Introduction au domaine de recherche : Etude de la stabilité d'objets non linéaires, solutions d'EDP dispersives

Alexander Semenov, sous la direction de Raphaël Côte

19 novembre 2018

Résumé

On va s'intéresser à la stabilité des solutions particulières des EDP dispersives non linéaires : les solitons, les breathers, le soliton de Peregrine... On commencera par le soliton, qui apparaît à la fois comme solution de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) et comme solution de l'équation de Korteweg-de Vries généralisée $(gKdV)$. Lorsqu'il est solution de (NLS), il correspond à un équilibre entre un phénomène linéaire qui est la dispersion, qui fait que les fréquences différentes d'une solution se propagent à des vitesses différentes et qui a donc pour conséquence de faire tendre une solution uniformément vers 0, et un phénomène non linéaire qui fait que la masse d'une solution a tendance à se concentrer en un point, ce qui provoque l'explosion d'une solution en temps fini. Il a la forme d'une solution stationnaire qui change de phase à vitesse constante. Un soliton pour $(gKdV)$ correspond à une solution qui se propage à vitesse constante sans déformation. Un breather apparaît comme une solution de $(mKdV)$ (un cas particulier de $(gKdV)$) qui correspond à une fonction définie sur l'espace périodique en temps qui se propage à vitesse constante sans déformation. Le soliton de Peregrine modélise le phénomène de vague scélérate dans un océan. La raison pour laquelle on aimerait démontrer une stabilité pour ces objets est que ces objets modélisent des objets qui ont été observés en physique (s'ils n'étaient pas stables, il serait compliqué d'observer ces objets en temps long dans des expériences physiques). Il faut trouver la bonne notion de stabilité pour chacun de ces objets. En effet, on verra que la notion de stabilité la plus simple ne marche pas. Pour les deux premiers objets, la bonne notion de stabilité est la stabilité orbitale. L'étude de la stabilité orbitale des solitons et des breathers a fait l'objet de mon mémoire de M2, ces résultats de stabilité orbitale sont connus grâce aux travaux de Weinstein, Alejo, Muñoz. Pour le soliton de Peregrine, la bonne notion de stabilité est encore à trouver : cela sera un objectif de ma thèse.

Table des matières

1 Stabilité

1.1 Quelques définitions

Soit ϕ une trajectoire particulière d'un *système dynamique*. Un système dynamique peut par exemple être une EDO ou une EDP.

On dira que ϕ est *stable* lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute trajectoire φ dont la distance de l'état initial à ϕ est majorée par δ, on a que la distance de φ à ϕ est majorée par ε pour tout temps.

On dira que ϕ est *asymptotiquement stable* lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute trajectoire φ dont la distance de l'état initial à ϕ est majorée par δ, on a que la distance de $\varphi(t)$ à $\phi(t)$ tend vers 0 lorsque le t tend vers l'infini.

La trajectoire ϕ à laquelle on s'intéresse peut aussi bien être un *équilibre*, c'est-à-dire être un point fixe pour le système dynamique, que ne pas l'être.

1.2 Stabilité d'un équilibre pour un système différentiel autonome

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et supposons qu'on dispose d'un système régi par une EDO autonome sur H. Une telle EDO est de la forme suivante :

$$\partial_t \psi = F(\psi)$$

où $F : H \to H$ est une fonction de classe C^1.

On s'intéresse à la stabilité d'un équilibre ϕ.

1.2.1 Etude de la stabilité grâce à une fonctionnelle de Lyapunov

Soit $U \subseteq H$ un voisinnage ouvert de ϕ. On dit que $\mathcal{E} : U \to \mathbb{K}$ de classe C^2 est une *fonctionnelle de Lyapunov* associée à l'EDO étudiée et à l'équilibre ϕ lorsque ϕ réalise un minimum local de $\mathcal{E}$, la différentielle seconde de $\mathcal{E}$ en ϕ est strictement positive et $\forall \varphi \in U\ \nabla\mathcal{E}(\varphi) \cdot F(\varphi) \leq 0$ (décroissance de $\mathcal{E}$ le long des orbites). Il est un résultat classique que l'existence d'une telle fonctionnelle de Lyapunov assure la stabilité de ϕ.

1.3 Stabilité orbitale d'une solution d'une EDP

A partir de maintenant, la difficulté croît dans deux directions :

- la solution dont on veut étudier la stabilité n'est plus forcément un équilibre (dans le sens d'être une solution constante en temps).
- le système dynamique est régi par une EDP et non simplement une EDO. F est alors remplacé par un opérateur différentiel sur H (qui n'est plus à valeurs dans H mais dans un espace plus grand), et dans la plupart des cas, H sera un espace de Sobolev H^1 ou H^2.

Notons que dans le cas où la difficulté ne croît que dans une des deux directions, il n'y a rien de plus simple à dire que la méthode proposée ci-dessous.

Considérons une EDP dispersive et soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to H$ une solution de cette EDP dont on veut étudier la stabilité.

Dans ce cas, on ne dispose pas de méthode simple pour étudier la stabilité de la solution considérée. Il existe quand même une façon de s'en sortir, mais pour cela on a besoin de modifier la notion de stabilité qu'on utilise (lorsque ϕ n'est pas un équilibre).

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur H telle que l'orbite de ϕ est incluse dans une seule classe d'équivalence. On va décrire une méthode qui peut permettre de montrer la stabilité de la classe d'équivalence $\mathcal{G}$ qui contient l'orbite de ϕ. Attention : si $\mathcal{G}$ est strictement plus grande que l'orbite de ϕ, alors $\mathcal{G}$ doit correspondre à une classe d'objets de même type que les éléments de l'orbite de ϕ (dans la plupart des cas $\mathcal{G}$ sera l'orbite de ϕ à translation près), c'est seulement dans ce cas que remplacer ϕ par $\mathcal{G}$ a un intérêt. Soit $\mathcal{H} := H/\sim$, muni de la distance quotient. Attention : $\mathcal{H}$ n'est plus nécessairement un espace vectoriel car on n'a pas quotienté H par un sous-espace. On choisit ensuite ce qu'on va, par analogie avec le cas précédent, appeler une *fonctionnelle de Lyapunov* $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ adaptée à l'EDP en question, à $\sim$ et à $\mathcal{G}$. Contrairement au cas précédent, on veillera à ce que $\mathcal{E}$ soit une quantité conservée pour une solution (et non une quantité décroissante pour une solution), ce qui est une hypothèse plus forte. On voudra aussi demander que $\mathcal{G}$ soit un point critique de $\mathcal{E}$, et on aimerait aussi que sa différentielle seconde soit strictement positive. Toutefois, elle sera souvent strictement positive modulo certaines directions (en nombre limité). Ceci sera suffisant car on travaille sur un espace-quotient, et donc on pourra éviter les mauvaises directions pour passer d'une classe d'équivalence à une autre, sans pour autant trop s'éloigner du chemin optimal entre deux classes d'équivalences. Ensuite, il faut encore montrer la stabilité de $\mathcal{G}$, car contrairement au cas précédent ce n'est plus garanti. L'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov facilite grandement la preuve de ce dernier fait.

La notion de stabilité de ϕ qu'on établit de cette manière là s'appelle la *stabilité orbitale* : c'est la stabilité à une classe d'équivalence près.

2 EDP dispersives en jeu

Les EDP dispersives représentant toute une classe d'EDP. On s'intéressera ici à deux d'entre elles. Elles sont représentatives de la classe considérée.

2.1 Schrödinger non linéaire

Cette équation apparaît dans plusieurs domaines de la physique : propagation d'ondes, optique non-linéaire, modèles de lasers, modèles de plasma... Notamment, en dimension 1, cette équation peut modéliser l'enveloppe une vague de surface se propageant en eau profonde [11].

Pour $d \geq 1$, $p > 1$ et $\epsilon = \pm 1$,

$$(NLS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \epsilon u|u|^{p-1} = 0, & (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^d,\ u(t,x) \in \mathbb{C} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

L'équation est dite *focalisante* lorsque $\epsilon = +1$, *défocalisante* lorsque $\epsilon = -1$.

2.1.1 Symétries

Scaling Soit $u(t)$ une solution de (NLS), alors pour $\lambda > 0$, $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est encore une solution de (NLS). On note s_c et on appelle *scaling critique* l'exposant tel que la symétrie par scaling laisse invariante la norme $\dot{H}^{s_c}$. On trouve que

$$s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$$

On dira que (NLS) est $\dot{H}^{s_c}$-critique. Si $s > s_c$, on dira que (NLS) est $\dot{H}^s$-sous-critique.

Translation, déphasage Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, pour $u(t)$ une solution de (NLS), $u(t, x+x_0)$ et $u(t,x)e^{i\gamma}$ sont encore des solutions de (NLS).

Galilée Pour $u(t)$ une solution de (NLS) et pour $\beta \in \mathbb{R}^d$, $u(t, x - 2\beta t)e^{i\beta\cdot(x-\beta t)}$ est encore une solution de (NLS).

2.1.2 Intégrales conservées

Les quantités suivantes sont conservées au cours du temps par une solution de (NLS). Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

— La masse $M[u] := \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx$

— L'énergie $E[u] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx - \frac{\epsilon}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} dx$

2.1.3 Problème de Cauchy (cf. [2])

On dispose de résultats pour résoudre le problème de Cauchy pour (NLS) dans le cas d'une donnée initiale dans H^1.

Dans le cas $\dot{H}^1$-sous-critique ($1 < p < \frac{d+2}{d-2}$), le problème de Cauchy pour (NLS) admet une solution locale dans $C([0, T[, H^1(\mathbb{R}^d))$. Cette solution est globale dans le cas d'une non-linéarité défocalisante.

Dans le cas L^2-sous-critique ($1 < p < 1 + \frac{4}{d}$), le problème de Cauchy pour (NLS) admet une solution globale dans $C_b(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d))$. Pour passer de l'existence locale à l'existence globale, on utilise les intégrales conservées. Pour la suite, on va choisir de se placer dans une situation où le problème de Cauchy est globalement bien posé.

2.1.4 Résultat de scattering pour (NLS) défocalisant (cf. [2])

Si $\epsilon = -1$, on dispose d'un résultat qui dit qu'une solution de (NLS) tend en norme L^2 lorsque $t \to +\infty$ vers une solution du problème linéaire correspondant.

Ainsi, dans le cas défocalisant, le comportement des solutions en temps long est le même que celui des solutions du problème linéaire.

C'est pourquoi, dans la suite, on se placera dans le cas de (NLS) focalisant L^2-sous-critique.

2.2 Equation de Korteweg-de Vries généralisée

Cette équation peut modéliser plusieurs phénomènes physiques. Notamment, elle peut modéliser l'enveloppe d'une vague de surface se propageant en eau peu profonde.

On donne ici l'équation de Korteweg-de Vries généralisée, pour $p \geq 2$

$$(gKdV) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^p) = 0 & (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R},\ u(t, x) \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \end{cases}$$

C'est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) si $p = 2$. Si $p = 3$, c'est l'équation de Korteweg-de Vries modifiée $(mKdV)$. Ces deux équations sont intégrables, ce qui n'est pas le cas pour $(gKdV)$, c'est la raison pour laquelle il y a plus d'intégrales conservées pour (KdV) et $(mKdV)$, et donc plus de résultats démontrés.

2.2.1 Symétries (cf. [3])

Scaling Soit $u(t)$ une solution de $(gKdV)$, alors pour $\lambda > 0$, $u_\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{p-1}}} u(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda})$ est encore une solution de $(gKdV)$. On reprenant les définitons données pour (NLS), ici on a

$$s_c = \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$$

Ainsi, $(gKdV)$ est L^2-sous-critique pour $p < 5$.

Translations Soit $u(t)$ une solution de $(gKdV)$, alors pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $u(t, x + x_0)$ est encore une solution de $(gKdV)$. On a aussi que $u(-t, -x)$ est une solution de $(gKdV)$.

2.2.2 Intégrales conservées (cf. [4])

Les quantités suivantes sont conservées au cours du temps par une solution de $(gKdV)$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$.

— La masse $M[u] := \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$

— L'énergie $E[u] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx$

Pour $p = 2, 3$, on peut trouver encore une infinité d'intégrales conservées.

2.2.3 Problème de Cauchy (cf. [4], [13], [14], [15])

Si donnée initiale est dans H^1, dans le cas L^2-sous-critique, on dispose d'un résultat d'existence locale pour le problème de Cauchy pour $(gKdV)$ (ce résultat peut aussi être établi pour une donnée initiale dans H^s pour certains $s < 1$ qui dépendent de p). Ce résultat d'existence locale peut être amélioré en un résultat d'existence globale avec une solution dans $C_b(\mathbb{R}_+, H^1)$, grâce aux intégrales conservées. Notons que si la donnée intiale est dans H^s avec $s > 1$, alors la solution est dans $C_b(\mathbb{R}_+, H^s)$: la régularité de la donnée initiale se transmet à toute la solution. La condition, pour l'existence globale, de régularité H^1 pour la donnée initiale peut néanmoins être améliorée pour (KdV) et $(mKdV)$ en utilisant des techniques plus compliquées présentées dans [13], [14] et [15]. Par exemple, pour (KdV), le problème de Cauchy est globalement bien posé pour une donnée initiale dans $H^{-3/4}$. Pour $(mKdV)$, le problème de Cauchy est globalement bien posé pour une donnée initiale dans $H^{1/4}$.

3 Le soliton

3.1 Etat fondamental

L'état fondamental apparaîtra dans la définition du soliton. Pour $d \geq 1$ et $p > 1$ tel que l'on soit dans le cas $\dot{H}^1$-sous-critique, l'équation de l'état fondamental est la suivante :

$$(GS) \left\{ \Delta Q - Q + Q^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \, Q(x) \geq 0 \right.$$

Dans l'ouvrage de Tao [3], on peut trouver les démonstrations des résultats suivants :

Proposition 1. *Il existe une solution non triviale $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de (GS). En plus, Q est strictement positive, régulière, exponentiellement décroissante, ainsi que ses dérivées.*

Proposition 2. *Il existe une unique solution de (GS) non identiquement nulle, dans H^1 et radiale.*

Théorème 3. *Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ une solution de (GS). Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $Q(\cdot - x_0)$ soit à symétrie radiale.*

Tout ceci nous permet de parler de l'unique *état fondamental* Q associé aux paramètres d et p. Il est défini aux symétries des équations considérées près.

Remarque 4. En dimension 1, on peut obtenir l'expression explicite de la solution de l'équation (GS) :

$$Q(x) = \left(\frac{p+1}{2\cosh^2((\frac{p-1}{2})x)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Remarque 5. Si $s_c < 1$ (cas $\dot{H}^1$-sous-critique), on peut montrer que $E[Q] < 0$ si $s_c < 0$, $E[Q] = 0$ si $s_c = 0$ et $E[Q] > 0$ si $s_c > 0$.

3.2 Définition

Les définitions qu'on va donner sont valables aux symétries des équations considérées près.

3.2.1 Pour $(gKdV)$

Définition 6. On appelle *soliton* une solution de $(gKdV)$ de la forme $u(t,x) = R(x-ct)$ où $R \in H^1$ est positive, paire.

Remarque 7. Sans perte de généralité dans les raisonnements qui suivent, on peut supposer que la *vitesse de propagation* c vaut 1. On trouve alors que R vérifie l'équation (GS). Ce qui détermine $R = Q$ en tant qu'état fondamental.

3.2.2 Pour (NLS) focalisant

Définition 8. On appelle *soliton* une solution de (NLS) focalisant de la forme $u(t,x) = R(x)e^{it}$ où $R \in H^1$ positive, radiale.

Remarque 9. On trouve alors que R vérifie l'équation (GS). Ce qui détermine $R = Q$ en tant qu'état fondamental.

3.3 La bonne notion de stabilité : la stabilité orbitale H^1

La notion de stabilité H^1 pour le soliton de (NLS) focalisant la plus simple pourrait être :

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) > 0 \, \forall u_0 \in H^1, \, \|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t>0} \|u(t,x) - Q(x)e^{it}\|_{H^1} < \epsilon$$

Toutefois, une telle notion de stabilité est fausse, car la symétrie par scaling fournit une direction d'instabilité. En effet, en posant $u(t,x) = Q(x)e^{it}$, u_λ lorsque $\lambda \to 1$ fournit un contre-exemple.

C'est pourquoi on s'intéresse à une stabilité un peu moins forte : la stabilité modulo les symétries de translation et de phase de l'équation, dite *stabilité orbitale* H^1. L'énoncé suivant est vrai :

Théorème 10. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que pour $u_0 \in H^1$ tel que $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta(\epsilon)$, il existe des fonctions $x_0(t) \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}$ telles que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour (NLS) focalisant L^2-sous-critique vérifie*

$$\sup_{t>0} \|u(t, \cdot + x_0(t))e^{i\gamma(t)} - Q\|_{H^1} < \epsilon$$

Remarque 11. La condition L^2-sous-critique est optimale. En effet, on peut trouver dans [2] un résultat d'explosion en temps fini pour $s_c \geq 0$, ce résultat se prouve grâce aux *identités du viriel* : une solution suffisament régulière d'énergie strictement négative explose en temps fini. Cela montre que la stabilité orbitale de Q ne peut être vérifiée pour $s_c = 0$. En effet, si $s_c = 0$, $E[Q] = 0$ et on peut trouver une solution d'énergie strictement négative aussi proche que l'on veut de Q.

Remarque 12. Pour $(gKdV)$ L^2-sous-critique, le même résultat de stabilité orbitale H^1 est vrai mais en enlevant le paramètre $\gamma(t)$ de déphasage. Ce qui fait que c'est la stabilité modulo une translation en espace. Attention : la stabilité orbitale est toujours soumise à la condition L^2-sous-critique.

Une preuve de ce théorème est présentée dans [5]. Donnons les idées phares de cette preuve, en suivant la méthode qu'on a donnée dans la section 1.3. La relation d'équivalence à introduire ici est à l'évidence la suivante : on identifie deux fonctions de H^1 lorsque l'une s'obtient à partir de l'autre par translation et déphasage. On introduit la fonctionnelle de Lyapunov $H[u] := M[u] + E[u]$, invariante par translation et déphasage, conservée par toute solution. La preuve consiste d'abord à montrer que Q est un point critique pour H. On fait aussi une étude spectrale de la différentielle seconde de H en Q : celle-ci n'est pas strictement positive, mais est strictement positive modulo certaines directions. La surprise dans cette preuve est qu'on peut éviter les directions négatives tout simplement en considérant la plus petite différence en distance entre deux classes d'équivalence. On arrive à établir la stabilité orbitale de Q à partir de ce travail.

3.4 Stabilité asymptotique H^1

3.4.1 La stabilité asymptotique forte est fausse

On peut se demander si en plus de la stabilité orbitale, on dispose d'un résultat de stabilité asymptotique : c'est-à-dire d'un résultat de convergence d'une solution vers le soliton (aux symétries de translation-déphasage de l'équation près). Plaçons-nous dans le cadre de $(gKdV)$ L^2-sous-critique.

Notons Q_c, pour $c > 0$, l'état fondamental associé au soliton de vitesse c. On a $Q = Q_1$ et $Q_c(x) = \sqrt{c}Q(\sqrt{c}x)$. La première notion de stabilité asymptotique (inspirée par la notion de stabilité orbitale donnée ci-dessus) qui nous vient à l'esprit est la suivante :

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \alpha$, il existe une fonction $x(t) \in \mathbb{R}$ telle que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour $(gKdV)$ L^2-sous-critique d'état initial u_0 vérifie :

$$\|u(t, \cdot + x(t)) - Q\|_{H^1} \to_{t\to+\infty} 0$$

On peut aisément se convaincre du fait que cette affirmation là est fausse : en effet, si une solution (même avec translation variable) converge en norme H^1 vers Q, alors sa masse et son énergie convergent vers $M[Q]$ et $E[Q]$. Or, la masse et l'énergie d'une solution sont constantes au cours du temps et on peut prendre un état initial u_0 aussi proche qu'on veut de Q en norme H^1 tel que $(M[u_0], E[u_0]) \neq (M[Q], E[Q])$: l'énoncé précédent ne peut donc pas être vérifié pour une solution de cet état initial là u_0.

Remarque 13. Comme on a parlé de deux intégrales conservées, et le paramètre c de Q_c est déterminé par $M[Q_c]$, on peut de la même manière se convaincre que l'énoncé suivant est faux :

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \alpha$, il existe une fonction $x(t) \in \mathbb{R}$ et $c_{+\infty} > 0$ tels que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour $(gKdV)$ L^2-sous-critique d'état initial u_0 vérifie :

$$\|u(t, \cdot + x(t)) - Q_{c_{+\infty}}\|_{H^1} \to_{t\to+\infty} 0$$

Il n'y a donc pas de convergence forte en norme H^1 vers un soliton pour une solution de $(gKdV)$ L^2-sous-critique.

3.4.2 Stabilité asymptotique faible

On peut trouver dans [7] la démonstration du résultat suivant :

Théorème 14. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \alpha$, il existe une fonction $x(t) \in \mathbb{R}$ et $c_{+\infty} > 0$ tels que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour $(gKdV)$ L^2-sous-critique d'état initial u_0 vérifie :*

$$u(t, \cdot + x(t)) \rightharpoonup Q_{c_{+\infty}} \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}) \text{ quand } t \to +\infty$$

Remarque 15. Il existe aussi des résultats de stabilité asymptotique pour (NLS). Un exemple est présenté dans [16].

3.5 Amélioration possible

L'énoncé sur la stabilité orbitale H^1 peut être amélioré en un énoncé sur la stabilité orbitale L^2. Dans [9], une telle amélioration est présentée dans le cas de l'équation (KdV). On rappelle que le problème de Cauchy pour (KdV) est globalement bien posé dans L^2, mais dans ce cas, on n'a que la masse comme intégrale conservée, car on ne peut pas définir l'énergie pour cette régularité là. On a les énoncés suivants, qui impliquent en fait les résultats de stabilité H^1 :

Théorème 16. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2$ tel que $\|u_0 - Q\|_{L^2} < \delta(\epsilon)$, il existe une fonction $x(t) \in \mathbb{R}$ telle que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour (KdV) vérifie*

$$\sup_{t>0} \|u(t, \cdot + x(t)) - Q\|_{L^2} < \epsilon$$

Théorème 17. *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0 - Q\|_{L^2} < \alpha$, il existe une fonction $x(t) \in \mathbb{R}$ et $c_{+\infty} > 0$ tels que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour (KdV) vérifie*

$$u(t, \cdot + x(t)) \to Q_{c_{+\infty}} \quad \text{dans } L^2_{loc}$$

4 Le breather

Pour travailler avec les breathers, le cadre général de $(gKdV)$ ne nous suffira plus, il nous faudra plus d'intégrales conservées. On peut donc se placer dans le cadre de l'équation de Korteweg-de Vries modifiée $(mKdV)$, définie ci-dessus.

Un breather correspond à une enveloppe localisée à décroissance exponentielle qui se propage à une vitesse constante et à l'intérieur de laquelle évolue une fonction de période $T > 0$ en temps. C'est donc une sorte de fonction périodique qui se propage (cf. Remarque 20). On peut dire informellement que lorsque $T \to 0$, un breather tend vers un soliton.

4.1 Définitions

— Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, un *breather* de $(mKdV)$ est donné par

$$B_{\alpha,\beta}(t,x) := 2\sqrt{2}\partial_x[\arctan(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha(x+\delta t))}{\cosh(\beta(x+\gamma t))})]$$

où $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$.

— Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} B_{\alpha,\beta}(t, x; x_1, x_2) &:= B_{\alpha,\beta}(t - t_0, x - x_0) \\ &= 2\sqrt{2}\partial_x[\arctan(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)})] \end{aligned}$$

avec $y_1 := x + \delta t + x_1$, $y_2 := x + \gamma t + x_2$, $t_0 := \frac{x_1 - x_2}{2(\alpha^2+\beta^2)}$ et $x_0 := \frac{\delta x_2 - \gamma x_1}{2(\alpha^2+\beta^2)}$.

Fait 18. *On peut vérifier par calcul que pour $\alpha, \beta > 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $B_{\alpha,\beta}(\cdot; x_1, x_2)$ est une solution de $(mKdV)$.*

Remarque 19. Les paramètres α, β sont dits *paramètres d'échelle*. Les paramètres x_1, x_2 sont des paramètres de translation en espace et en temps. On peut montrer que le paramètre γ correspond à la *vitesse* de propagation du breather.

Remarque 20. Un breather vérifie la relation de périodicité en temps suivante. Soit $T = \frac{2\pi}{\alpha(\gamma-\delta)} > 0$ et on dispose de $L = L(T) \in \mathbb{R}$ tel que

$$B_{\alpha,\beta}(t + T, x) = B_{\alpha,\beta}(t, x - L)$$

Dans ce cas, on montre que $\gamma = -\frac{L}{T}$, ce qui correspond bien à la vitesse de l'enveloppe à décroissance exponentielle.

4.2 Stabilité orbitale H^2

Pour les breathers de $(mKdV)$, la notion de stabilité orbitale convient toujours.

Théorème 21. *Soit $\alpha, \beta > 0$. On dispose de paramètres η_0, A_0 tels que la proposition suivante est vérifiée. Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\eta \in]0, \eta_0[$ tel que*

$$\|u_0 - B_{\alpha,\beta}(0; 0, 0)\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq \eta$$

Alors il existe des fonctions $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ telles que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour $(mKdV)$ avec donnée initiale u_0 vérifie

$$\sup_{t>0} \|u(t) - B_{\alpha,\beta}(t; x_1(t), x_2(t))\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq A_0\eta$$

Pour prouver ce résultat, on aura besoin d'établir une troisième quantité conservée pour les solutions de $(mKdV)$. C'est la raison pour laquelle cette preuve ne marche que dans le cadre de $(mKdV)$, se fait naturellement dans le cadre H^2 et ne s'adapte pas pour $(gKdV)$ pour laquelle on ne peut pas trouver de telle quantité conservée. Cette quantité conservée est la suivante : soit $u \in H^2(\mathbb{R})$

$$F[u] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} u^6 dx$$

Une preuve de ce théorème est présentée dans [6]. Donnons les idées phares de cette preuve, en suivant la méthode qu'on a donnée dans la section 1.3. La relation d'équivalence à introduire ici est à l'évidence la suivante : on identifie deux fonctions de H^2 lorsque l'une s'obtient à partir de l'autre par translation ou lorsqu'elles appartiennent à une même orbite de $(mKdV)$. On introduit la fonctionnelle de Lyapunov $H[u] := F[u] + 2(\beta^2 - \alpha^2)E[u] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 M[u]$, invariante par translation, conservée par toute solution. La preuve consiste d'abord à montrer que $B = B_{\alpha,\beta}$ est un point critique pour H. On fait aussi une étude spectrale de la différentielle seconde de H en B : celle-ci n'est pas strictement positive, mais est strictement positive modulo certaines directions ; on peut éviter ces directions vu qu'on travaille dans un espace-quotient. On arrive à établir la stabilité orbitale de B à partir de ce travail. Chacune de ces étapes demande un travail conséquent.

4.3 Stabilité asymptotique H^2

On peut trouver dans [9] une preuve d'un résultat de stabilité asymptotique faible pour les breathers de $(mKdV)$, similaire à celui qu'on a énoncé pour les solitons de $(gKdV)$ plus haut.

4.4 Amélioration possible

Dans [10], on peut voir que l'énoncé de stabilité orbitale H^2 pour les breathers de $(mKdV)$ peut être amélioré en un énoncé de stabilité H^1.

5 Le soliton de Peregrine

5.1 Définition

Le soliton de Peregrine est une solution de (NLS) focalisant pour $d = 1$ et $p = 3$ d'expression

$$u(t,x) = [1 - \frac{4(1+2it)}{1+8x^2+4t^2}]e^{it}$$

Remarque 22. Cette solution ne peut pas être vue comme un élément de $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$, elle n'est pas intégrable en espace. Il faudra donc l'aborder un peu differement que les objets précédents pour l'étudier.

Remarque 23. C'est une solution dont le module tend vers 1 lorsque $|x| \to +\infty$. Elle tend (uniformément) en module vers une fonction constante égale à 1 lorsque $|t| \to +\infty$. Elle atteint, en module, des valeurs maximales lorsque $t = 0$. Physiquement, elle peut modéliser le phénomène de *vague scélérate* dans les océans : c'est des vagues qui apparaissent et disparaissent subitement sans laisser de trace et qui ont une amplitude anormalement élevée (cf. [12]).

5.2 Stabilité du soliton de Peregrine ?

Le soliton de Peregrine a déjà pu être observé expérimentalement dans les années 2010 : il a été observé en optique, en hydrodynamique (cf. [17], [18]) et dans la physique des plasmas. On rappelle que ces trois domaines de la physique peuvent être modélisées par (NLS). Le fait que l'on peut observer cet objet en pratique suggère le fait qu'il est stable. Chercher à trouver la bonne notion de stabilité pour cet objet et l'établir est donc raisonnable.

Il n'est pas clair à première vue comment énoncer une notion de stabilité orbitale pour cet objet. Pour l'instant, on ne dispose pas d'une notion de stabilité adéquate pour le soliton de Peregrine. La recherche de cette notion sera l'objectif de ma thèse.

Références

[1] A. Semenov, *Mémoire de M2 : Problèmes de stabilité des solitons et des breathers*, sept 2018

[2] Raphaël Danchin et Pierre Raphaël, *SOLITONS, DISPERSION ET EXPLOSION, Une introduction à l'étude des ondes non linéaires*, 2015

[3] Terence Tao, *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*, AMS, 2006

[4] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce and Luis Vega, *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLVI, 527-620, 1993

[5] Michael I. Weinstein, *Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Evolution Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 51-68, 1986

[6] Miguel A. Alejo and Claudio Muñoz, *Nonlinear stability of mKdV breathers*, février 2012

[7] Yvan Martel et Frank Merle, *Asymptotic Stability of Solitons for Subcritical Generalized KdV Equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 157, 219-254, 2001

[8] Juan Wang, Lixin Tian, Yingnan Zhang, *Orbital stability and asymptotic stability of mKdV breather-type soliton solutions*, 2016

[9] F. Merle et L. Vega, *L^2 Stability of Solitons for KdV Equation*, Int. Math. Res. Not., no. 13, 735-753, 2003

[10] Claudio Muñoz, *Stability of integrable and nonintegrable structures*, course at IMPA (Brazil), 2015

[11] V. E. Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, Vol. 9, No. 2, pp. 86-94, 1968

[12] K. Dysthe, H. E. Krogstad, P. Müller, *Oceanic rogue waves*, Annual Review of Fluid Mechanics, 40, 287-310, 2008

[13] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp Global Well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$*, J. Amer. Math. Soc. 16, 705-749, 2003

[14] Z. Guo, *Global Well-Posedness of Korteweg-de Vries Equation in $H^{-3/4}(\mathbb{R})$*, J. Math. Pures Appl. 91, 583-597, 2009

[15] A. Grünrock, M. Panthee, and J. D. Silva, *A remark on global well-posedness below L^2 for the GKDV-3 equation*, Differential Integral Equations 20, 1229-1236, 2007

[16] Scipio Cuccagna, Tetsu Mizumachi, *On Asymptotic Stability in Energy Space of Ground States for Nonlinear Schrödinger Equations*, Commun. Math. Phys. 287, 51-77, 2008

[17] A. Chabchoub, N.P. Hoffmann et N. Akhmediev, *Rogue wave observation in a water wave tank*, Phys. Rev. Lett., 2011

[18] M. Onorato, D. Proment, G. Clauss et M. Clauss, *Rogue Waves : From Nonlinear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test*, Plos One, vol. 8, 2013