TD11 : Groupe symplectique, groupe orthogonal, groupe unitaire.

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

a) Montrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

b) Soit q une forme quadratique définie positive sur E. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{O}(E,q)$, il existe une base orthonormée e de E, des entiers positifs r, s, t tels que $n = r + s + 2t$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tels que

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_t} \end{pmatrix},$$

où R_θ désigne la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

c) En déduire que sous les hypothèses précédentes, $\mathrm{SO}(E,q)$ est connexe par arcs.

Exercice 2 : $\star\star$
Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, de caractéristique différente de 2. Soient $n \geq 1$, $b \in \mathbb{F}_q$ et $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times \backslash \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Notons $S(2n,b)$, $S(2n+1,b)$ et $S_\varepsilon(2n,b)$ les nombres respectifs de solutions des équations

$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 = b, \tag{1}$$
$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 + x_{n+1}^2 = b, \tag{2}$$
$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - \varepsilon y_n^2 = b. \tag{3}$$

a) Montrer

$$S(2n,b) = \begin{cases} q^{2n-1} + q^n - q^{n-1} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n-1} - q^{n-1} & \text{si } b \neq 0; \end{cases}$$

$$S(2n+1,b) = \begin{cases} q^{2n} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n} - q^n & \text{si } b \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}; \\ q^{2n} + q^n & \text{si } b \in \mathbb{F}_q^{\times 2}; \end{cases}$$

$$S_\varepsilon(2n,b) = \begin{cases} q^{2n-1} - q^n + q^{n-1} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n-1} + q^{n-1} & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

b) En déduire

$$|\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1),$$

$$|\mathrm{O}_{2n}^+(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n(n-1)}(q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1),$$

$$|\mathrm{O}_{2n}^-(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1).$$

Exercice 3 : $\star\star$
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni de la forme quadratique définie positive $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{SO}(V, f)$ est simple. Soit N un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{SO}(V, f)$.

a) Montrer que si N contient un renversement, alors $N = \mathrm{SO}(V, f)$.

b) Soit N_0 la composante connexe de l'identité de N. Montrer que N_0 est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(V, f)$.

c) Montrer que $N = \{\mathrm{id}\}$ si et seulement si $N_0 = \{\mathrm{id}\}$.

d) Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : N_0 &\longrightarrow [-1, 1] \\ g &\longmapsto \frac{\mathrm{tr}(g) - 1}{2} \end{aligned}$$

est bien définie et continue.

e) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\varphi(g) \leq 0$.

f) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\varphi(g) = 0$.

g) Conclure.

Exercice 4 : $\star\star$
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 5$ muni de la forme quadratique définie positive $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{PSO}(V, f)$ est simple. Soit $\overline{N}$ un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{PSO}(V, f)$ et soit N le sous-groupe de $\mathrm{SO}(V, f)$ lui correspondant.

a) Montrer que si N contient un renversement, alors $\overline{N} = \mathrm{PSO}(V, f)$.

b) Supposons qu'il existe un sous-espace U de V de dimension 3 tel que $N \cap \mathrm{SO}(U, f|_U) \neq \{\mathrm{id}\}$. Montrer qu'alors $\overline{N} = \mathrm{PSO}(V, f)$.

c) Conclure (on pourra considérer le commutateur d'un élément $r \in N \setminus \{\pm\mathrm{id}\}$ ayant un vecteur fixe non nul avec la composée de deux réflexions bien choisies).

Exercice 5 : $\star\star$
On note $\mathbb{Z}_{(2)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels à dénominateur impair. On note $G = \mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$.

a) Montrer que $G \subset \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_{(2)})$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n := \{A \in G : \exists B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_{(2)}) \,,\, A = I_3 + 2^n B\}$. Montrer que G_n est un sous-groupe distingué de G.

c) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} G_n = \{I_3\}$.

d) Montrer que $G_1 \subsetneqq G$ et que $G_1 \not\subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$.

e) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $G_{n+1} \subsetneqq G_n$.

f) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $G_n \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$.

g) Pour tout $n \geq 2$, montrer que $G_n / G_{n+1} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

h) Montrer que $G/G_1 \cong \mathfrak{S}_3$.

i) Montrer que $G_1/G_2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

j) Comparer la structure de $\mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$ avec celle de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6 : $\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soient $\alpha, \beta \in K^*$. On note $(1, i, j, k)$ la base canonique de K^4, et on note $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ l'unique structure de K-algèbre sur K^4 définie par

$$1 \text{ est le neutre pour la multiplication, } i^2 = \alpha \,,\, j^2 = \beta,\ ij = -ji = k\,.$$

a) Définir la norme réduite $N : \mathbf{H}_{\alpha,\beta} \to K$ et la conjugaison $\mathbf{H}_{\alpha,\beta} \to \mathbf{H}_{\alpha,\beta}$.

b) Montrer que si K est algébriquement clos, alors $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à $\mathrm{Mat}_2(K)$.

c) Montrer que $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division (i.e. un "corps non commutatif") si et seulement si N est une forme anisotrope sur le K-espace vectoriel $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$.

d) Montrer que si $K = \mathbb{F}_q$, alors $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

e) Soient $\alpha', \beta' \in K^*$. Montrer que les K-algèbres $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ et $\mathbf{H}_{\alpha',\beta'}$ sont isomorphes si et seulement si les normes N et N' associées sont des formes quadratiques isométriques.

Exercice 7 : $\star\star\star$
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, $\alpha, \beta \in K^*$. On note $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ (voir l'exercice 6 pour la définition) et $\mathbf{H}^\times := \{x \in \mathbf{H} : N(x) \neq 0\}$.
Pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$ et $x \in \mathbf{H}$, on note $S_q(x) := qxq^{-1}$. On rappelle que l'on dispose de la norme N sur $\mathbf{H}$ qui est une forme quadratique.

a) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$ et tout $x \in \mathbf{H}$, $N(S_q(x)) = N(x)$.

b) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$, $S_{q|_K} = \mathrm{id}_K$ et $S_q(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$, où $\mathbf{P} := \mathrm{vect}(i, j, k) \subset \mathbf{H}$ désigne l'espace des quaternions purs.

c) En déduire un morphisme de groupes $s : \mathbf{H}^\times \to \mathrm{O}(\mathbf{P}, N)$ et montrer que son noyau est K^*.

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{P}^\times := \mathbf{P} \cap \mathbf{H}^\times$, $s(p)$ est le renversement d'axe p. En déduire que $s(\mathbf{H}^\times) = \mathrm{SO}(\mathbf{P}, N)$.

e) En déduire un isomorphisme $\mathbf{H}^\times / K^* \cong \mathrm{SO}(\mathbf{P}, N)$.

f) On suppose $\alpha = \beta = 1$. Montrer que N est une forme isométrique à la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$ sur K^3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(K) \cong \mathrm{SO}_3(K, N)$ et $\mathrm{PSL}_2(K) \cong \Omega_3(K, N) := D(\mathrm{O}_3(K, N))$.

g) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$, il existe $a, b \in \mathbf{H}^\times$ tels que $u(x) = axb$ pour tout $x \in \mathbf{H}$. Montrer en outre que $N(a)N(b) = 1$.

h) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{O}(\mathbf{H}, N) \setminus \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$, il existe $a, b \in \mathbf{H}^\times$ tels que $u(x) = a\overline{x}b$ pour tout $x \in \mathbf{H}$.

i) Notons $U := \{(a, b) \in \mathbf{H}^\times \times \mathbf{H}^\times : N(a) = N(b)\}$. Construire un morphisme de groupes surjectif $S : U \to \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$ et calculer son noyau.

j) On suppose $\alpha = \beta = 1$. Montrer que N est une forme hyperbolique sur $\mathrm{Mat}_2(K)$ et que les groupes $\mathrm{P}\Omega_4(K, N) := \mathrm{P}(\mathrm{D}(\mathrm{O}_4(K, N)))$ et $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$ sont isomorphes.

Exercice 8 : $\star\star\star$
Soient $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique impaire et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{P}\Omega_n^\pm(K)$ le quotient du groupe dérivé de $\mathrm{O}_n^\pm(K)$ par son centre.

a) Déterminer $\mathrm{O}_1(K)$, $\mathrm{SO}_1(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_1(K)$.

b) Montrer que $\mathrm{O}_2^+(K)$ est isomorphe au groupe diédral D_{q-1}. Identifier $\mathrm{SO}_2^+(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_2^+(K)$.

c) En considérant le corps $\mathbb{F}_{q^2}$, montrer que $\mathrm{O}_2^-(K)$ est isomorphe à D_{q+1} et identifier $\mathrm{SO}_2^-(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_2^-(K)$.

d) On suppose $n = 3$. On note V le K-espace vectoriel des matrices 2×2 de trace nulle.

   i) Exhiber une base naturelle de V comme K-espace vectoriel.

   ii) Montrer que $\mathrm{GL}_2(K)$ agit naturellement sur V.

   iii) En déduire un morphisme de groupes $\rho : \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(K)$ que l'on explicitera.

   iv) Montrer que $Ker(\rho) = K^* I_2$.

   v) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_2(K)$, $\det(\rho(A)) = 1$.

   vi) Vérifier que le déterminant définit une forme quadratique non dégénérée sur V.

   vii) En déduire des isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(K) \cong \mathrm{SO}(V, \det) \cong \mathrm{SO}_3(K)$.

   viii) Montrer que l'on a des isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(K) \times \{\pm 1\} \cong \mathrm{O}(V, \det) \cong \mathrm{O}_3(K)$.

ix) Montrer que $\mathrm{P}\Omega_3(K) \cong \mathrm{PSL}_2(K)$.

e) On suppose $n = 4$. On note $W := \mathrm{Mat}_2(K)$, et pour tout $M \in W$, on note $Q(M) := \det(M)$.

i) Montrer que Q est une forme quadratique sur W qui est somme de deux plans hyperboliques.

ii) Montrer que $\mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$ agit naturellement sur W.

iii) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$. Montrer que l'action de (A, B) sur W préserve Q si et seulement si $\det(A) = \det(B)$, et que cette action est triviale si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $A = B = \lambda I_2$.

iv) En déduire un morphisme de groupes injectif $i : ((\mathrm{SL}_2(K) \times \mathrm{SL}_2(K)) \rtimes K^*) / K^* \to \mathrm{O}(W, Q)$, où l'on explicitera le groupe de gauche.

v) Montrer que $\langle \mathrm{Im}\,(i), T \rangle = \mathrm{O}(W, Q)$, où $T : W \to W$ est défini par $T(M) := {}^tM$ et décrire $\mathrm{SO}(W, Q)$.

vi) En déduire que $\mathrm{P}\Omega_4^+(K) \cong \mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$ si $|K| > 3$.

vii) Décrire $\mathrm{P}\Omega_4^+(\mathbb{F}_3)$.

Exercice 9 : $\star\star\star$

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur V.

a) On note $I(q)$ l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $v \otimes v - q(v)$ pour $v \in V$. On pose $C(q) := T(V)/I(q)$. Montrer que $C(q)$ est une K-algèbre, canoniquement isomorphe à $\bigwedge V$ comme K-espace vectoriel, et admettant une décomposition $C(q) = C(q)^+ \oplus C(q)^-$ définie par le degré des éléments de $T(V)$.

b) Vérifier $C(q)^+$ est une sous-algèbre de $C(q)$.

c) Montrer que $\dim_K C(q) = 2^n$ et donner une base de $C(q)$ comme K-espace vectoriel.

d) Montrer que V se plonge naturellement dans $C(q)$.

e) Calculer $C(q)$ lorsque $K = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq 2$. Généraliser au cas où K est quelconque et $\dim_K(V) \leq 1$.

f) Calculer le centre de $C(q)$.

g) On note $\alpha := \mathrm{id}_{C(q)^+} \oplus -\mathrm{id}_{C(q)^-} \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ et pour tout $x \in C(q)^\times$, $\rho_x \in \mathrm{End}_K(C(q))$ défini par $\rho_x : z \mapsto \alpha(x) z x^{-1}$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $\rho : C(q)^\times \to \mathrm{GL}_K(C(q))$.

h) On note $\Gamma(V, q) := \{x \in C(q)^\times : \rho_x(V) \subset V\}$. Montrer que $\Gamma(V, q)$ contient les vecteurs non isotropes de (V, q).

i) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Ker}(\rho) = K^*$.

j) Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ tel que $t_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $t(xy) = t(y)t(x)$ pour tout $x, y \in C(q)$.

k) Pour tout $x \in C(q)$, on pose $\overline{x} := t(\alpha(x))$. Montrer que la formule $N(x) := x\overline{x}$ définit une application $N : C(q) \to C(q)$ induisant un morphisme de groupes $N : \Gamma(V, q) \to K^*$.

l) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\rho) = \mathrm{O}(V, q)$.

m) On suppose q non dégénérée. Montrer que l'on dispose d'un morphisme naturel $\theta : \mathrm{O}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$.

n) On suppose q non dégénérée et isotrope. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjectif.

o) On suppose q non dégénérée. On note $\mathrm{Pin}(V, q) := \mathrm{Ker}(N) = \{g \in \Gamma(V, q) : N(g) = 1\}$ et $\mathrm{Spin}(V, q) := \{g \in \mathrm{Pin}(V, q) : \det(\rho(g)) = 1\}$. Montrer que l'on a des suites exactes de groupes :

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}(V, q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V, q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2$$

et

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Spin}(V, q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(V, q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2 .$$

p) On suppose $K = \mathbb{R}$ et q non dégénérée et non définie. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjective.

q) Montrer les isomorphismes suivants : $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_5(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_6(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, ainsi que $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}_1(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 10 :
On considère $V = \mathbb{F}_2^6$ muni de la forme bilinéaire $x \cdot y = \sum_{i=1}^6 x_i y_i$. On note $x_0 := (1, \dots, 1) \in V$.

a) Donner la définition des groupes $\mathrm{Sp}_n(K)$ lorsque K est un corps de caractéristique 2.

b) Montrer que $W := x_0^\perp / \mathbb{F}_2 x_0$ est naturellement muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

c) En déduire un morphisme naturel $\mathfrak{S}_6 \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

d) Conclure que $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_6$.

Exercice 11 : $\star\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit $m \geq 3$. On munit $V = K^{2m}$ de la forme bilinéaire alternée usuelle B ; on note $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ le groupe symplectique correspondant. Soient $s, t \in \mathrm{Sp}_{2m}(K)$ des involutions.

a) Montrer qu'il existe une décomposition $V = E_+(s) \overset{\perp}{\oplus} E_-(s)$, où $E_+(s)$ et $E_-(s)$ désignent les espaces propres de s associées aux valeurs propres 1 et -1, respectivement.

b) En déduire une bijection entre l'ensemble des involutions de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ et l'ensemble des sous-espaces non dégénérés de V.

On dit que l'involution s est de type $(2r, 2m-2r)$ si l'espace $E_+(s)$ est de dimension $2r$. On parle d'*involution extrémale* pour une involution de type $(2, 2m-2)$ ou $(2m-2, 2)$. Dans ce cas-là, on note $E_2(s)$ l'espace $E_\pm(s)$ de dimension 2.

c) En considérant les familles commutatives maximales d'involutions conjuguées dans $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$, montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ envoie une involution extrémale sur une involution extrémale.

On dit que des involutions extrémales s et t forment un *couple minimal* si on a $\dim(E_2(s) \cap E_2(t)) = 1$. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Sp}_{2m}(K)$ est un ensemble d'involutions extrémales, on note $C(\mathcal{S})$ l'ensemble des involutions extrémales qui commutent à tout élément de $\mathcal{S}$.

d) Montrer que s et t forment un couple minimal si et seulement si ($st \neq ts$ et pour tous $s', t' \in C(C(\{s, t\}))$ avec $s't' \neq t's'$ on a $C(C(\{s, t\})) = C(C(\{s', t'\}))$).

e) Déterminer les ensembles maximaux I d'involutions extrémales tels que toute paire d'éléments de I forme un couple minimal ou commute.

Soit $n \geq 3$. Une application $\phi : K^n \to K^n$ est dite semi-linéaire s'il existe un automorphisme de corps $\theta : K \to K$ tel que ϕ soit θ-linéaire, c'est-à-dire :

- On a $\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$, pour tous $v, v' \in K^n$.
- On a $\phi(\lambda v) = \theta(\lambda)\phi(v)$, pour tout $v' \in K^n$ et tout $\lambda \in K$.

L'ensemble des applications semi-linéaires inversibles forment un groupe, noté $\Gamma\mathrm{L}_n(K)$ et appelé le groupe des transformations semi-linéaires de K^n.
On admet le théorème fondamental de la géométrie projective, qui est l'énoncé suivant : *soit $\phi : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ une bijection telle que trois points A_1, A_2, A_3 de $\mathbb{P}^n(K)$ sont alignés si et seulement si $\phi(A_1), \phi(A_2), \phi(A_3)$ le sont. Alors il existe un automorphisme de corps $\sigma : K \to K$ et une transformation σ-linéaire $\gamma \in \Gamma\mathrm{L}_{n+1}(K)$ telle que ϕ soit induite par γ.*
On définit enfin $\Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ comme le sous-groupe de $\Gamma\mathrm{L}_{2m}(K)$ des éléments préservant la forme B.

f) Montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ est de la forme $x \mapsto axa^{-1}$ pour un certain élément $a \in \Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(K)$.

Exercice 12 :
Déterminer les groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques en dimension 1 et 2.

Exercice 13 : $\star\star\star$
Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. Soit b la forme sur $(\mathbb{F}_{q^2})^3 \times (\mathbb{F}_{q^2})^3$ définie par $b(u,v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$

a) Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ ?

b) Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$. On définit aussi les éléments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ correspondant respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$$

avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$. Déterminer le stabilisateur de e_1 dans $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ et montrer que $T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$ en est un sous-groupe distingué.

c) Montrer que l'action de $\mathrm{PSU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ sur Δ est 2-transitive.

d) Calculer le sous-groupe dérivé T_{e_1} de T.

e) On appelle transvection unitaire de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$ toute transvection de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$ préservant la forme b. Montrer que $u \in \mathrm{U}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est une transvection unitaire si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$ vérifiant $\alpha + \alpha^q = 0$ et $a \in (\mathbb{F}_{q^2})^3$ isotrope tels que pour tout $x \in (\mathbb{F}_{q^2})^3$, on ait $u(x) = x + \alpha b(a,x)a$ (on dit que u est une transvection unitaire de vecteur a).

f) Pour tout vecteur isotrope a, montrer que l'ensemble T_a des transvections unitaires de vecteur a forme un sous-groupe abélien distingué dans le stabilisateur de a sous $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$.

g) Montrer que toute transvection unitaire est un commutateur dans $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$.

h) Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ engendré par les transvections unitaires agit transitivement sur $\{x \in (\mathbb{F}_{q^2})^3 : b(x,x) = 1\}$.

i) Montrer que $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est engendré par les transvections unitaires.

j) Montrer que $\mathrm{PSU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est un groupe simple.

Exercice 14 : $\star\star\star$
Soient p un nombre premier impair, $r \geq 1$ et $q = p^r$.

a) On note $V_1, V_2 := (\mathbb{F}_{q^2})^2$, et (e_i, f_i) la base canonique de V_i. On munit $V := V_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} V_2$ de la forme bilinéaire symétrique b définie par $b(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') := b_1(v_1, v_1') b_2(v_2, v_2')$, où b_i est la forme bilinéaire alternée sur V_i telle que $b_i((1,0),(0,1)) = 1$. On pose enfin

$$V' := \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_p}\{e_1 \otimes e_2, f_1 \otimes f_2, \lambda e_1 \otimes f_2 + \overline{\lambda} f_1 \otimes e_2 : \lambda \in \mathbb{F}_{q^2}\} \subset V\,.$$

i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p} V' = 4$.

ii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(V', b)$.

iii) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_4^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$.

b) On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{F}_q^4$ et on note $W := \bigwedge^2(\mathbb{F}_q^4)$.

i) Quelle est la dimension de W comme $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel ?

ii) Montrer que W est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle f telle que pour tout $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma)$, avec par convention $\varepsilon(\sigma) = 0$ si σ n'est pas bijective.

iii) Montrer que $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$ agit naturellement sur W.

iv) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{O}(W, f)$.

v) En déduire un isomorphisme $\mathrm{P}\Omega_6^+(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_q)$.

c) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée pour la forme sesquilinéaire naturelle sur $X := (\mathbb{F}_{q^2})^4$, et $X' \subset \bigwedge^2 X$ le sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ et $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$.

i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_q} X' = 6$.

ii) Montrer que X' est muni d'une forme bilinéaire symétrique f telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_{q^2}$,

$$f(\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}, \mu e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\mu} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \lambda\overline{\mu} + \overline{\lambda}\mu\,.$$

iii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(X', f)$.

iv) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_6^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$.