

# Temps de mélange d'une chaîne de Markov

Elie Aïdékon et Christophe Garban

## Introduction :

Cet exposé présente un théorème récent sur l'évaluation de la vitesse de convergence d'une chaîne de Markov. Il suit dans un premier temps un article de Ben Morris et Yuval Peres pour dévier ensuite vers un exemple d'application. On sait qu'une chaîne irréductible, apériodique sur un espace d'états dénombrable converge vers sa probabilité invariante lorsqu'elle en a une. Il s'agit maintenant de savoir à quelle "vitesse" elle rejoint sa probabilité invariante. Ceci a de nombreuses applications en physique et en calcul numérique. En effet, dans le cadre du modèle d'Ising, si l'on veut calculer la fonction de partition d'un réseau de spins  $n \times n$ , il y a  $2^{n^2}$  configurations à calculer. Quand on s'intéresse à des systèmes de taille "réelle", le calcul exact est impossible : on a alors recours à des méthodes probabilistes ; celle de Monte-Carlo par exemple. L'idée consiste à simuler des chaînes de Markov sur un grand espace que l'on connaît mal partant d'un point connu. On les stoppe à un instant  $n$ , l'ensemble des points d'arrivée est alors utilisable en tant qu'ensemble aléatoire dont on peut tirer des informations. On voit ici qu'il est crucial de savoir quand stopper les chaînes pour un obtenir un résultat, certes approché, mais "rigoureux" (une probabilité connue d'obtenir

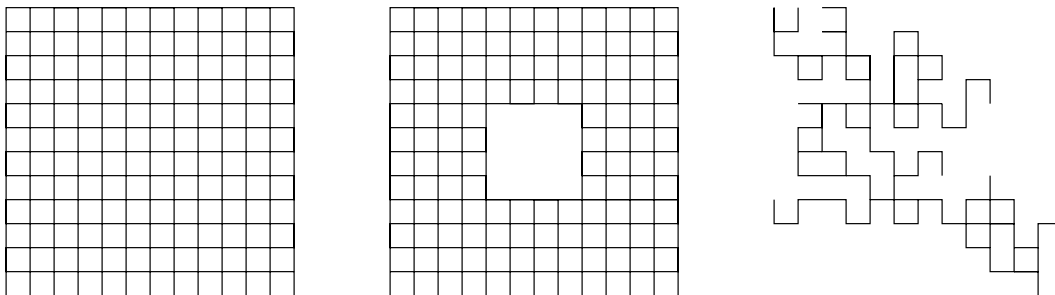


FIG. 1 – Voici des graphes dont nous étudierons les chaînes de Markov associées

une bonne approximation). La méthode proposée par les auteurs pour obtenir des temps de mélange (itérations à partir desquelles, on est proche de la probabilité limite) est assez robuste : elle s'applique sur beaucoup d'exemples.

## 1 Enoncé du théorème

### 1.1 Notations

On se place sur un ensemble dénombrable et on considère une chaîne de Markov irréductible de noyau  $p(x, y)$  tel que  $p(x, x) \geq 1/2$  pour tout  $x \in V$ . Cette dernière hypothèse en fait peu réductrice implique l'aperiodicité de la chaîne. on suppose qu'elle admet une probabilité invariante  $\pi$ . Pour  $x, y \in V$ , on pose  $\mathcal{Q}(x, y) = \pi(x)p(x, y)$ . On note pour  $S, A$  des parties de  $V$ ,  $\mathcal{Q}(S, A) = \sum_{(s,a) \in S \times A} \mathcal{Q}(s, a)$ .

On définit également  $|\partial S| = \mathcal{Q}(S, S^c)$ . On la compare intuitivement à la surface de  $S$ , car d'une certaine manière elle correspond au nombre de "traversées" de  $S$  vers  $S^c$ . De même, on note  $\pi(S) = \sum_{s \in S} \pi(s)$  qu'on identifie au volume de  $S$ . Enfin, on introduit la notion qui nous permettra par la suite de majorer le temps de mélange, la conductance :

$$\Phi_S := \frac{|\partial S|}{\pi(S)}$$

Elle représente la probabilité de sortir de  $S$ , c'est-à-dire la probabilité partant de  $S$  d'arriver dans  $S^c$ .

On note aussi  $\pi_* := \min_{x \in V} \pi(x)$ . On remarque que  $\pi_* \neq 0$  si et seulement si  $V$  est fini. On construit également

$$\Phi(r) = \inf(\Phi_S : \pi(S) \leq r)$$

pour  $r \in [\pi_*, 1/2]$  et on prolonge  $\Phi(r) = \Phi_* = \Phi(1/2)$  pour  $r > 1/2$ .

Il existe plusieurs notions de vitesses de convergence de chaînes de Markov ; parmi elles, on peut citer la distance  $\chi$  définie par

$$\chi^2(\mu, \pi) = \sum_{y \in V} \pi(y) \left( \frac{\mu(y)}{\pi(y)} - 1 \right)^2 \quad (1)$$

$$= \left( \sum_{y \in V} \frac{\mu(y)^2}{\pi(y)} \right) - 1 \quad (2)$$

On s'intéressera en un sens à la plus précise : le temps de mélange  $\varepsilon$  - *uniforme* défini par :

$$\tau_\varepsilon = \min \left( N : \forall n \geq N \left| \frac{p^n(x, y) - \pi(y)}{\pi(y)} \right| \leq \varepsilon \forall x, y \in V \right)$$

## 1.2 Enoncé du théorème

Le théorème que l'on se propose de démontrer est le suivant :

**Théorème 1.1** *Pour une chaîne de Markov vérifiant  $p(x, x) \geq 1/2$  pour tout  $x \in V$ , on a :*

$$\tau_\varepsilon \leq \int_{\pi_*}^{4/\varepsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)}$$

Plus précisément, si

$$n \geq \int_{\pi(x) \wedge \pi(y)}^{4/\varepsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)}$$

alors

$$\left| \frac{p^n(x, y) - \pi(y)}{\pi(y)} \right| \leq \varepsilon$$

L'intérêt du théorème porte principalement sur le fait que le temps de mélange considéré est un temps de mélange uniforme. On est forcé de se placer dans le cas  $V$  fini, pour des raisons qui vont suivre.

## 1.3 Ensembles évolutifs

On va considérer des chaînes de Markov sur l'ensemble des parties de  $V$ . Pour des raisons de sommabilité, on a besoin d'avoir  $\mathcal{P}(V)$  dénombrable : on doit donc se restreindre à supposer  $V$  fini bien que ce ne soit pas indiqué dans l'article étudié. Cependant, comme nous l'a montré l'introduction, le cas fini brasse déjà énormément de problématiques.

Définition : un processus évolutif est une chaîne de Markov définie sur  $\mathcal{P}(V)$  comme suit : si on est en  $S$  à l'instant  $n$ , on choisit  $U$  uniformément sur  $[0,1]$ , et on prend  $S_{n+1} = \tilde{S}$  avec

$$\tilde{S} := \{y : \mathcal{Q}(S, y) \geq U\pi(y)\}$$

Propriétés des ensembles évolutifs

On commence par un petit lemme qui servira dans la démonstration du théorème général :

**Lemme 1.2** *soit  $(S_n)_n$  un processus évolutif. Alors  $(S_n^c)_n$  est aussi un processus évolutif associé aux mêmes probabilités de transition.*

Preuve :

$$S_{n+1}^c = \{y : \mathcal{Q}(S_n, y) < U\pi(y)\} = \{y : \mathcal{Q}(S_n^c, y) \geq (1 - U)\pi(y)\}$$

car  $\mathcal{Q}(S_n, y) + \mathcal{Q}(S_n^c, y) = \mathcal{Q}(V, y) = \pi(y)$

Nous allons maintenant montrer qu'un processus évolutif est soit absorbé en  $\emptyset$ , soit absorbé en  $V$ .

Pour cela, on utilise le

**Lemme 1.3**  $(\pi(S_n))_n$  est une martingale

Preuve

$$E(\pi(S_{n+1})|S_n) = \sum_{y \in V} \pi(y)P(y \in S_{n+1}|S_n) \quad (3)$$

$$= \sum_{y \in V} \mathcal{Q}(S_n, y) = \pi(S_n) \quad (4)$$

$(\pi(S_n))_n$  étant une martingale positive, elle converge ps. Supposons par l'absurde que  $\pi(S_n) \rightarrow l$  avec  $0 \neq l \neq 1$  sur un ensemble de mesure non nulle. Comme  $V$  est fini, les volumes possibles aussi, donc  $(S_n)_n$  est stationnaire. On se place sur l'ensemble  $\{(S_n)_n \text{ est stationnaire à partir du rang } N\} = E$  où  $N$  est tel que la mesure de l'ensemble précédent est non nulle.

Soit  $S$  une partie de  $V$  telle que  $\pi(S) = l$ . Il existe  $1 > \mu > 0$  tel que  $\pi(y : \mathcal{Q}(S, y) \geq U\pi(y)) > l$  pour  $U < \mu$ . Donc  $P(\pi(S_{n+1}) \neq \pi(S_n) | S_n = S) > 0$ . En prenant le minimum sur l'ensemble fini des parties de  $V$  tel que  $\pi(S) = l$ , on obtient que  $P(\pi(S_{n+1}) \neq \pi(S_n) | \pi(S_n) = l) > 0$ , soit encore  $P(\pi(S_{n+1}) = \pi(S_n) | \pi(S_n) = l) < 1$ . Donc  $P(E) = 0$ . contradiction. Finalement  $l = 0$  ou  $1$ , c'est-à-dire que  $(S_n)_n$  est soit stationnaire en  $\emptyset$  soit stationnaire en  $V$ .

Nous allons maintenant établir le lien entre ensembles évolutifs et les probabilités  $p^n(x, \cdot)$  :

**Proposition 1.4** Pour tous  $n \geq 0$  et  $x, y \in V$ , on a

$$p^n(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P_x(y \in S_n)$$

Preuve : on le démontre par récurrence sur  $n$  ; le cas  $n = 0$  est évident.

$$p^n(x, y) = \sum_{z \in V} p^{n-1}(x, z)p(z, y) \quad (5)$$

$$= \sum_{z \in V} P_x(z \in S_{n-1}) \frac{\pi(z)}{\pi(x)} p(z, y) \quad (6)$$

$$= \frac{\pi(y)}{\pi(x)} E_x \left( \frac{1}{\pi(y)} \mathcal{Q}(S_{n-1}, y) \right) \quad (7)$$

$$= \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P_x(y \in S_n) \quad (8)$$

ce qui achève la récurrence.

## 1.4 Schéma de preuve

La preuve se compose de plusieurs étapes : tout d'abord on se ramène à une autre notion de vitesse de convergence : celle selon  $\chi^2$  ; elle est plus faible que la convergence  $\varepsilon$ -uniforme, mais elle est plus maniable. Cependant, ce changement de point de vue nous conduit à un changement d'outil : la conductance qui convenait bien à  $\tau_\varepsilon$  trouve son équivalent dans la fonction  $\psi$ , définie plus loin. De plus la conductance est plus facile à "calculer" dans la pratique. Le changement de point de vue est géré par le théorème (2.2), tandis que le changement d'outils fait intervenir le lemme (2.1).

On relie la convergence de la chaîne de Markov vers  $\pi$  avec le concept d'ensembles évolutifs via la relation :  $\chi(\mu_n, \pi) \leq \frac{1}{\pi(x)} E \sqrt{\pi(\min(S_n, S_n^c))}$ . Le terme de droite tend effectivement bien vers 0. En effet, on a vu que  $\pi(S_n)$  stationnait soit en 0, soit en 1. Ainsi par le théorème de convergence dominée, le terme de droite tend vers 0.

Tout le jeu consiste maintenant à déterminer à quelle vitesse ce terme de droite converge. La suite  $(S_n)$ , par la propriété ci-dessus tend soit vers  $V$ , soit vers  $\emptyset$  qui sont en fait les seuls états absorbants de la chaîne. Mais on ne sait pas trop déterminer si c'est vers l'un ou vers l'autre. On a alors l'idée de modifier un peu l'ensemble évolutif : on veut le forcer à se diriger vers l'un des deux états absorbants pour ne pas avoir de problème d'indécision. Il aurait été naturel de choisir  $\emptyset$ , pour ne pas avoir toujours à passer au complémentaire ; seulement les auteurs en ont décidé autrement. Une première idée pour forcer  $(S_n)$  à se diriger vers  $V$  serait de considérer la suite  $(\max\{S_n, S_n^c\})$  ; seulement ce ne serait pas une chaîne de Markov. On pense alors à conditionner par rapport à l'évènement {ne jamais atteindre  $\emptyset$ } : on obtient alors un nouveau noyau de Markov sur l'espace des sous parties. L'ensemble évolutif ainsi

obtenu permet d'aboutir à la vitesse de convergence désirée. L'idée fondamentale est la suivante : la conductance permet de gérer ce qui se passe à la fois à petite et grande échelle. Elle mesure l'écart qui sépare l'ensemble évolutif biaisé de  $V$  ; elle contrôle ainsi la vitesse nécessaire pour atteindre  $V$ . L'avantage de cette nouvelle méthode est que les conductances  $\phi(r)$ , pour  $r$  petit, permettent de considérer la précision que l'on veut en  $\varepsilon$ . Auparavant, on fixait cette précision avant d'estimer ; on choisissait souvent  $\varepsilon = 1/e$  où  $1/4$ .

## 2 Preuve du théorème

### 2.1 Première étape

Admettant provisoirement le lemme 2.1 et le théorème 2.2, que nous énonçons ci-dessous, nous allons dans ce paragraphe démontrer le théorème général. La démonstration des deux résultats admis se fera dans les paragraphes suivants.

**Lemme 2.1** *Soit  $\emptyset \neq S \subset V$ . Si on suppose seulement  $p(x, x) \geq \gamma \forall x \in V$  avec  $0 \leq \gamma \leq 1/2$ , alors*

$$\psi(S) \geq \frac{\gamma^2}{2(1 - \gamma^2)} \Phi_S^2$$

où  $\psi(S)$  est le nouvel outil dont nous avons besoin : il est défini par :

$$\psi(S) = 1 - E_S \sqrt{\frac{\pi(\tilde{S})}{\pi(S)}}.$$

Dans le cas  $\gamma = 1/2$ , on obtient  $\psi(S) \geq \Phi_S^2/2$ .

**Théorème 2.2** *On a  $\chi^2(p_n(x, \cdot), \pi) \leq \varepsilon$  pour tout*

$$n \geq \int_{\pi(x)}^{4/\varepsilon} \frac{du}{u\psi(u)}$$

On appelle chaîne de Markov inverse sur  $V$  de probabilité invariante  $\pi$  et de matrice de transition  $p(x, y)$  la chaîne de Markov de probabilité invariante  $\pi$  et de matrice de transition  $\overleftarrow{p}(x, y)$  telle que  $\pi(y)p(y, z) = \pi(z)\overleftarrow{p}(z, y) \forall y, z \in V$ . On obtient par récurrence  $\pi(y)p^m(y, z) = \pi(z)\overleftarrow{p}^m(z, y) \forall y, z \in V$  et  $\forall m \in \mathbb{N}$ . On remarque en outre que  $\overleftarrow{Q}(x, y) = Q(y, x) \forall x, y \in V$ .  
On vérifie que :

$$\sum_{y \in V} (p^n(x, y) - \pi(y))(p^m(y, z) - \pi(z)) = p^{n+m}(x, z) - \pi(z)$$

d'où

$$\left| \frac{p^{n+m}(x, z) - \pi(z)}{\pi(z)} \right| = \left| \sum_{y \in V} \left( \frac{p^n(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right) \left( \frac{\overleftarrow{p}^m(y, z)}{\pi(y)} - 1 \right) \right| \quad (9)$$

$$\leq \chi(p^n(x, \cdot)) \chi(\overleftarrow{p}^m(z, \cdot), \pi) \quad (10)$$

par Cauchy-Schwarz. De plus,

$$Q(S, S^c) = \sum_{(y, z) \in S \times S^c} \pi(y) p(y, z) \quad (11)$$

$$= \sum_{y \in S} \pi(y) \left( 1 - \sum_{z \in S} p(y, z) \right) \quad (12)$$

$$= \pi(S) - \sum_{(y, z) \in S \times S} \pi(y) p(y, z) \quad (13)$$

On a aussi

$$Q(S, S^c) = \sum_{z \in S^c} \sum_{y \in S} \pi(y) p(y, z) \quad (14)$$

$$= \sum_{z \in S^c} \left( \pi(z) - \sum_{y \in S^c} \pi(y) p(y, z) \right) \quad (15)$$

$$= \pi(S^c) - \sum_{(y, z) \in S^c \times S^c} p(y, z) \quad (16)$$

et donc  $Q(S, S^c) = Q(S^c, S)$ . Par conséquent les conductances calculées en prenant  $Q$  et  $\overleftarrow{Q}$  coïncident.

Ainsi, en prenant

$$m, n \geq \int_{\pi(x) \wedge \pi(y)}^{1/2} \frac{2du}{u\Phi^2(u)} + \frac{2}{\Phi_*^2} \log \frac{8}{\epsilon} = \int_{\pi(x)}^{4/\epsilon} \frac{2du}{u\Phi^2(u)} \quad (17)$$

$$\geq \int_{\pi(x)}^{4/\epsilon} \frac{du}{u\psi} \quad (18)$$

on obtient grâce au théorème 2.2  $\chi(p^n(x, \cdot), \pi) \leq \sqrt{\epsilon}$  et  $\chi(\overleftarrow{p}^m(z, \cdot)) \leq \sqrt{\epsilon}$ .

ce qui donne

$$\left| \frac{p^{n+m}(x, z) - \pi(z)}{\pi(z)} \right| \leq \epsilon$$

et on en déduit le théorème général.

## 2.2 Preuve du lemme 2.1

Le lemme 2.1 permet de se ramener à utiliser la variable  $\psi$  plutôt que la conductance  $\Phi$ .

Démonstration : On va utiliser un lemme intermédiaire :

**Lemme 2.3** *Posons*

$$\phi_S := \frac{1}{2\pi(S)} \sum_{y \in V} (Q(S, y) \wedge Q(S^c, y))$$

Alors

$$1 - \psi(S) \leq 1 - \phi_S^2$$

Preuve : On vérifie que  $P_S(y \in \tilde{S} | U < 1/2) = 1 \wedge \frac{2Q(S, y)}{\pi(y)}$  où  $U$  est la variable aléatoire ayant permis de construire  $\tilde{S}$  à partir de  $S$ .

Par conséquent  $\pi(y)P_S(y \in \tilde{S} | U < 1/2) = Q(S, y) + 2\pi(S)\phi_S$

On pose

$$R = \frac{\pi(\tilde{S})}{\pi(S)}$$

On a donc  $E_S(R | U < 1/2) = 1 + 2\phi_S$  et comme  $E_S(R) = 1$ , on a aussi que  $E_S(R | U \geq 1/2) = 1 - 2\phi_S$  Finalement

$$1 - \psi(S) = E(\sqrt{R}) = \frac{E(\sqrt{R} | U < 1/2) + E(\sqrt{R} | U \geq 1/2)}{2} \quad (19)$$

$$\leq \frac{\sqrt{E(R | U < 1/2)} + \sqrt{E(R | U \geq 1/2)}}{2} \quad (20)$$

par Cauchy-Schwarz. Donc

$$1 - \psi(S) \leq \frac{\sqrt{1 + 2\phi_S} + \sqrt{1 - 2\phi_S}}{2} \leq 1 - \phi_S^2/2 \quad (21)$$

La dernière inégalité est générale :  $\forall u \leq 1/2$ , on a

$\frac{\sqrt{1+2u} + \sqrt{1-2u}}{2} \leq \sqrt{1-u^2} \leq 1 - u^2/2$  ce qu'on vérifie aisément en élevant au



carré.

Utilisons maintenant ce résultat pour prouver le lemme 2.1 : soit  $y \in S$ . Comme  $p(y, y) \geq \gamma$ , il vient que

$$Q(S, y) = \sum_{s \in S} Q(s, y) \geq \gamma \pi(y)$$

et  $(1 - \gamma)\pi(y) = \pi(y) - \gamma\pi(y) \leq \pi(y) - Q(S, y) = Q(S^c, y)$   
d'où  $Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \geq \gamma\pi(y) \wedge Q(S^c, y) \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} Q(S^c, y)$

On procède de même avec  $y \in S^c$ . Puis en sommant sur tous les  $y$ , on obtient

$$\sum_{y \in V} Q(S, y) \wedge Q(S^c, y) \geq \frac{2\gamma}{1-\gamma} Q(S, S^c)$$

d'où

$$\phi_S \geq \frac{\gamma}{1-\gamma} \Phi_S$$

On termine la démonstration grâce au lemme 2.3.

### 2.3 Preuve du théorème 2.2

Le théorème 2.2 nous donne une majoration du temps de mélange pour la distance  $\chi$ .

Démonstration : dans un premier temps, on donne une majoration de  $\chi$  grâce aux ensembles évolutifs qui s'écrit  $\chi(\mu_n, \pi) \leq \frac{1}{\pi(x)} E \sqrt{\pi(\min(S_n, S_n^c))}$ . On essaiera d'évaluer ensuite la vitesse de convergence du majorant. Pour cela, on introduit une autre chaîne de Markov sur les parties de  $V$ , qui a pour nouveau noyau de transition  $\tilde{K}(S, A) = \frac{\pi(A)}{\pi(S)} K(S, A)$ , et qui force les ensembles évolutifs à stationner en  $V$  : c'est exactement le processus des ensembles évolutifs conditionné par le fait de stationner en  $V$ .

En effet,

$$\frac{P_S(S_1 = A, S_\infty = V)}{P_S(S_\infty = V)} = \frac{P_S(S_1 = A)P_A(A_\infty = V)}{P_S(S_\infty = V)}$$

De plus, si  $S$  est une partie de  $V$  et sachant que  $\pi(S_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, on a  $\pi(S) = E(\pi(S_\infty)) = P(S_\infty = V)$  car les ensembles évolutifs sont soit stationnaires en  $\emptyset$  soit stationnaires en  $V$ .

Donc

$$P_S(S_1 = A | S_\infty = V) = \frac{\pi(A)}{\pi(S)} K(S, A)$$

1<sup>ère</sup> étape : majoration de  $\chi(p_n(x, \cdot), \pi)$

On se donne 2 répliques indépendantes du processus évolutif  $(S_n)_{n \geq 0}$  et  $(\Lambda_n)_{n \geq 0}$  partant de  $x$ .

$$\begin{aligned} \chi^2(p_n(x, \cdot), \pi) &= \sum_{y \in V} \pi(y) \frac{P(y \in S_n)^2}{\pi(x)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{\pi(x)^2} \left[ \sum_{y \in V} \pi(y) P(y \in S_n \cap y \in \Lambda_n) - \pi(x)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\pi(x)^2} E(\pi(S_n \cap \Lambda_n) - \pi(S_n)\pi(\Lambda_n)) \end{aligned}$$

On se souvient que  $(S_n^c)$  est un processus évolutif de même probabilité de transition que  $(S_n)$ . Ainsi, les égalités précédentes sont encore valables pour  $(S_n^c)$ .

De plus, pour 2 parties  $S$  et  $\Lambda$  de  $V$ , on a

$$|\pi(S \cap \Lambda) - \pi(S)\pi(\Lambda)| = |\pi(S^c \cap \Lambda) - \pi(S^c)\pi(\Lambda)|$$

L'égalité reste vraie avec  $\Lambda^c$ .

Finalement, avec toujours

$$S^+ = \begin{pmatrix} S & \text{si } \pi(S) \leq 1/2 \\ S^c & \text{sinon} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |\pi(S \cap \Lambda) - \pi(S)\pi(\Lambda)| &= |\pi(S^+ \cap \Lambda^+) - \pi(S^+)\pi(\Lambda^+)| \\ &\leq |\pi(S^+ \wedge \pi(\Lambda^+))| \\ &= \sqrt{\pi(S^+)\pi(\Lambda^+)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\chi^2(p_n(x, \cdot), \pi) \leq \frac{1}{\pi(x)^2} E \sqrt{\pi(S_n^+)\pi(\Lambda_n^+)} = \frac{1}{\pi(x)^2} E(\pi(S_n^+))$$

soit encore

$$\chi(p_n(x, \cdot)) \leq \frac{1}{\pi(x)} E \sqrt{\pi(S_n^+)}$$

2<sup>eme</sup> étape : évaluation de la vitesse de convergence de  $\frac{1}{\pi(x)}E\sqrt{\pi(S_n^+)}$

On étudie d'abord certaines propriétés de notre nouvelle probabilité : on rappelle que

$$\tilde{K}(S, A) = \frac{\pi(A)}{\pi(S)}K(S, A)$$

Plus généralement, on montre par récurrence que

$$\tilde{K}^n(S, A) = \frac{\pi(A)}{\pi(S)}K^n(S, A)$$

Par conséquent, pour toute partie  $S$  de  $V$ , on a

$$\tilde{E}_S(f(S_n)) = E_S\left[\frac{\pi(S_n)}{\pi(S)}f(S_n)\right]$$

En effet, on a la propriété pour les indicatrices, donc pour toute application réelle par densité.

Ceci nous permet d'écrire que

$$\frac{1}{\pi(x)}E\sqrt{\pi(S_n^+)} = \tilde{E}_x(Z_n)$$

où  $Z_n = \frac{\sqrt{\pi(S_n^+)}}{\pi(S_n)}$

Majorons maintenant  $\tilde{E}_x(Z_n)$  :

On a

$$\tilde{E}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \middle| S_n\right) = \frac{1}{f(S_n)}\tilde{E}_{S_n}(\pi(f(S_1))) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{f(S_n)}E_{S_n}\left(\frac{\pi(S_1)}{\pi(S_0)}f(S_1)\right) \quad (23)$$

$$= E\left(\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n)}\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \middle| S_n\right) \quad (24)$$

$$= E\left(\frac{\sqrt{\pi(S_{n+1}^+)}}{\sqrt{\pi(S_n^+)}} \middle| S_n\right) \quad (25)$$

On vérifie que

$$E\left(\frac{\sqrt{\pi(S_{n+1}^+)}}{\sqrt{\pi(S_n^+)}} \middle| S_n\right) \leq 1 - \psi(S_n^+)$$

En effet, si  $\pi(S_n) \leq 1/2$  :  $S_n^+ = S_n$  et  $\pi(S_{n+1}^+) \leq \pi(S_{n+1})$  ce qui montre l'inégalité.

Si  $\pi(S_n) \geq 1/2$ , alors  $S_n^+ = S^c$  et  $E\left(\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1})}{\pi(S_n^+)}}|S_n\right) \leq E\left(\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1}^c)}{\pi(S_n^c)}}|S_n\right) = E\left(\sqrt{\frac{\pi(S_{n+1}^c)}{\pi(S_n^c)}}|S_n^c\right) = 1 - \psi(S_n^+)$  et on a encore l'inégalité.

On vérifie également que  $1 - \psi(\pi(S_n)) = 1 - f_0(Z_n)$ , avec

$$f_0(z) = \begin{cases} \psi(1/z^2) & \text{si } z \geq \sqrt{2} \\ \psi_* & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour terminer, on fait appel à un lemme qu'on démontrera par la suite :

**Lemme 2.4** *Soit  $(Z_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles positives et  $f_0 : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante. On note  $f(z) = f_0(z/2)/2$ . Si  $\forall n$ , on a  $E(Z_{n+1}|Z_n) \leq Z_n(1 - f_0(Z_n))$ , alors  $E(Z_n) \leq \delta$  si*

$$n \geq \int_{\delta}^{E(Z_0)} \frac{dz}{zf(z)}$$

Appliquons-le ici :  $\tilde{E}_x(Z_n) \leq \delta$  si  $n \geq \int_{\delta}^{E(Z_0)} \frac{2dz}{zf_0(z/2)} = \int_{\delta}^{E(Z_0)} \frac{2dz}{z\psi(4/z^2)}$ . On a  $E(Z_0) = \pi(x)^{-1/2}$ .

En faisant de plus le changement de variable adapté, on obtient comme nouvelle intégrale

$$\int_{4\pi(x)}^{4/\delta^2} \frac{du}{u\psi(u)} \leq \int_{\pi(x)}^{4/\delta^2} \frac{du}{u\psi(u)}$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.2.

Preuve du lemme 2.4 : on note  $L_n = E(Z_n)$ . On montre par récurrence que

$$n \leq \int_{L_n}^{L_0} \frac{dz}{zf(z)}$$

Pour  $n = 0$ , c'est vrai. De plus,  $E(Z_{n+1}|Z_n) \leq Z_n(1 - f_0(Z_n))$  implique que

$$E(Z_n - Z_{n+1}) \geq E(2Z_n f(2Z_n)) \geq E(2Z_n 1_A) f(L_n)$$

avec  $A = 2Z_n \geq L_n$ . Comme  $E(2Z_n 1_{A^c}) \leq L_n$ ,  $E(2Z_n 1_A) \geq L_n$ . On a donc

$$L_{n+1} \leq L_n(1 - f(L_n))$$

D'où  $L_{n+1} \leq L_n e^{-f(L_n)}$ . Il vient alors  $\int_{L_{n+1}}^{L_n} \frac{dz}{zf(z)} \geq \frac{1}{f(L_n)} \ln \frac{L_n}{L_{n+1}} \geq 1$  et finalement

$$\int_{L_{n+1}}^{L_0} \frac{dz}{zf(z)} \geq \int_{L_n}^{L_0} \frac{dz}{zf(z)} + 1 \geq n + 1$$

ce qui achève la récurrence, et par là-même la preuve du lemme 2.4.

**Remarque** Si  $p(x, x)$  est seulement supposé  $\geq \gamma$  pour tout  $x$ , on a le résultat :

**Théorème 2.5** *Pour une chaîne de Markov vérifiant  $p(x, x) \geq \gamma$  pour tout  $x \in V$ , on a :*

$$\tau_\varepsilon \leq \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma^2} \int_{\pi_*}^{4/\varepsilon} \frac{4du}{u\Phi^2(u)}$$

### 3 Application

Après l'exemple du carré  $n \times n$  et du carré avec un trou, on peut naturellement se demander ce que devient le temps de mélange lorsque l'on enlève beaucoup de trous ; par exemple en les enlevant au hasard. On va se placer dans le cadre de la percolation sur  $\mathbb{Z}^d$  dont on fera une très courte description (cf [grim]). On va considérer les ensembles issus de la percolation dans les boîtes  $\{-n, \dots, n\}^d$  de  $\mathbb{Z}^d$ . De la même manière que pour les deux exemples précédents, on va s'intéresser aux propriétés asymptotiques du temps de mélange. Ces ensembles pouvant être d'allure très complexe, on pourrait s'attendre à ce que le temps  $\tau_n(\varepsilon)$  explose avec  $n$ .

#### 3.1 Percolation et présentation du modèle

On considère le graphe dont les sommets sont les points de  $\mathbb{Z}^d$  et les branches sont les arêtes naturelles de  $\mathbb{Z}^d$  : on note  $\mathbb{L}^d$  ce graphe et  $\mathbb{E}^d$  l'ensemble de ses branches. On déclare chaque branche de  $\mathbb{L}^d$  être "ouverte" avec probabilité  $p$  et "fermée" avec probabilité  $1 - p = q$ , cela indépendamment les unes des autres. Plus formellement, on se place sur l'espace probabilisé  $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$ . Une réalisation de la percolation est une configuration  $\omega = (\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d)$  ;  $\omega(e) = 0$  correspond au fait que  $e$  est fermée et inversement. On munit  $\Omega$  de la mesure produit  $P_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$  où  $\mu_e$  est la mesure de Bernoulli de moyenne  $p$  sur  $\{0, 1\}$ .

##### 3.1.1 Quelques propriétés connues :

Comme pour beaucoup de modèles en physique statistique, on rencontre des phénomènes "critiques" dans l'étude de la percolation. Le plus connu est

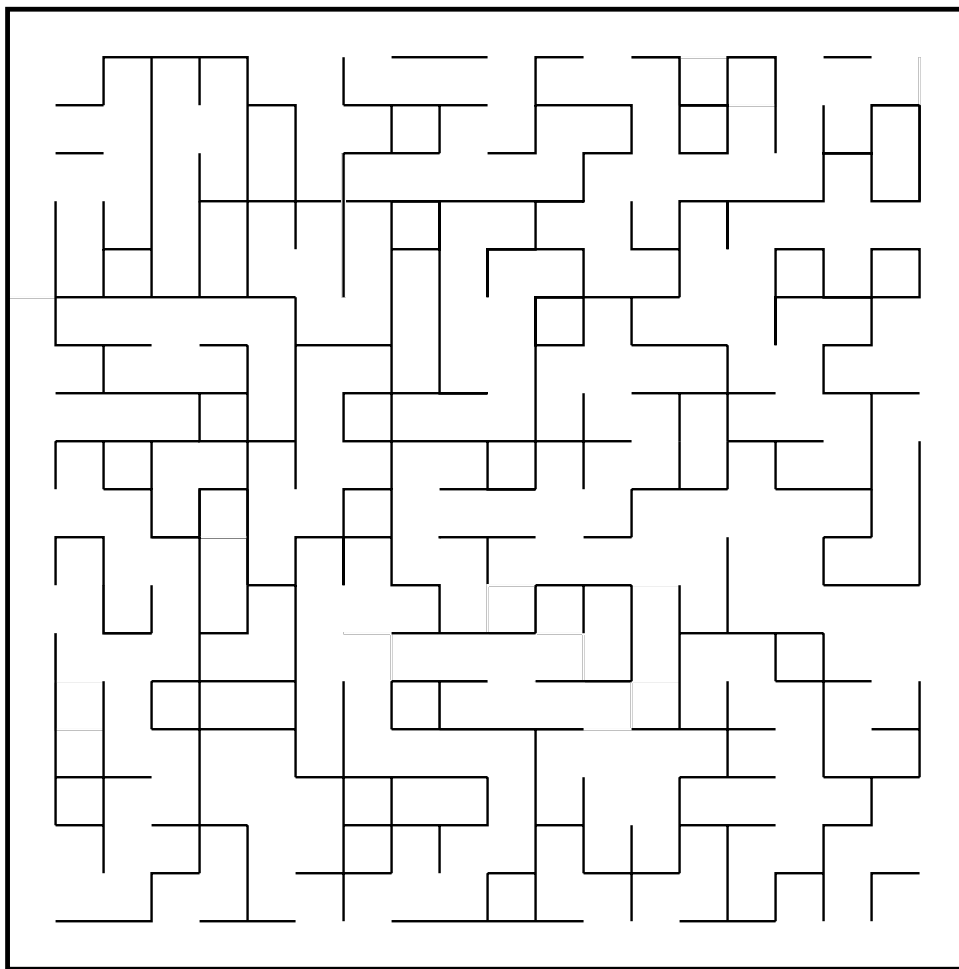


FIG. 2 – Voici le résultat d'une percolation surcritique

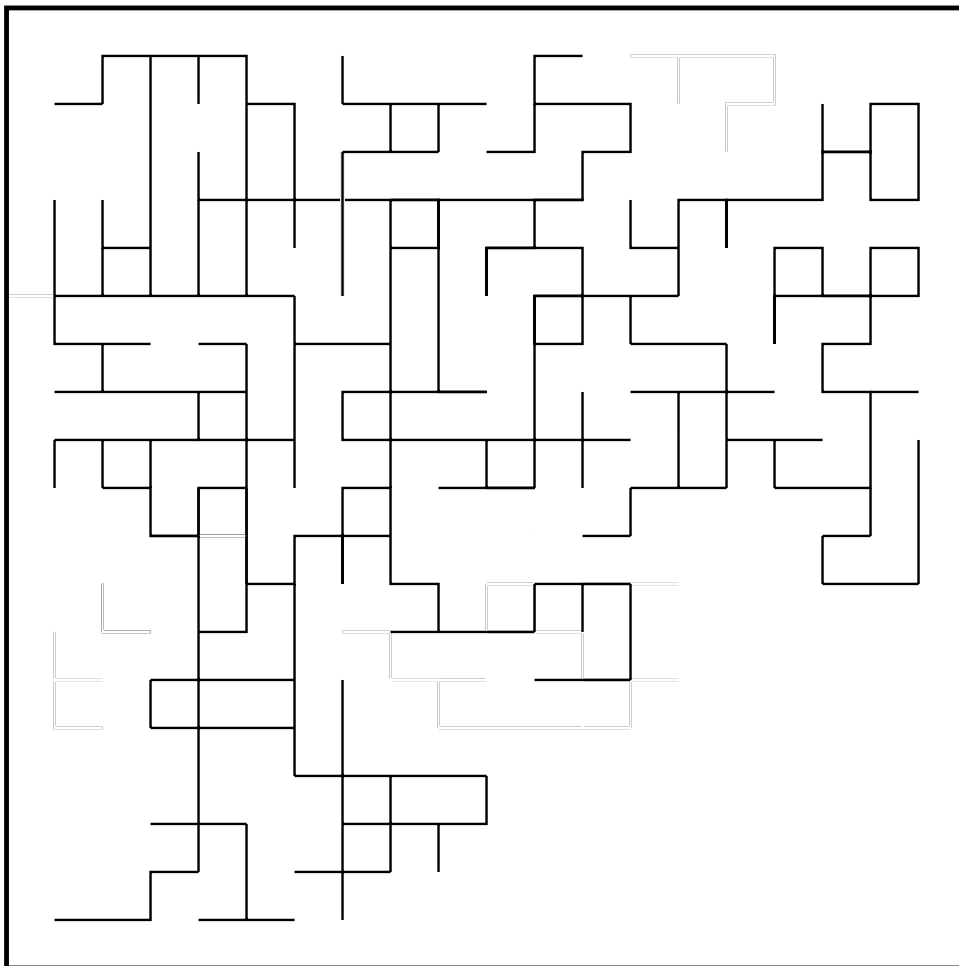


FIG. 3 – On n'a gardé ici que la plus grosse composante connexe  $\mathcal{C}_2(n)$

le suivant : on considère le sous graphe aléatoire de  $\mathbb{L}^d$  contenant les sommets de  $\mathbb{Z}^d$  et les branches ouvertes seulement. On peut décomposer ce graphe en composantes connexes disjointes, on s'intéresse à la composante contenant l'origine 0 ; on le note  $C$ . On sait alors que pour toute dimension  $d \geq 2$ , il existe  $0 < p_c(d) < 1$  appelée probabilité critique, telle que  $\forall p > p_c : P_p[|C| = \infty] > 0$  et  $\forall p < p_c : |C|$  est fini presque sûrement. Il y a bien ce que l'on pourrait appeler un phénomène de changement de phase au niveau de  $p_c$ .

En fait dès que  $p > p_c$ , on peut affirmer que la probabilité qu'il existe une composante connexe infinie est égale à 1 (mais elle ne passe pas forcément par 0) ; on peut même dire mieux : cette composante infinie est presque sûrement unique !! On peut ajouter comme propriété intéressante que l'on connaît la probabilité critique pour  $d = 2$  : elle vaut  $1/2$ , mais cela est un résultat difficile...

### 3.1.2 Modèle étudié

On s'intéresse à la restriction des ensembles aléatoires ci-dessus aux boîtes  $B_d(n) = \{-n, \dots, n\}^d$  de  $\mathbb{Z}^d$ . On obtient ainsi des ensembles comme dans la figure(2). Or toute la théorie que l'on vient de constituer ne s'intéresse qu'à des chaînes irréductibles ; dans le cadre de marches aléatoires sur des graphes : on se restreint donc à la composante connexe contenant le plus de sommets (dans l'article que l'on suit, l'auteur considère celle contenant le plus de branches). On note cette composante  $\mathcal{C}_d(n)$  (cf figure (3)). Dans cette partie nous allons évaluer le comportement asymptotique des temps de mélange uniformes sur ces graphes connexes  $\mathcal{C}_d(n)$  en se restreignant au cas de la dimension 2 (toutefois les lemmes préliminaires ne sont pas plus durs pour  $d \geq 2$ ).

### 3.1.3 Position du problème et résultat

Dans notre article de référence, "Evolving sets and mixing", les auteurs affirment que l'on peut améliorer, via le théorème que l'on a montré, le résultat de Benjamini et Mossel : "On the mixing time of simple random walk on the super critical percolation cluster". Il est en effet prouvé dans cet article un résultat de vitesse de convergence en totale variation vers les probabilités invariantes des  $\mathcal{C}_d(n)$ . Ils utilisent à une variante près les mêmes méthodes de conductance. En suivant la remarque de Ben Morris, on va montrer dans cette partie que l'on peut effectivement améliorer ces résultats pour le temps de mélange  $\varepsilon$ -uniforme.

On va montrer que ce temps de mélange est du même ordre de grandeur que celui du carré dans lequel il est inscrit ( $B_d(n)$ ) à savoir  $\mathcal{O}(n^2)$  !. C'est



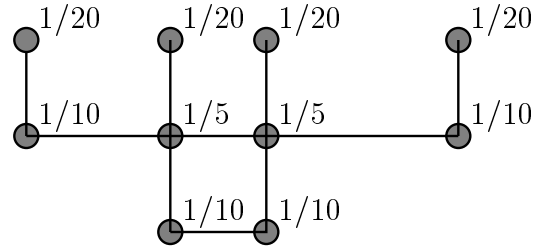


FIG. 4 – Exemple de mesure limite

dans des cas comme celui-ci que la "méthode de la conductance" est bien plus efficace que les autres méthodes d'estimation de vitesse de convergence. Par exemple pour la méthode spectrale, quand l'on retire des états (trous) les espaces changent radicalement et il faut tout refaire...

Voici le principal résultat de notre partie :

**Théorème 3.1** *Si  $p > p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$ , alors il existe une constante  $C = C(p) > 0$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p[\tau_\varepsilon(\mathcal{C}_2(n)) < Cn^2 \ln(\frac{1}{\varepsilon})] = 1 \quad (26)$$

### 3.1.4 Notations et schéma de preuve

On utilisera souvent la terminologie suivante : si  $\mathcal{G}_n$  est un événement décrivant une propriété de  $\mathcal{C}_d(n)$ . On dira que cet événement se produit asymptotiquement presque sûrement (noté a.p.s), si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p[\mathcal{G}(n)] = 1$ .

Rappelons de quelle chaîne de Markov il s'agit ici : on considère la chaîne associée au graphe connexe fini  $\mathcal{C}_d(n)$ . Elle stationne en chaque point avec probabilité  $1/2$  et sinon, se dirige vers ses voisins avec probabilité uniforme. Il est facile de prouver (réversibilité) que la mesure stationnaire est :

$$\forall x \in \mathcal{C}_d(n), \pi(x) = \frac{\deg(x)}{\sum_{y \in \mathcal{C}_d(n)} \deg(y)} \quad (27)$$

$\deg(y)$  est le nombre d'arrêtes partant de  $y$ . Ainsi, la mesure stationnaire est loin d'être uniforme sur  $\mathcal{C}_d(n)$  (cf figure(4)).

Comme on l'a dit, Benjamini et Mossel utilisent une variante de la notion de conductance. C'est en fait juste une question de définition : ils ont choisi de considérer l'analogue

$$\varphi_A := \frac{\mathcal{Q}(A, A^c)}{\pi(A)(1 - \pi(A))}. \quad (28)$$

Cette définition, invariante par passage au complémentaire, est beaucoup plus maniable pour les preuves à suivre. On définit de même  $\varphi(r)$  ainsi que  $\varphi_*$  que l'on notera seulement  $\varphi$ .

**Schéma de preuve :** On veut prouver que le temps de mélange est asymptotiquement de l'ordre de  $n^2$ . Pour cela on utilise le théorème démontré dans cet exposé. On est donc naturellement conduit à minorer asymptotiquement la conductance  $\varphi(x)$ . Cela revient, par définition de  $\varphi(x)$ , à minorer tout les  $\varphi_A$ ,  $\pi(A) \leq x$  simultanément. Pour cela on montre qu'il suffit de savoir minorer certains  $\varphi_A$  : ceux pour lesquels  $A$  est connexe et de complémentaire connexe dans  $\mathcal{C}_d(n)$ . La première partie de la preuve consiste donc à se ramener de l'ensemble des  $A$  tels que  $\pi(A) \leq x$  vers l'ensemble plus restreint des  $A$  connexes et de complémentaire connexe (on verra en fait que l'on a besoin de restreindre plus que cela). La seconde partie de la preuve minore les  $\varphi(A)$  de l'ensemble restreint. Au cours de cette preuve nous admettrons deux résultats techniques indépendants de la théorie des temps de mélange : un portant sur la percolation, l'autre sur une estimation de grandes déviations.

## 3.2 Preuve du Théorème

### 3.2.1 Deux résultats essentiels :

On aura souvent besoin des deux faits suivants (surtout du premier). Le premier donne une minoration asymptotique de la taille des ensembles  $\mathcal{C}_d(n)$  que l'on considère. Le second est d'un intérêt plus subtil, il servira par la suite dans la démonstration par l'absurde qui permet de se ramener au cas plus simple.

**Proposition 3.2** *Si  $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$  alors il existe  $p' = p'(p, d) > 0$  tel que a.p.s, le cardinal de  $\mathcal{C}_d(n)$  (au sens du nombre de sommets) soit au moins  $p'd(2n+1)^d$ .*

Cette propriété n'est pas directement liée à la théorie des temps de mélanges ; c'est un résultat propre aux phénomènes de percolation. On l'admettra donc dans cette preuve.

Le deuxième résultat (que l'on démontre) donne une majoration de  $\varphi(x)$  :

**Lemme 3.3** *Pour tout  $d \geq 2$  et  $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$  il existe une constante  $c = c(p, d) > 0$  telle que a.p.s,  $\mathcal{C}_d(n)$  vérifie : si  $\min_v \pi(v) \leq x \leq 1/2$ , alors*

$$\varphi(x) < \frac{c}{nx^{1/d}} \quad (29)$$

Preuve : on va recouvrir  $B_d(n)$  par de "petits" cubes. On choisira le cube de poids maximal, et on regardera comment est connecté ce cube au reste de  $\mathcal{C}_d(n)$ .

D'après la proposition 3.2, il existe  $p'(p)$  tel que a.p.s. au moins  $p'd(2n+1)^d$  sommets appartiennent à  $\mathcal{C}_d(n)$ . Pour montrer que (29) est vérifié pour tout  $\min_v \pi(v) \leq x \leq 1/2$ , il suffit de voir que c'est vérifié pour  $\min_v \pi(v) \leq x \leq q$  pour n'importe quelle constante  $q$ . (En effet,  $\varphi$  est décroissante). Soit  $r$  tel qu'il soit possible de recouvrir au moins une proportion  $(1 - p'/2)$  du nombre de sommets par des translations disjointes de  $B_d(k)$  pour tout  $k < n/r + 1$  ( $r$  est pris indépendamment de  $n$ ). Au moins une des translations  $v + B_d(k)$  satisfait :

$$\frac{2}{p'} \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right)^d \geq \pi(B_d(k) + v) \geq \frac{p'}{4} \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right)^d. \quad (30)$$

En effet l'inégalité de gauche est satisfaite par tout les petits cubes ; il y a  $(2k+1)^d$  sommets dans ces cubes, et le poids d'un sommet quelconque de  $\mathcal{C}_d(n)$  est majoré a.p.s. par  $2d/(1p'd(2n+1)^d)$  par la prop 3.2 (on aura souvent besoin de cette majoration). Pour l'autre inégalité, on raisonne par l'absurde : si tout les cubes étaient de poids strictement inférieur au membre de droite, le poids du recouvrement serait strictement inférieur à  $p'/4$ . Par ailleurs, ce poids est aussi supérieur à :

$$\frac{\text{minimum de points recouverts}}{2d \max |\mathcal{C}_d(n)|} = \frac{p'd - p'/2}{2d} \geq p'/4 \quad (31)$$

On regarde comment est relié le cube vérifiant (30) au reste de  $\mathcal{C}_d(n)$ . Dans  $\mathbb{Z}^d$ , il y  $2d(2k+1)^{d-1}$  arêtes qui sortent de  $v + B_d(k)$ , donc :

$$\mathcal{Q}(v + B_d(k), \mathcal{C}_d(n) \setminus v + B_d(k)) \leq \frac{2d(2k+1)^{d-1}}{p'd(2n+1)^d} = \frac{2(2k+1)^{d-1}}{p'(2n+1)^d} \quad (32)$$

Ainsi, on obtient la suite d'inégalités :

$$\varphi_{v+B_d(k) \cap \mathcal{C}_d(n)} \leq \frac{2(2k+1)^{d-1} 4(2n+1)^d}{1/2 p' (2n+1)^d p' (2k+1)^d} \leq \frac{16}{p'^2 (2k+1)} \quad (33)$$

$$\leq \frac{c'}{n \pi^{1/d}(v + B_d(k))} \quad (34)$$

$$\leq \frac{c}{n} \left( \frac{p'}{2} \left( \frac{2n+1}{2k+3} \right)^d \right)^{1/d} \quad (35)$$

où  $c'$  et  $c$  sont des constantes. Désormais, pour tout  $\frac{2}{p'(2n+1)^d} \leq x \leq q = 2r^{-d}/p'$  ; en choisissant le plus grand  $k$  tel que  $x \geq \frac{2}{p'} \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right)^d$ , d'après (30), on a  $\varphi(x) \leq \varphi_{v+B_d(k) \cap \mathcal{C}_d(n)}$ . Donc par l'inégalité ci-dessus on a bien  $\varphi(x) < \frac{c}{n x^{1/d}}$ . En modifiant éventuellement la constante  $c$ , on gère facilement le cas  $x \geq q$  et les "quelques"  $x \leq \frac{2}{p'(2n+1)^d}$ .

Les raisonnements futurs auront souvent des points communs avec ceux de ce lemme : on ira alors plus vite.

### 3.2.2 Comment se ramener au cas plus simple d'ensembles connexes, et de complémentaire connexe

La démonstration du théorème 3.1 se ramène à minorer  $\varphi(x)$ . On montre dans cette section qu'il suffit de savoir minorer les conductances des parties  $A$  connexes et de complémentaire (dans  $\mathcal{C}_d(n)$ ) connexes également. Autrement dit, à partir du théorème suivant admis provisoirement, on montre le résultat principal.

**Théorème 3.4** *Pour tout  $d \geq 2$ , et tout  $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$ , il existe des constantes  $c_1 = c_1(d, p) > 0$  et  $c_2 = c_2(d, p) > 0$  telles que  $\mathcal{C}_d(n)$  vérifie a.p.s que pour tout ensemble  $A$  tel que  $A$  et  $A^c$  soient connexes et  $1/2 \geq \pi(A) \geq \frac{c_1 \ln \frac{d}{d-1} n}{n^d}$ ,*

$$\varphi_A \geq \frac{c_2}{n\pi^{1/d}(A)}. \quad (36)$$

On va utiliser deux lemmes ; le premier renseigne sur la nature des ensembles qui minimisent  $\varphi$ , le deuxième sera d'utilité évidente.

**Lemme 3.5**  *$\min_{A \subset \mathcal{C}_d(n)} \varphi_A = \varphi(1/2)$  est atteint par un ensemble  $A$  tel que  $A$  soit connexe ainsi que son complémentaire.*

*De façon générale  $\varphi(x)$  du fait de la perte de symétrie n'est plus atteint que par un ensemble connexe  $A$  ( $A^c$  n'est plus nécessairement connexe).*

L'espace d'états est fini, donc  $\varphi = \min_{\pi(A) \leq 1/2} \varphi_A$ . Soit  $A$ , tel que  $\varphi$  soit atteint en  $A$ . Par l'absurde, on écrit  $A = \bigcup_{i=1}^m B_i$  où  $m \geq 2$ . Notons  $\gamma = \min \frac{Q(B_i, B_i^c)}{\pi(B_i)\pi(B_i^c)}$ .

$$Q(A, A^c) = \sum_i Q(B_i, A^c) = \sum_i Q(B_i, B_i^c) \geq \gamma \sum_i \pi(B_i)\pi(B_i^c) \quad (37)$$

$$= \gamma \sum_i \pi(B_i) - \pi^2(B_i) \quad (38)$$

$$= \gamma(\pi(A) - \sum_i \pi^2(B_i)) \quad (39)$$

$$\text{On a donc : } \frac{Q(A, A^c)}{\pi(A)\pi(A^c)} \geq \gamma \frac{\pi(A) - \sum_i \pi^2(B_i)}{\pi(A) - \pi^2(A)} \quad (40)$$

Or  $m \geq 2$ , donc  $\sum \pi^2(B_i) < (\sum \pi(B_i))^2 = \pi^2(A)$ . Cela implique par (40) que  $\varphi_A > \gamma$  et c'est absurde. Vu que  $\varphi = \varphi_A = \varphi_{A^c}$ ,  $A^c$  est connexe également.

Le raisonnement précédent reste vrai pour l'ensemble  $A$  tel que  $\pi(A) \leq x$  et  $\varphi_A = \varphi(x)$ ; cet ensemble est donc bien connexe. En revanche, cette fois le situation n'est plus symétrique : on ne peut rien dire sur  $A^c$ .

La minoration du théorème (3.4) portant sur des ensembles "réguliers",

ajouté au lemme précédent permet de minorer  $\varphi(x)$  pour presque tous les  $x$  qui nous intéressent.

**Lemme 3.6** *Pour tout  $d \geq 2$ , et tout  $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$ , il existe des constantes  $c_1 = c_1(d, p) > 0$  et  $c_2 = c_2(d, p) > 0$  telles que  $\mathcal{C}_d(n)$  vérifie a.p.s. que pour tout  $1/2 \geq x \geq \frac{c_1 \ln \frac{d-1}{n}}{n^d}$ ,*

$$\varphi(x) \geq \frac{c_2}{nx^{1/d}}. \quad (41)$$

Preuve : D'après le lemme (3.5), le résultat est vrai pour  $x = 1/2$ . Vu que  $\varphi$  est décroissante, de même que dans le lemme (3.3), pour tout  $q > 0$ , on obtient (41) pour  $q \leq x \leq 1/2$  en diminuant la valeur de  $c_2$ . On va prouver maintenant que (41) est vérifié pour tout  $q \geq x \geq \frac{c_1 \ln \frac{d-1}{n}}{n^d}$ . Soit  $A$  tel que  $\varphi(x) = \varphi_A$ . Par le lemme (3.5),  $A$  est connexe. Si son complémentaire  $\mathcal{C}_d(n) \setminus A$  est connexe également, c'est terminé.

Supposons donc le contraire :  $\mathcal{C}_d(n) \setminus A$  est la réunion des composantes connexes disjointes  $A_1, \dots, A_r$ , où  $r \geq 2$ . En réordonnant on peut supposer que  $\pi(A_r)$  est maximal (parmi les  $\pi(A_i)$ ).

Montrons que  $\pi(A_r) \geq 1/2$ ; supposons le contraire  $\pi(A_r) < 1/2$ .

Diminuons encore la "constante"  $q$  (donc également  $c_2$ ) pour que  $q \leq 1/4$ . On considérant la suite croissante  $u_k = (\pi(A \bigcup_{i=1}^k A_i))_{k=1 \dots r}$ ; elle est à valeurs dans  $[0, 1]$ , atteint 1 en  $k = r$ . Vu qu'elle croît par sauts tous  $\leq \pi(A_r) < 1/2$ , il existe au moins un  $k < r$  tel  $1/4 \leq u_k \leq 3/4$ . Soit  $B = A \bigcup_{i=1}^k A_i$ ; on vérifie facilement que  $\mathcal{Q}(B, \mathcal{C}_d(n) \setminus B) \leq \mathcal{Q}(A, \mathcal{C}_d(n) \setminus A)$  (ce fait est indépendant de l'encadrement  $1/4 < \pi(B) < 3/4$ ). On utilise nos outils puissants : d'après le lemme (3.3) on a a.p.s.  $\varphi_A \leq \frac{c'}{nx^{1/d}}$ , pour une constante  $c'$ . Il découle de ce fait que  $\mathcal{Q}(A, A^c) \leq \pi(A) \frac{c'}{nx^{1/d}} = \frac{c'x^{1-1/d}}{n}$ . D'après le lemme (3.5), l'ensemble pour lequel la valeur de  $\varphi$  est atteinte est connexe et de complémentaire connexe; donc par le théorème (3.4), il existe une constante  $c''$ , a.p.s.  $\varphi \geq c''/n$  (voir la preuve ci-dessous pour plus de détails). On mélange maintenant toutes ces informations dans l'inégalité :

$$c''/n \leq \varphi \leq \varphi_B \leq 8\mathcal{Q}(A, \mathcal{C}_d(n) \setminus A) \leq \frac{8c'}{n}x^{1-1/d} \leq \frac{8c'}{n}q^{1-1/d}. \quad (42)$$

$c'$  et  $c''$  sont des constantes indépendantes de  $q$ , on peut donc encore manipuler la "constante"  $q$  (en diminuant comme d'habitude  $c_2$  qui n'intervient pas directement ici). Ainsi en choisissant  $q$  suffisamment petit, on obtient une contradiction. On a donc :

$$\pi(A_r) \geq 1/2 \quad (43)$$

On travaille maintenant avec  $C = \mathcal{C}_d(n) \setminus A_r$  ( $\pi(C) \leq 1/2$ ). On remarque que  $C$  est connexe, de complémentaire connexe. De plus  $\pi(A_r) + \pi(A) \leq 1$ ,

donc  $1 - \pi(C) + \pi(A) \leq 1$ ; ainsi  $\pi(A) \leq \pi(C) \leq 1 - \pi(A)$ . Par le théorème (3.4)  $\varphi_C \geq \frac{c_2}{n\pi^{1/d}(C)}$ . On a donc :

$$\mathcal{Q}(A, \mathcal{C}_d(n) \setminus A) \geq \mathcal{Q}(C, \mathcal{C}_d(n) \setminus C) \geq c_2 \frac{\pi^{1-1/d}(C)(1 - \pi(C))}{n} \quad (44)$$

$$\geq c_2 \frac{\pi^{1-1/d}(A)(1 - \pi(A))}{n} \quad (45)$$

On obtient donc le résultat désiré :

$$\varphi_A \geq \frac{c_2}{nx^{1/d}}. \quad (46)$$

Remarque : le résultat ci-dessus, dans la trame de la preuve ne constitue pas une contradiction; partant d'un  $A$  qui n'est pas de complémentaire connexe, on arrive à minorer sa conductance en se ramenant à des ensembles de complémentaires connexes; mais comme on l'a vu, il n'y a aucune raison que  $A$  vérifie cela.

**Preuve du Théorème (3.1)** On suppose que (36) est vérifié. Il nous faut maintenant régler le cas des petites valeurs de  $x$ . Si l'ensemble  $A$  vérifie  $\pi(A) \leq \frac{c_1 \ln^{\frac{d}{d-1}} n}{n^d}$ , alors, vu que  $\mathcal{C}_d(n)$  est connexe,  $\mathcal{Q}(A, A^c) \geq 1/(2d(2n+1)^d)$  d'où :

$$\varphi_A \geq \frac{\mathcal{Q}(A, A^c)}{\pi(A)} \geq \left( \frac{n}{2n+1} \right)^d \frac{1}{2dc_1 \ln^{\frac{d}{d-1}} n}. \quad (47)$$

Toujours par le lemme (3.5), l'ensemble pour lequel  $\varphi$  est atteint est connexe, de complémentaire connexe, donc on obtient par (36) et (47), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p[\varphi \geq \frac{c_2 2^{1/d}}{n}] = 1. \quad (48)$$

On a déjà utilisé ce résultat dans la démonstration précédente; seulement, on avait été moins rigoureux car on n'avait pas considéré les petites valeurs de  $x$ .

Par ailleurs, par (41) et (47), on obtient que a.p.s. pour tout  $1/2 \geq x \geq \frac{c_1 \ln^{\frac{d}{d-1}} n}{n^d}$ ,

$$\varphi(x) \geq \min \left\{ \left( \frac{n}{2n+1} \right)^d \frac{1}{2dc_1 \ln^{\frac{d}{d-1}} n}, \frac{c_2}{nx^{1/d}} \right\}. \quad (49)$$

Or, par Le théorème de la première partie de cet exposé :

$$\tau_\varepsilon \leq \int_{\min_v \pi(v)}^{1/2} \frac{4du}{u\Phi^2(u)} + \frac{4}{\Phi^2} \ln \frac{8}{\varepsilon} \quad (50)$$

$$\leq \int_{\min_v \pi(v)}^{1/2} \frac{16du}{u\phi^2(u)} + \frac{16}{\phi^2} \ln \frac{8}{\varepsilon} \text{ car } \Phi \leq 2\phi. \quad (51)$$

On conclut donc par un gros calcul : on obtient a.p.s. :

$$\begin{aligned}\tau_n(\varepsilon) &\leq 16 \left( \int_{\frac{1}{2d(2n+1)^d}}^{1/2} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2d} 4d^2 c_1^2 \ln^{\frac{2d}{d-1}} n \frac{dt}{t} + \int_0^{1/2} \frac{n^2 dt}{c_2^2 t^{1-2/d}} + \frac{n^2}{2^{2/d} c_2^2} \ln(8/\varepsilon) \right) \\ &\leq C n^2 \ln(1/\varepsilon)\end{aligned}$$

Pour une constante  $C$  qui ne dépend que de la dimension  $d$  et du paramètre  $p$ .

### 3.2.3 Preuve du théorème restant (théorème 3.4)

**Preuve :** On utilise un résultat de grandes déviations établi par Kesten dans les années 80 ; on admettra ce résultat.

**Lemme 3.7** *Considérons une percolation identiquement et indépendamment distribuée  $X(e)$  sur les arêtes de  $\mathbb{Z}^2$  ou*

$$\mathbf{P}_p[X(e) = 0] = 1 - \mathbf{P}_p[X(e) = 1] = p < 1/2 (= p_c(\mathbb{Z}^2)).$$

La distance entre deux points  $x$  et  $y$  est :

$$D(x, y) = \min \left( \sum_{i=1}^k X(e_i) : e_1, \dots, e_k \text{ est un chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } \mathbb{L}^2. \right) \quad (52)$$

Alors il existe des constantes  $a > 0$  et  $b > 0$  telles que pour tous  $x$  et  $y$ ,

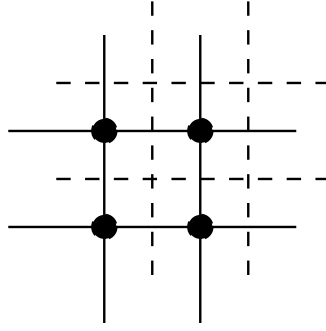
$$\mathbf{P}_p[D(x, y) \leq a|x - y|_1] \leq \exp(-b|x - y|_1),$$

où  $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .

Considérons  $\mathbb{Z}^2$  et considérons son dual  $\mathbb{Z}_*^2$  : c'est le même graphe que  $\mathbb{L}^2$ , mais "translaté" par rapport à celui-ci du vecteur  $(1/2, 1/2)$  (cf figure (5)). Si l'arête  $e$  est fermée, on décroite  $X(e^*) = 0$  et inversement ; ainsi  $\mathbf{P}_p[X(e^*) = 0] = 1 - p < 1/2$  ; on pourra donc appliquer le lemme précédent entre deux points du réseau dual. En particulier, si  $d$  est une constante  $> 0$ , alors pour toute paire de points  $x^*$  et  $y^*$  du dual de  $\mathcal{C}_2(n)$  telle que  $|x^* - y^*|_1 \geq d \ln n$ , on a a.p.s.

$$D(x^*, y^*) \geq a|x^* - y^*|_1 \quad (53)$$

Soit  $A$  un ensemble connexe dans  $\mathcal{C}_2(n)$  tel que  $1/2 \geq t = \pi(A) \geq \frac{c_1 \ln^2 n}{n^2}$ , et tel que  $\mathcal{C}_2(n) \setminus A$  soit connexe aussi.  $B_2(n) \setminus A$  est réunion de  $(\mathbb{Z}^2)$  composantes connexes disjointes :  $A_1, \dots, A_r$  où  $\mathcal{C}_2(n) \subset A_r$ . Soit  $A' = A \cup_{i=1}^{r-1} A_i$ .  $A'$  et  $B_2(n) \setminus A'$  sont donc connexes. D'après la proposition (3.2), il y a a.p.s

FIG. 5 – dual  $\mathbb{Z}_*^2$  de  $\mathbb{Z}^2$ 

au moins  $p'd(2n+1)^d$  points dans  $\mathcal{C}_2(n)$ ; ainsi chaque point est de poids plus petit que  $\frac{2}{p'(2n+1)^d}$ . Donc a.p.s  $t = \pi(A) \leq \frac{2|A|}{p'(2n+1)^d}$ ; vu qu'évidemment  $\pi(\mathcal{C}_2(n) \setminus A) \geq \pi(A)$ , on peut trouver une constante  $q > 0$  telle que a.p.s.  $A$  et  $\mathcal{C}_2(n) \setminus A$  contiennent chacun au moins  $qtn^2$  sommets ( $A$  est un ensemble choisit dans la boîte de taille  $n$  : dire qu'il contient a.p.s  $qtn^2$  points : cela signifie  $P[\forall t \text{ et } A \text{ comme ci-dessus, } A \text{ contient au moins } qtn^2 \text{ points}]$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini). Donc, de surcroît  $A'$  et  $B_2(n) \setminus A'$  ont a.p.s. au moins  $qtn^2$  sommets chacun.

Soit  $\gamma$ , le bord de  $A'$  dans  $B_2(n)$  : cela signifie que  $\gamma$  est constitué de toutes les arêtes  $(x, y)$  telles que  $x \in A'$ ,  $y \notin A'$ . On définit  $\gamma^*$  comme étant le chemin obtenu en prenant les arêtes duales des arêtes de  $\gamma$  (cf figure (6)). Puisque  $A'$  et  $B_2(n) \setminus A'$  sont connexes,  $\gamma^*$  est connexe.

Ce qui nous intéresse, c'est de minimiser le mieux possible  $\mathcal{Q}(A, \mathcal{C}_2(n) \setminus A)$ . Cela revient à connaître comment  $A$  et  $\mathcal{C}_2(n) \setminus A$  sont reliés. Or dès qu'il y a un passage de  $A$  vers  $\mathcal{C}_2(n) \setminus A$ , ce passage traverse  $\gamma^*$  et inversement (cf figure (6)). Ainsi le nombre de liens entre les deux parties qui nous intéresse correspond exactement au nombre d'arêtes de  $\gamma^*$  traversées par une arête ouverte de  $\mathcal{C}_2(n)$ . On veut donc minorer le nombre d'arêtes ouvertes de  $\gamma^*$  : on note  $|\gamma^*|$ , le nombre d'arêtes  $e$  de  $\gamma^*$  pour lesquelles  $X(e) = 1$ .

**idée naturelle** : Si l'on parvient à trouver deux points sur  $\gamma^*$  suffisamment éloignés l'un de l'autre (en  $\ln(n)$ ), on pourra appliquer le résultat de Kesten, et minorer a.p.s  $|\gamma^*|$ .

Montrons alors qu'il existe des points  $x^*$  et  $y^*$  sur  $\gamma^*$  tels que  $|x^* - y^*|_1 \geq c_3 \sqrt{qtn}$  pour une constante  $c_3$ . Par l'absurde, si il n'existait pas de telle constante  $c_3 > 0$ , il existerait un  $\varepsilon(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , et une extraction  $\sigma(n)$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p[\forall x^*, y^* \text{ dans } \gamma^* : |x^* - y^*|_1 \leq \sqrt{t}\varepsilon(\sigma(n))n] \geq \beta > 0 \quad (54)$$



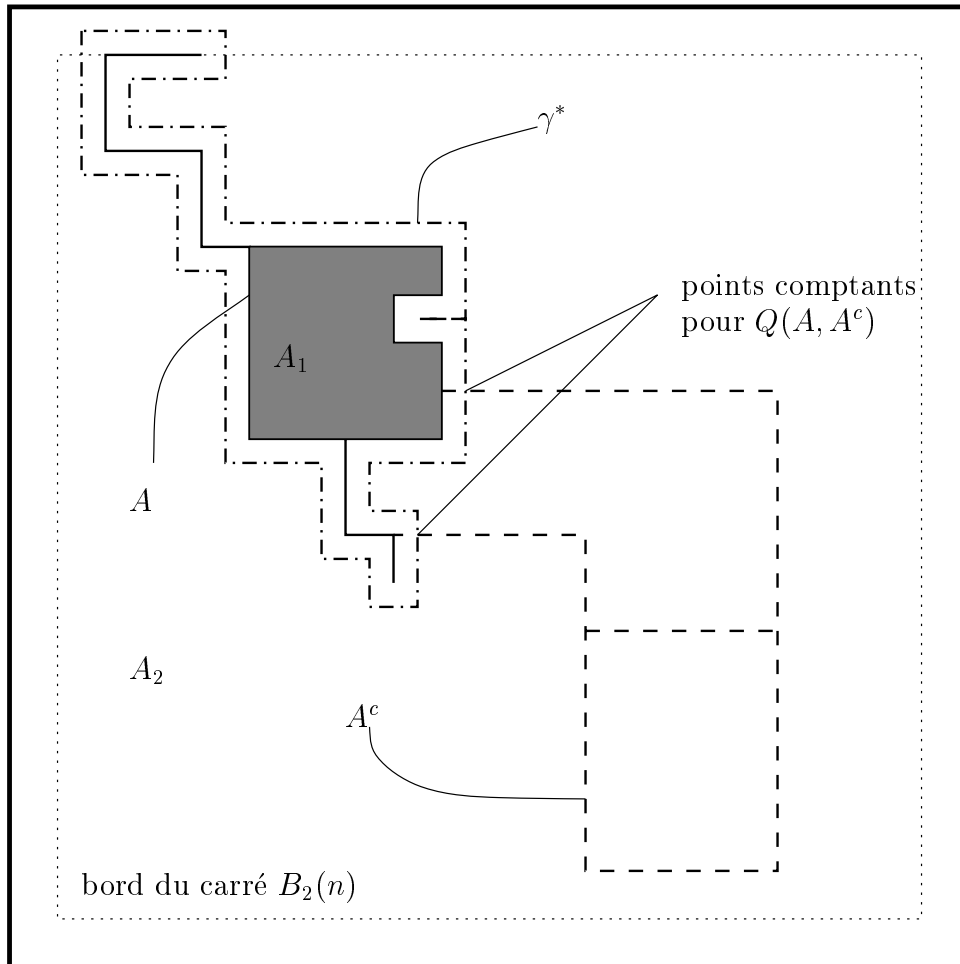


FIG. 6 – Voici, en haut à gauche la partie  $A'$ , et son complémentaire en bas

A chaque rang  $\sigma(n)$ , en fixant  $x^*$  quelconque dans  $\gamma^*$ , on aurait, pour une proba  $\geq \beta > 0$ ,  $\gamma^*$  contenu dans un losange autour de  $x^*$  de rayon  $\leq \sqrt{t}\varepsilon(\sigma(n))n$ . Ainsi  $A'$ , ou bien  $B_2(n) \setminus A'$  serait dans ce losange et posséderait donc moins de  $t\varepsilon^2(\sigma(n))n^2$  sommet. Or quand  $n$  est suffisamment grand cette expression est  $< qt\sigma(n)^2$ ; on obtient donc une contradiction. Ainsi a.p.s on peut trouver des points suffisamment éloignés. Cependant le résultat de Kesten est vrai a.p.s pour un couple de deux points FIXES. Il faut donc affiner le raisonnement.

On a à notre disposition le fait que pour une probabilité qui tend vers 1, on peut prendre des points éloignés de  $c_3\sqrt{tn}$  en  $|\cdot|_1$ . A  $n$  donné on considère l'ensemble des  $\{x^*, y^*\}$  tels que  $|x^* - y^*| \geq c_2\sqrt{tn}$ ; il y en a moins de  $n^4$ . Pour chacun de ces doublets, avec probabilité  $\exp(-bc_3\sqrt{tn})$ , "ça se passe mal". Donc à  $n$  donné la probabilité qu'un couple quelconque de points éloignés ne satisfait pas la propriété de Kesten est plus petite que  $n^4\exp(-bc_3\sqrt{tn})$ . Cette probabilité tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

En résumé : Avec probabilité tendant vers 1, on peut choisir (par un algorithme prédéfini en ordonnant les sommets de nos boîtes par exemple) deux points suffisamment éloignés (dans le sens de ce que l'on a montré). La probabilité que ce couple ne vérifie pas le lemme de Kesten tend vers 0 avec la taille de la boîte.

Par le résultat ci-dessus et celui de Kesten, on déduit que a.p.s  $|\gamma^*| \geq ac_3\sqrt{qtn}$ . Puisque  $4(2n+1)^2\mathcal{Q}(A, \mathcal{C}_2(n) \setminus A) \geq |\gamma^*|$ , on obtient :

$$\varphi_A \geq \frac{ac_3\sqrt{tn}}{4(2n+1)^2t(1-t)} \geq \frac{c_2}{\sqrt{tn}}, \tag{55}$$

où  $c_2 = c_2(p) > 0$  comme il faut.

**Remerciements** Nous remercions tout particulièrement Philippe MARCHAL, pour le temps qu'il nous a consacré et pour nous avoir donné avec ce sujet, la possibilité de découvrir un peu le monde de la recherche. Nous remercions également Vincent BEFFARA pour son aide précieuse.

## Références

- [1] B. Morris et Y. Peres (2002) Evolving sets and mixing, Preprint.
- [2] I. Benjamini et E. Mossel (2003) On the mixing time of a simple random walk on the supercritical percolation cluster, *Probab. Th. Rel Fields*,.

- [3] G. Grimmett, Percolation. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [4] M. Jerrum et A. Sinclair (1996) The Markov chain Monte Carlo method : an approach to approximate counting and integration.
- [5] M. Dyer, A. Frieze et R. Kannan(1995) A random polynomial time algorithm for approximating the volume of convex bodies.