quitte à prendre U plus petit on peut supposer que U est un ouvert, voisinage de Δ_X. Par le lemme, on a $\bigcap\{\overline{V} \mid V \in \mathcal{V}\} \subset U$, donc par compacité de $X \times X$ (X est compact donc $X \times X$ aussi) il existe des entourages $V_1, ..., V_n$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{V_i} \subset U$; en particulier $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset U$, et donc comme $\mathcal{U}$ est un filtre, $U \in \mathcal{U}$.
On a prouvé que si une telle uniformité existe, c'est l'ensemble des voisinages de Δ_X, ce qui donne l'unicité sous réserve d'existence.
Soit désormais X un espace compact, et prouvons que l'ensemble des voisinages de Δ_X est bien une uniformité qui induit la bonne topologie.
C'est clairement un filtre dont chaque élément contient Δ_X. Il ne reste que les axiomes 1. et 3. à vérifier. Le 3. est relativement clair : Soit U un voisinage de Δ_X. Alors $\Delta_X \subset U^{op}$. Soit de plus $x \in X$. Alors $(x,x) \in U$ donc il existe un voisinage V de x tel que $V \times V \subset U$. Alors $V \times V \subset U^{op}$, et donc U^{op} est un voisinage de (x,x), ceci pour tout $x \in X$ donc U^{op} est un voisinage de Δ_X.
Il reste à prouver le premier axiome. Soit donc U un voisinage de Δ_X. Si $x \in X$, on a un voisinage

ouvert B_x de x tel que $B_x \times B_x \subset U$. De plus compact implique localement compact; on a donc un voisinage ouvert de x A_x tel que $\overline{A_x} \subset B_x$.
Alors $(A_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, qui admet donc un sous-recouvrement fini par compacité, disons $A_{x_1}, ..., A_{x_n}$. On note $A_i := A_{x_i}$ pour alléger les notations, de même $B_i := B_{x_i}$.
On a donc un recouvrement fini $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ et n recouvrements ouverts $\mathcal{A}_i = \{X \setminus \overline{A_i}, B_i\}$.
Considérons l'ensemble $\mathcal{V}$ des $V \cap V_1 \cap ... \cap V_n$ où $V \in \mathcal{A}$ et $\forall i, V_i \in \mathcal{V}_i$. Cela forme à nouveau un recouvrement ouvert de X.
Posons finalement $W = \bigcup_{O \in \mathcal{V}} O \times O$. Par construction, W est clairement un voisinage de Δ_X. De plus si $(x,y), (y,z) \in W$, alors $x, y \in O$ pour un $O \in \mathcal{V}$, en particulier $x, y \in A_i$ pour un même i. Donc $y \notin X \setminus \overline{A_i}$, donc comme $(y,z) \in O' \times O'$ pour un certain $O' \in \mathcal{V}$, on a $y, z \in B_i$ pour le même i. Donc $(x,z) \in A_i \times B_i \subset B_i \times B_i \subset U$. Donc $W \circ W \subset U$. Cela prouve le premier axiome et donc l'ensemble des voisinages de Δ_X forme bien une uniformité sur X.

Il reste donc à prouver que cette uniformité induit bien la topologie de X. Soit $x \in X$, $V[x]$ un voisinage uniforme de x. Alors V est un voisinage de (x,x) donc il existe un voisinage U de x tel que $U \times U \subset V$, et alors $U \subset V[x]$, donc $V[x]$ est un voisinage de x.
Réciproquement, soit V un voisinage ouvert de x. Soit U un voisinage ouvert de x tel que $\overline{U} \subset V$. Alors $W := V \times V \cup (X \setminus \overline{U}) \times (X \setminus \overline{U})$ est un voisinage de Δ_X. De plus si $y \in W[x]$, alors $(x,y) \in W$ donc $x \in X \setminus \overline{U}$ ou $y \in V$. Le premier cas est absurde car $x \in U \subset \overline{U}$. Donc $W[x] \subset V$. Ainsi V est un voisinage uniforme de x donc les deux topologies coïncident, c'est ce qu'on voulait prouver. □

Cela a donc du sens de parler d'application uniformément continue entre espaces compacts et groupes topologiques. On peut de plus prouver l'analogue du théorème de Heine pour les espaces uniformes.

Proposition 20. *Soit X un espace topologique compact, $(Y, \mathcal{U})$ un espace uniforme. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Alors f est uniformément continue (où on considère l'unique uniformité possible pour X)*

Preuve. Soit V un entourage dans Y. Alors V est un voisinage de Δ_Y comme on l'a prouvé lors de la preuve de la proposition précédente. Soit $U = (f \times f)^{-1}(V)$. U contient Δ_X.
Soit $(x,x) \in \Delta_X$. Alors comme V est un voisinage de Δ_Y, il existe un voisinage W de $f(x)$ tel que $W \times W \subset V$. Alors $(x,x) \in f^{-1}(W) \times f^{-1}(W) \subset U$. f étant continue, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x. Donc U est un voisinage de Δ_X. Par la proposition précédente (en fait sa preuve) on en déduit que U est un entourage. Donc f est uniformément continue. □

Pour ce dont on a besoin, il faut encore parler d'uniformité quotient et de complétion de Cauchy d'espaces uniformes (donc d'espaces complets et de filtres de Cauchy).
Pour ce dont on a besoin, on ne traite pas des uniformités quotients dans la plus grande généralité : on ne le fait que dans le cas de bonnes actions de groupes, cela nous suffira pour la suite.

8.2 Uniformité quotient

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace uniforme, G un groupe agissant continûment sur X. On suppose que de plus l'action satisfait : pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{U}, V \subset U$, $G \cdot V \subset V$.
Alors on va pouvoir munir X/G d'une uniformité qui satisfera la propriété universelle attendue.
On note $\pi\colon X \to X/G$ la projection canonique.
On définit $\tilde{\mathcal{U}} = \{U \subset X/G \times X/G \mid (\pi \times \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{U}\}$. Alors $\tilde{\mathcal{U}}$ est une uniformité qui induit la topologie quotient.
Le fait qu'il s'agisse d'un filtre est clair, de même que les deuxièmes et troisièmes axiomes d'uniformité.
Soit finalement $U \in \tilde{\mathcal{U}}$. Alors on a $V \in \mathcal{U}$ tel que $V \circ V \subset (\pi \times \pi)^{-1}(U)$, puis $O \subset V$ tel que $G \cdot O \subset O$, $O \in \mathcal{U}$. Soit $W = (\pi \times \pi)(O)$. Soit a, b, c tels que $(a,b), (b,c) \in W$. Soit x, y tels que $(\pi(x), \pi(y)) = (a,b)$ et $(x,y) \in O$, y', z tels que $(\pi(y'), \pi(z)) = (b,c)$ et $(y', z) \in O$. Alors $\pi(y) = b = \pi(y')$ donc il existe $g \in G$ tel que $g \cdot y' = y$. Alors par choix de O, $(y, g \cdot z) \in O$, donc $(x, g \cdot z) \in O \circ O \subset V \circ V \subset (\pi \times \pi)^{-1}(U)$, donc $(\pi(x), \pi(g \cdot z)) = (\pi(x), \pi(z)) = (a,c) \in U$. Donc $W \circ W \subset U$. Reste à prouver que $W \in \tilde{\mathcal{U}}$. Mais $(\pi \times \pi)^{-1}(\pi \times \pi)(O)) \supset O$ et donc c'est un entourage, donc $W \in \tilde{\mathcal{U}}$. Il s'agit donc bien d'une uniformité qui, par construction, rend

$\pi\colon X \to X/G$ uniformément continue.
En particulier, si $f\colon X/G \to Y$ est uniformément continue, $f \circ \pi$ aussi. Maintenant, si $f\colon X \to Y$ est uniformément continue et G-invariante, elle se factorise par une application $\overline{f}\colon X/G \to Y$ et alors cette dernière est uniformément continue. En effet, sous ces hypothèses, si U est un entourage dans Y, alors $(f \times f)^{-1}(U)$ en est un dans X, donc $V = (\pi \times \pi)(f \times f)^{-1}(U)$ en est un dans X/G. Maintenant, si $(a,b) \in V$, alors il existe $(x,y) \in (f \times f)^{-1}(U)$ tels que $(a,b) = (\pi(x), \pi(y))$, et alors $(\overline{f}(a), \overline{f}(b)) = (f(x), f(y)) \in U$. Donc $V \subset (\overline{f} \times \overline{f})^{-1}(U)$, ce dernier est donc un entourage, et donc $\overline{f}$ est bien uniformément continue.
Donc finalement, $f\colon X/G \to Y$ est uniformément continue si et seulement si $f \circ \pi$ l'est. On a prouvé :

Proposition 21. *Soit $(X,\mathcal{U})$ un espace uniforme, G un groupe agissant continûment sur X tel que l'ensemble des entourages G-stables forme une base de $\mathcal{U}$. Alors il existe une unique uniformité sur X/G satisfaisant : pour tout espace uniforme Y et toute application $f\colon X/G \to Y$, f est uniformément continue si et seulement si $f \circ \pi\colon X \to Y$ l'est.*

Remarque 11. L'unicité n'a pas été prouvée mais elle est claire car les propriétés imposent que si on a deux telles uniformités, $id\colon X/G \to X/G$ est uniformément continue dans les deux sens, et donc les uniformités sont les mêmes.

Lemme 4. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la topologie uniforme sur X/G est la topologie quotient.*

Preuve. Soit $\pi(x) \in X/G$ et U un voisinage ouvert pour la topologie quotient. Alors par définition, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X, et il contient x. Donc il existe un entourage V G-stable tel que $V[x] \subset \pi^{-1}(U)$. Posons $W = (\pi \times \pi)(V)$. W est alors un entourage dans X/G et si $y \in W[\pi(x)]$, alors $(\pi(x), y) \in W$ donc il existe $(x', y') \in V$ tel que $(\pi(x'), \pi(y')) = (\pi(x), y)$. Donc il existe g tel que $g \cdot x' = x$. Alors $(x, g \cdot y') \in V$ donc $g \cdot y' \in V[x] \subset \pi^{-1}(U)$ et donc $\pi(g \cdot y') = \pi(y') = y \in U$. Donc $W[\pi(x)] \subset U$, donc U est un ouvert uniforme.
Réciproquement, soit toujours $\pi(x) \in X/G$ et U un entourage dans X/G. Par définition, $V := (\pi \times \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{U}$. Si $y \in V[x]$, alors $(x,y) \in V$ donc $(\pi(x), \pi(y)) \in U$ donc $\pi(y) \in U[\pi(x)]$ donc $V[x] \subset \pi^{-1}(U[\pi(x)])$, qui est donc un voisinage de x. Donc $U[\pi(x)]$ est un voisinage de $\pi(x)$. Donc les ouverts uniformes sont des ouverts, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 6. Si G est un groupe topologique, H un sous-groupe fermé, alors H agit continûment sur G via $h \cdot g = gh^{-1}$. L'espace quotient est alors G/H. Si on munit G de son uniformité à droite, les hypothèses de la proposition et donc du lemme sont vérifiées, et donc la topologie quotient sur G/H est induite par une uniformité canonique.

Exemple 7. Si on a un système dynamique (G, X, ρ), et un point $x \in X$ on peut faire la construction suivante : si $H \subset \mathrm{Stab}(x)$, alors l'application $g \mapsto g \cdot x$ est uniformément continue et H-invariante, donc passe au quotient $G/H \to X$ en une application qui reste uniformément continue.

8.3 Complétion de Cauchy

Avec les uniformités on peut définir une notion de suite de Cauchy qui est à rapprocher de celle dans les espaces métriques et qui permet de définir une notion de complétude plus générale. On peut alors étendre les résultats concernant les espaces métriques (complétion de Cauchy) aux espaces uniformes.
On utilisera cependant les filtres plutôt que les suites; pour cela on rappelle rapidement la définition de convergence d'un filtre (il peut être important de savoir que les filtres en topologie générale "caractérisent tout", au même titre que les suites en topologie métrique "caractérisent tout")

Définition 15. Soit Y un espace topologique, $x \in Y$ et $\mathcal{F}$ un filtre sur Y. Alors on dit que $\mathcal{F}$ *converge* vers x, noté $\mathcal{F} \to x$ si et seulement si tout voisinage de x est dans $\mathcal{F}$.

On rappelle que dans un espace compact, tout ultrafiltre converge vers un unique point.

Définition 16. Soit $(X,\mathcal{U})$ un espace uniforme. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est dit *de Cauchy* si pour tout entourage U, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \times A \subset U$.

Définition 17. Un espace uniforme $(X,\mathcal{U})$ est dit *complet* si tout filtre de Cauchy y converge.

Comme pour les espaces métriques, les espaces compacts sont complets.

Proposition 22. *Soit X un espace topologique compact, muni de l'uniformité associée. Alors X est complet.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur X. Alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant $\mathcal{F}$.
X étant compact, $\mathcal{U}$ converge vers un point, disons x. Montrons qu'alors $\mathcal{F} \to x$.
Soit V un voisinage de x. Il existe alors un entourage U tel que $U[x] \subset V$. Soit W un entourage symétrique tel que $W \circ W \subset U$. $\mathcal{F}$ est de Cauchy donc il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \times A \subset W$. De plus $W[x]$ est un voisinage de x donc $W[x] \in \mathcal{U}$ donc $A \cap W[x] \in \mathcal{U}$, donc en particulier, $A \cap W[x]$ est non vide. Soit x_0 dedans.
Soit finalement $y \in A$. Alors $(y, x_0) \in W, (x, x_0) \in W$ donc $(x_0, y) \in W$ et donc $(x, y) \in U$ et donc $y \in U[x]$. Donc $A \subset U[x]$, donc $U[x] \in \mathcal{F}$ et donc $V \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F} \to x$. □

Définition 18. Soit $(X,\mathcal{U})$ un espace uniforme séparé. Une *complétion de Cauchy* de X est un espace uniforme complet séparé $\widehat{X}$ muni d'une application uniformément continue $i\colon X \to \widehat{X}$ telle que pour tout espace complet séparé Y et toute application uniformément continue $f\colon X \to Y$ il existe une unique application uniformément continue $\overline{f}\colon \widehat{X} \to Y$ telle que $\overline{f} \circ i = f$.

Remarque 12. Il est clair qu'une complétion de Cauchy, si elle existe, est unique à bijection uniformément continue de réciproque uniformément continue près.

Définition 19. Si $(Z,\mathcal{U})$ est un espace uniforme, $X \subset Z$, alors $\mathcal{U}_{|X} := \{U \cap (X \times X) \mid U \in \mathcal{U}\}$ est une uniformité sur X, on dit alors que $(X,\mathcal{U}_{|X})$ est un *sous-espace uniforme* de $(Z,\mathcal{U})$. La topologie uniforme est alors la topologie trace.

Proposition 23. *Soit Z un espace uniforme séparé complet, X un sous-espace uniforme dense. Alors Z est une complétion de Cauchy de X (avec l'inclusion $X \to Z$).*

Preuve. Soit Y un espace uniforme séparé complet, et $f\colon X \to Y$ uniformément continue.
Soit $y \in Z$. Comme X est dense dans Z, il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur X tel que y est adhérent à $\mathcal{F}$ (il s'agit du filtre $\{V \cap X \mid V \text{ voisinage de } y\}$). En particulier, $\mathcal{F}$ est de Cauchy : soit U un entourage, V un entourage symétrique tel que $V \circ V \subset U$, alors $V[y] \times V[y] \subset U$, donc $(V[y] \cap X) \times (V[y] \cap X) \subset U \cap (X \times X)$, donc il existe bien $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \times A \subset U \cap (X \times X)$.
Donc $f_\star\mathcal{F} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est aussi de Cauchy, car f est uniformément continue : soit U un entourage dans Y, alors $(f \times f)^{-1}(U)$ est un entourage dans X donc il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \times A \subset (f \times f)^{-1}(U)$. Alors $f(A) \in f_\star\mathcal{F}$ (en effet, $A \subset f^{-1}(f(A))$) et $f(A) \times f(A) \subset U$: $(x, y) \in A \times A \implies (x, y) \in (f \times f)^{-1}(U) \implies (f(x), f(y)) \in U$.
Donc il existe un (unique, car Y est séparé) $\overline{f}(y)$ tel que $f_\star\mathcal{F} \to \overline{f}(y)$.
Cela nous définit donc bien $\overline{f}\colon Z \to Y$. Si de plus $y \in X$, alors il est clair que $f_\star\mathcal{F} \to f(y)$, donc $f(y) = \overline{f}(y)$. Il ne reste donc qu'à montrer que $\overline{f}$ est uniformément continue.

Soit Ω un entourage dans Y, et U un entourage symétrique tel que $U \circ U \circ U \circ U \circ U \subset \Omega$. $(f \times f)^{-1}(U)$ est un entourage dans X, donc il existe un entourage W dans Z tel que $(f \times f)^{-1}(U) = W \cap (X \times X)$.
Soit O un entourage symétrique dans Z tel que $O \circ O \circ O \subset W$. Montrons qu'alors $(\overline{f} \times \overline{f})(O) \subset \Omega$, ce qui conclura.
Soit $(a, b) \in O$. Soit $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b$ les filtres sur X décrits plus tôt qui ont a, b pour points d'adhérence respectivement. Soit $A \in \mathcal{F}_a$ tel que $A \times A \subset O, B \in \mathcal{F}_b$ tel que $B \times B \subset O$. Pour la même raison qu'avant, soit $y_a \in A \cap O[a], y_b \in B \cap O[b]$. Alors $(a, y_a) \in O, (b, y_b) \in O$ donc $(y_a, y_b) \in W$, donc $(f(y_a), f(y_b)) \in U$.
Nous savons de plus que $f(A) \times f(A) \subset U, f(B) \times f(B) \subset U$; $f(A) \in f_\star\mathcal{F}_a, f(B) \in f_\star\mathcal{F}_b$. Donc $f(A) \cap U[\overline{f}(a)] \neq \emptyset$. Soit $f(z_a)$ dedans, et de même $f(z_b) \in f(B) \cap U[\overline{f}(b)]$. Alors $(\overline{f}(a), f(z_a)) \in U, (f(z_a), f(y_a)) \in U, (f(y_a), f(y_b)) \in U, (f(y_b), f(z_b)) \in U, (\overline{f}(b), f(z_b)) \in U$, donc par symétrie de U et par choix de U, $(\overline{f}(a), \overline{f}(b)) \in \Omega$. Cela conclut ainsi la démonstration que $\overline{f}$ est uniformément continue; ce qui donne l'existence. L'unicité est claire car une application uniformément continue est continue et que X est dense dans Z. □

Remarque 13. On aurait évidemment pu remplacer l'hypothèse "X sous-espace uniforme dense de Z" par "$i\colon X \to Z$ est injective, uniformément continue, d'image dense, et $i^{-1}\colon i(X) \to X$ est uniformément continue, où $i(X)$ a l'uniformité de sous-espace".

Exemple 8. Cette proposition montre en particulier que pour un espace métrique, la complétion de Cauchy usuelle coïncide avec celle pour les espaces uniformes. En particulier, si $X \subset Z$ est dense, et Z compact, alors Z est la complétion de Cauchy de X.

Pour le calcul, nous n'avons eu besoin que de ceci, et pas de l'existence en toute généralité de la complétion de Cauchy, bien qu'elle soit effectivement vérifiée. Nous citons donc le théorème en question, mais ne le prouvons pas.

Théorème 8. *Soit* $(X, \mathcal{U})$ *un espace uniforme séparé. Alors* X *admet une complétion de Cauchy.*

La preuve est très similaire à celle pour les espaces métriques, sauf qu'ici au lieu de considérer les suites de Cauchy quotientées par une bonne relation d'équivalence, on considère les filtres de Cauchy quotientés par une bonne relation d'équivalence. Nous n'utiliserons pas ce résultat dans le corps du mémoire.

9 Références

[KPT] A.S. Kechris, V.G. Pestov, S. Todorcevic, Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups, *GAFA, Geom. funct. anal.* (2005)
[1] V. Uspenskij, Compactifications of topological groups, *Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium* (Prague, 2001), Topology Atlas
[2] A. Zucker, Topological dynamics of automorphism groups, ultrafilter combinatorics, and the Generic Point Problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* (2016)
[3] D.N. Siniora, Automorphism groups of homogeneous structures, *PhD thesis, University of Leeds*
[4] J. Melleray, L. Nguyen Van Thé, T. Tsankov, Polish groups with metrizable universal minimal flows, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2016)
[5] I. Ben Yaacov, J. Melleray, T. Tsankov, Metrizable universal minimal flows of Polish groups have a comeagre orbit, *Geom. Funct. Anal. 27* (2017)
[6] N. Bourbaki, Topologie Générale, *Elements de Mathématique, Springer* (1971)
[7] M. Bodirsky, M. Pinsker, T. Tsankov, Decidability of Definability, *J. Symbolic Logic* (2013)
[8] M. Gromov et V. D. Milman, A topological application of the isoperimetric inequality, *American Journal of Mathematics*, vol. 105 (1983)