TD12 : Représentations des groupes finis II

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi|_H$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi|_H$ est un caractère irréductible ?

Solution de l'exercice 1.

a) C'est évident : pour tout $h \in H$, on a $\chi_{\pi_{|H}}(h) := \mathrm{tr}(\pi_{|H}(h)) = \mathrm{tr}(\pi(h)) = \chi(h) = \chi_{|H}(h)$.

b) Non : si G est un groupe fini non abélien, $H = \{1\}$ le sous-groupe trivial de G et π une représentation complexe irréductible de G de dimension ≥ 2 (une telle représentation existe), alors toute droite de π est un sous-espace strict non nul de π stable par H, donc $\chi_{|H}$ n'est pas irréductible.

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W := \mathrm{Ind}_H^G(\pi) := \{f : G \to V \mid \forall x \in G\ \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h)f(x)\},$$

avec action de G donnée par $g(f) : x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, est-ce que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation irréductible de G ?

Solution de l'exercice 2.

a) On vérifie facilement les points suivants :
— l'ensemble $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est un sous-espace vectoriel de V^G.
— la formule $(g, f) \mapsto g(f)$ définit une action de groupe linéaire de G sur $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$.
— pour tout $g \in G$ et $f \in \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$, $f(g) \in \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$: en effet, pour tout $h \in H$ et $x \in G$, on a

$$f(g)(hx) = f(h(xg)) = \pi(h)f(xg) = \pi(h)f(g)(x)\,.$$

Ces trois points assurent que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est naturellement une représentation de G.
En outre, si $R \subset G$ désigne un ensemble de représentants de G modulo H, l'application $\mathrm{Ind}_H^G(\pi) \to V^R$ définie par $f \mapsto f_{|R}$ est une application linéaire, et c'est un isomorphisme par définition de $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$: un élément de $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est entièrement déterminé par l'image des éléments de R. Cela assure que $\dim\left(\mathrm{Ind}_H^G(\pi)\right) = |R| \dim(V)$, i.e.

$$\dim\left(\mathrm{Ind}_H^G(\pi)\right) = [G : H] \dim V\,.$$

b) Non : pour avoir un contre-exemple, on s'inspire de l'exercice 3 suivant. On considère un groupe G non trivial et $H = \{1\}$ le sous-groupe trivial. La représentation trivial de H, notée triv, est irréductible. Alors l'exercice 3 assure que $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{triv}) \simeq K[G]$, où $K[G]$ désigne la représentation régulière de G. Or on sait que cette dernière est irréductible si et seulement si $|G| = 1$, ce que l'on a exclut.

Exercice 3 :
Soit G un groupe fini ; notons triv la représentation triviale du sous-groupe $\{e_G\}$ de G. Déterminer la représentation $\mathrm{Ind}_{\{e_G\}}^G(\mathrm{triv})$.

Solution de l'exercice 3. Par définition, on a

$$\mathrm{Ind}_{\{e\}}^G(\mathrm{triv}) = \{f : V \to G\} = V^G\,,$$

avec l'action de G définie par $g(f) := f(.g)$.
On voit donc tout de suite que $\mathrm{Ind}_{\{e\}}^G(\mathrm{triv})$ est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 4 : ⋆⋆
Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G. On va définir une application entre espaces de fonctions centrales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(H) & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ f & \mapsto & f^G. \end{array}$$

D'abord on définit $f^0 : G \to \mathbb{C}$ par

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite on pose $f^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} f^0(xgx^{-1})$.

a) Montrer que $f^G \in \mathcal{C}(G)$.
b) Supposons que f est un caractère irréductible. Est-ce que f^G est irréductible ?
c) Soit (π, V) une représentation de H et soit χ son caractère. Montrer que χ^G est le caractère de $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$.

Solution de l'exercice 4.

a) Soient $gx \in G$. Alors par définition on a

$$f^G(gxg^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} f^0(y(gxg^{-1})y^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} f^0((yg)x(yg)^{-1})\,.$$

Or l'application $y \mapsto yg$ est une bijection de G, donc on a

$$f^G(gxg^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} f^0(yxy^{-1}) = f^G(x)\,,$$

donc $f^G \in \mathcal{C}(G)$.

b) Non : prenons $H = \{e_G\}$, avec G un groupe non trivial, et triv la représentation triviale de H, qui est un caractère irréductible de H. Alors par définition triv^0 est la fonction indicatrice 1_{e_G} de $\{e_G\}$, et donc pour tout $x \in G$

$$\mathrm{triv}^G(x) = \sum_{g\in G} f^0(gxg^{-1}) = \sum_{g\in G : gxg^{-1}=e_G} 1 = |G| 1_{e_G}(x)\,.$$

Par conséquent, on constate que triv^G est le caractère de la représentation régulière de G, qui n'est pas irréductible.

c) On a vu à l'exercice 2 que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ se décomposait en somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme

$$\mathrm{Ind}_H^G(\pi) = \bigoplus_{g\in R} V^g\,,$$

où $R \subset G$ est un ensemble de représentants de G modulo H et $V^g = V$, avec l'inclusion $V^g \subset \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ définie par $v \mapsto f_g$, où $f_g : R \to V$ est la fonction indicatrice de $\{g\} \subset R$ multipliée par v. En explicitant l'action de G sur cette décomposition, on trouve facilement que, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\pi)}(g) &= \sum_{g' \in R\,:\,g'gg'^{-1} \in H} \chi_{V^{g'}}(g'gg'^{-1}) = \sum_{g' \in R\,:\,g'gg'^{-1} \in H} \chi_V(g'gg'^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g' \in G\,:\,g'gg'^{-1}} \chi_V(g'gg'^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{g' \in G} \chi_V^0(g'gg'^{-1}) = \chi^G(g)\,, \end{aligned}$$

d'où finalement $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(\pi)} = \chi^G$.

Exercice 5 : (Réciprocité de Frobenius, point de vue des représentations) $\star\star$
Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G, π une représentation de H et ρ une représentation de G.

a) Montrer :
$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = \mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi)\,.$$

b) En déduire que, si ρ et π sont irréductibles, la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est égale à la multiplicité de π dans $\rho_{|_H}$.

Solution de l'exercice 5.

a) Définissons une application naturelle $\alpha : \mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) \to \mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi)$. Si $\phi : \rho \to \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est un morphisme de G-représentations, on définit $\psi = \alpha(\phi)$ comme l'application linéaire $\psi : \rho_{|_H} : \pi$ tel que $\psi(v) := \phi(v)(e_G)$. Un calcul simple assure qu'effectivement $\psi = \alpha(\phi)$ est H-équivariante, et que l'application $\phi \mapsto \alpha(\phi)$ est linéaire.
Réciproquement, on définit une application $\beta : \mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi) \to \mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi))$ en introduisant pour tout $\psi : \rho_{|H} \to \pi$, l'application linéaire $\phi = \beta(\psi) : \rho \to \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$, où $\phi(w) : G \to V$ est définie par $g \mapsto \psi(g \cdot w)$. On vérifie également que $\beta(\psi)$ est G-équivariant, et que l'application β est linéaire.
Alors en suivant les définitions, on obtient que pour tout $\psi : \rho_{|H} \to \pi$, $\alpha(\beta(\psi)) = \psi$, et pour tout $\psi : \rho \to \mathrm{Ind}_H^G(\pi)$, $\beta(\alpha(\phi)) = \phi$. Donc α et β sont inverses l'une de l'autre, donc elles définissent un isomorphisme naturel
$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = \mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi)\,.$$

b) Le lemme de Schur assure que la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi))$. De même, la multiplicité de π dans $\rho_{|H}$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi)$. La question a) assure que ces deux entiers sont égaux.

Exercice 6 : (Réciprocité de Frobenius, point de vue des caractères)
Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G, ϕ une fonction centrale sur G et ψ une fonction centrale sur H. Montrer
$$\langle \phi, \psi^G \rangle = \langle \phi|_H, \psi \rangle.$$

Solution de l'exercice 6. L'exercice 4 permet le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \psi^G \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \phi(x^{-1}) \psi^G(x) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G, y \in G/H} \phi(x^{-1}) \psi^0(yxy^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G, y \in G/H} \phi(yx^{-1}y^{-1}) \psi^0(yxy^{-1}) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi(h^{-1}) \psi^0(h) \\
&= \langle \phi_{|H}, \psi \rangle \, ,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 7 : (Théorème de Frobenius)
Soit $n \geq 1$ un entier et soit G un groupe fini. Soit X un ensemble à n éléments muni d'une action transitive de G, soit $x_0 \in X$ et notons H le stabilisateur de x_0. On suppose que tout élément de G autre que l'identité fixe au plus un élément de X.
On note G_1 l'ensemble des éléments de G qui agissent sur X sans point fixe ; on pose $G_0 := G_1 \cup \{1\}$.

a) Déterminer le cardinal de G_0.
b) Soit χ_σ le caractère de la $\mathbb{C}$-représentation de permutation donnée par l'action de G sur X et soit χ_1 le caractère de la représentation triviale. On pose $\chi = \chi_\sigma - \chi_1$. Montrer que χ est un caractère.
c) Soient ψ un caractère irréductible de H et ψ_G le caractère de l'induite de H à G. On pose $\phi = \psi_G - \psi(1)\chi$. Montrer que ϕ est un caractère irréductible de G. En déduire que G_0 est un sous-groupe distingué de G.
d) Montrer que G est le produit semi-direct de H par G_0.

Solution de l'exercice 7.

a) L'hypothèse nous dit que $\{1\} \cup \bigcup_{x \in X} (\mathrm{Stab}_G(x) \setminus \{1\})$ est une union disjointe. Le cardinal de $\bigcup_X \mathrm{Stab}\, x$ est alors $n(|H| - 1) + 1 = |G| - n + 1$. Ainsi le cardinal de G_0 est n.
b) Remarquons d'abord que $\chi_\sigma(g)$ est égal au cardinal de $\mathrm{Fix}(g)$. On veut montrer que la représentation de permutation σ contient la représentation triviale. Pour cela calculons :

$$\langle \chi_\sigma, 1 \rangle = \frac{1}{|G|} \left(n + \sum_{g \notin G_0} \chi_\sigma(g) \right) = 1 \, .$$

Cela assure que la représentation triviale est une sous-représentation de σ (avec multiplicité 1), donc χ est le caractère d'une sous-représentation de σ supplémentaire de cette sous-représentation triviale.
c) En utilisant l'exercice 2, on a $\phi(1) = n\psi(1) - (n-1)\psi(1) = \psi(1)$.
Soit $g \in G_1$. On a $\phi(g) = \psi_G(g) - \psi(1)(\chi_\sigma(g) - 1)$, or $\chi_\sigma(g) = 0$ car g ne fixe aucun point de X, donc $\phi(g) = \psi_G(g) + \psi(1)$. Or pour tout $g' \in G$, on a $g'gg'^{-1} \in H$ si et seulement si g fixe $g'x_0$, ce qui n'arrive jamais. Donc la formule permettant de calculer ψ_G (voir exercice 4) assure que $\psi_G(g) = 0$. Donc finalement, pour tout $g \in G_1$, $\phi(g) = \psi(1)$.
Soit $g \in G \setminus G_0$. Alors g fixe exactement un point de X, donc il existe $h \in H$ conjugué à g dans G et la formule de l'exercice 4 assure que l'on a $\phi(g) = \psi(h)$.

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\langle\phi,\phi\rangle &= \frac{1}{|G|}\left(\psi(1)^2+\sum_{g\in G_0\setminus\{1\}}\psi(1)^2+\sum_{g\neq 1,\, g\in\bigcup \mathrm{Stab}(x)}\phi(g)\overline{\phi(g)}\right)\\ &= \frac{1}{|G|}\left(\psi(1)^2+\sum_{g\in G_0\setminus\{1\}}\psi(1)^2+n\sum_{h\in H\setminus\{1\}}\psi(h)\overline{\psi(h)}\right).\end{aligned}$$

Reste à utiliser le fait que ψ est un caractère irréductible pour en déduire que $\langle\phi,\phi\rangle$ vaut 1. Dès lors, ϕ est le caractère d'une représentation irréductible ou alors son opposé. Mais on a $\phi(1)=\psi(1)>0$, d'où le résultat.

Comme on a $\phi(g)=\phi(1)$ pour tout $g\in G_0$, on sait que G_0 est dans le noyau de la représentation correspondant à ϕ.

Soit $g\in G\setminus G_0$. Alors g est conjugué à un élément $h\in H\setminus\{1\}$. Comme les caractères irréductibles forment une base des fonctions centrales sur H, il existe un caractère irréductible ψ avec $\psi(h)\neq\psi(1)$. Dès lors, g n'est pas dans le noyau de la représentation ϕ correspondant à ce ψ. Finalement, G_0 est exactement l'intersection des noyaux des représentations de caractère $\psi_G-\psi(1)\chi$, où ψ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de H. En tant que tel, G_0 est bien un sous-groupe distingué de G.

d) On a les propriétés suivantes :
   — H est un sous-groupe de G, G_0 est un sous-groupe distingué de G.
   — $H\cap G_0=\{1\}$ car tout élément de H fixe x_0 et les éléments de $G_0\setminus\{1\}$ sont sans point fixe.
   — Montrons que $G=G_0\cdot H$. Pour cela, on considère l'application $\pi: G_0\to X$ définie par $\pi(g):=g\cdot x_0$. Puisque les éléments de $G_0\setminus\{1\}$ ne fixent pas x_0, on voit que π est injective. Or la question a) assure que $|G|=n=|X|$, donc π est bijective. Donc G_0 agit transitivement sur X.
   Soit alors $g\in G$. Par le raisonnement précédent, il existe $g_0\in G_0$ tel que $g\cdot x_0=g_0\cdot x_0$. Donc $h:=g_0^{-1}g\in H$ et $g=g_0h$. Cela assure que $G=G_0\cdot H$.

   Les trois points précédents assurent que G est le produit semi-direct de H par G_0 (voir TD4, exercice 2).

Exercice 8 : (Critère de Mackey)

Soit G un groupe fini et soit k un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$. Soient H et K des sous-groupes de G et soit (ρ,W) une représentation de H sur k. On pose $V:=\mathrm{Ind}_H^G W$. Soit S un système de représentants de $K\backslash G/H$ contenant 1. Pour $s\in S$, on pose $H_s=sHs^{-1}\cap K$ et on note W_s la représentation de H_s correspondant au morphisme $\begin{array}{cccc}\rho^s: & H_s & \to & \mathrm{GL}(W)\\ & x & \mapsto & \rho(s^{-1}xs)\end{array}$.

a) Montrer que V est isomorphe à $\bigoplus_{s\in S}\mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$ en tant que représentation de K.
b) Montrer que V est irréductible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
   (i) W est irréductible ;
   (ii) pour tout $s\in S\setminus\{1\}$, $\mathrm{Hom}(W_s,W|_{H_s})=0$ (on dit alors que W_s, et $W|_{H_s}$ ne s'entrelacent pas).

Solution de l'exercice 8.

a) On a vu aux exercices 2 et 4 que l'on a une décomposition d'espaces vectoriels $V=\bigoplus_{g\in G/H}gW$. Pour $s\in S$, on définit $V_{(s)}=\bigoplus_{g\in KsH/H}gW$; c'est une sous-K-représentation de V, et on a $V=\bigoplus_{s\in S}V_{(s)}$. Le groupe K agit transitivement sur les gW pour $g\in KsH/H$ et le stabilisateur de sW est H_s. On peut donc réécrire $V_{(s)}=\bigoplus_{g\in K/H_s}g(sW)=\mathrm{Ind}_{H_s}^K(sW)$. Et sW est isomorphe à W_s en tant que H_s-représentation. D'où le résultat.
b) En appliquant la question a) à $K=H$, on sait que V est isomorphe à $\bigoplus_{s\in S}\mathrm{Ind}_{H_s}^H(W_s)$ en tant que H-représentation. Appliquons la réciprocité de Frobenius (voir exercice 5) :

$$\mathrm{Hom}_G(V,V)\simeq\bigoplus_{s\in S}\mathrm{Hom}_H(W,\mathrm{Ind}_{H_s}^H W_s)\,.$$

En appliquant une réciprocité de Frobenius à droite cette fois-ci, on obtient

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Ind}_{H_s}^H W_s) \simeq \mathrm{Hom}_{H_s}(W_{|_{H_s}}, W_s)\,.$$

Les dimensions étant additives, V est irréductible si et seulement si $\dim \mathrm{Hom}_H(W, W) = 1$ et $\dim \mathrm{Hom}_{H_s}(W_{|_{H_s}}, W_s) = 0$ pour tout $s \in S \setminus \{1\}$. D'où l'équivalence demandée.

Exercice 9 : $\star\star$

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation complexe de G, de caractère χ.
Montrer les deux équivalences suivantes :

a) le caractère χ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si V admet une forme bilinéaire non dégénérée invariante par G.

b) la représentation ρ provient d'une représentation réelle par extension des scalaires si et seulement si V admet une forme bilinèaire symétrique non dégénérée invariante par G.

Solution de l'exercice 9.

a) On note V^* l'espace dual de V. On dispose de la représentation duale de ρ définie par $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ telle que pour tout $g \in G$, $\rho^*(g) : f \mapsto f(g^{-1}\cdot)$. Alors un calcul simple via la base duale assure que pour tout $g \in G$,
$$\chi_{V^*}(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}\,.$$
Par conséquent, χ est à valeurs réelles si et seulement si $\chi_{V^*} = \chi$ si et seulement si V et V^* sont isomorphes comme représentations de G si et seulement s'il existe une forme bilinéaire $V \otimes V \to \mathbb{C}$ non dégénérée invariante par G (on rappelle qu'on dispose toujours de la forme bilinéaire naturelle invariante par G et non dégénérée $V \otimes V^* \to \mathbb{C}$).

b) — On suppose d'abord que $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\rho = \rho_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, où (V_0, ρ_0) est une représentation de G sur $\mathbb{R}$. Alors on voit V_0 comme un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de V stable par G, et donc on a $V = V_0 \oplus iV_0$. On munit V_0 de la forme quadratique définie positive q_0 invariante par G définie par sa forme polaire b_0 :
$$b_0(x, y) := \sum_{g \in G} \langle g \cdot x, g \cdot y \rangle\,,$$
où $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire quelconque sur V_0.
Alors $q_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est une forme quadratique sur V, dont la forme polaire est la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariant par G recherchée.

— Réciproquement, supposons V muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B, invariante par G. On sait (comme dans le point précédente) que V admet un produit scalaire hermitien (défini positif) $\langle ., . \rangle$ et invariant par G (obtenu en moyennant un produit hermitien quelconque sur V). La non-dégénérescence de $\langle ., . \rangle$ assure que pour tout $x \in V$, il existe un unique $\varphi(x) \in V$ tel que $B(x, \cdot) = \overline{\langle \varphi(x), \cdot \rangle}$. On voit facilement que $\varphi : V \to V$ est une bijection antilinéaire, donc $\varphi^2 := \varphi \circ \varphi \in \mathrm{GL}(V)$. On a alors, pour tout $x, y \in V$,
$$\langle \varphi^2(x), y \rangle = \overline{B(\varphi(x), y)} = \overline{B(y, \varphi(x))} = \langle \varphi(y), \varphi(x) \rangle$$
par symétrie de B. Or le produit $\langle ., . \rangle$ est hermitien, donc on déduit de l'égalité précédente que
$$\langle \varphi^2(x), y \rangle = \overline{\langle \varphi^2(y), x \rangle} = \langle x, \varphi^2(y) \rangle\,,$$
ce qui assure que φ^2 est unitaire. Or pour tout $x \in V$, on a $\langle \varphi^2(x), x \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle$, donc φ^2 est définie positive. Donc la réduction des endomorphismes hermitiens assure qu'il existe un unique $u \in \mathrm{GL}(V)$ hermitien défini positif tel que $\varphi^2 = u^2$ (et on sait que u est un polynôme en φ). Posons alors $\sigma := \varphi \circ u^{-1}$. Alors $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$, i.e. σ est une involution antilinéaire de V. Donc V se décompose en une somme directe de $\mathbb{R}$-sous-espaces propres $V = V_+ \oplus V_-$ avec $iV_+ = V_-$. On a donc $V = V_+ \oplus iV_+$. Enfin, B et $\langle ., . \rangle$ sont invariants par G, donc on en déduit que φ, u et σ sont G-équivariants, donc V_+ et iV_+ sont stables par G. Cela assure que V_+ est une représentation réelle de G telle que $V \simeq V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Exercice 10 : (Représentations complexes de $\mathfrak{S}_n$) $\star\star\star$

Soit $n \geq 1$ un entier et soit λ une partition de n, c'est-à-dire une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ d'entiers naturels vérifiant $n = \sum_k \lambda_k$ avec $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ pour tout k. À cette partition λ, on associe un *tableau de Young* T_λ, qui est un tableau de n cases alignées à gauche dans lequel la i-ème ligne a λ_i colonnes.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ s'identifie au groupe de permutations des cases de T_λ. On définit alors le sous-groupe P_λ (resp. Q_λ) comme étant respectivement le stabilisateur des lignes (resp. des colonnes) de T_λ. On appelle *projecteurs de Young* les éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ suivants

$$a_\lambda = \frac{1}{|P_\lambda|}\sum\nolimits_{P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \frac{1}{|Q_\lambda|}\sum\nolimits_{Q_\lambda} \varepsilon(g)\, g,$$

où $\varepsilon(g)$ désigne la signature de la permutation g. On pose $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$.

a) Supposons $g \in \mathfrak{S}_n \setminus P_\lambda Q_\lambda$. Montrer qu'il existe une transposition $t \in P_\lambda$ vérifiant $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire $l_\lambda : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $a_\lambda g b_\lambda = l_\lambda(g) c_\lambda$ pour tout $g \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

c) Soit μ une partition de n. On introduit l'ordre lexicographique sur les partitions de n : on a $\lambda > \mu$ s'il existe $j \geq 1$ tel que $\lambda_j > \mu_j$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i < j$. Supposons $\lambda > \mu$. Montrer que l'on a $a_\lambda \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] b_\mu = 0$.

d) Soit A une algèbre. Un élément $e \in A$ est dit *idempotent* s'il vérifie $e^2 = e$. Montrer que pour tout A-module à gauche M, on a $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \simeq eM$. Montrer que c_λ est proportionnel à un idempotent de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

e) Soit V_λ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ donnée par multiplication à gauche sur l'espace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto V_\lambda$ induit une bijection entre l'ensemble des partitions de n et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice 10.

a) Soient $g \in \mathfrak{S}_n$, $T = T_\lambda$ et $T' = gT$. On veut montrer qu'il existe i et j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui sont sur une même ligne dans T et sur une même colonne dans T'. Supposons que deux tels indices n'existent pas. Alors tous les éléments de la première ligne de T se retrouvent dans des colonnes distinctes de T'. On peut donc trouver $q_1 \in gQ_\lambda g^{-1}$ tel que q_1T' ait la même première ligne (à permutation sur la ligne près) que T. Soit alors $p_1 \in P_\lambda$ tel que p_1T et q_1T' ont même première ligne. Soit S_λ^1 l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant point par point la première ligne de p_1T. On peut de même trouver $q_2 \in gQ_\lambda g^{-1} \cap S_\lambda^1$ et $p_2 \in P_\lambda \cap S_\lambda^1$ tels que p_2p_1T et q_2q_1T' ont leurs deux premières lignes identiques. On considère ensuite S_λ^2 le sous-groupe de S_λ^1 fixant les points des deux premières lignes de p_2p_1T, etc... Par récurrence, on a finalement $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$ tels que $pT = gqg^{-1}T'$. Autrement dit, on a $pq^{-1} = g \in P_\lambda Q_\lambda$.

b) Si g s'écrit pq avec $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$, on a $a_\lambda g b_\lambda = \varepsilon(q) c_\lambda$. Si g n'est pas élément de $P_\lambda Q_\lambda$, soit $t \in P_\lambda$ donné par la question a). On a alors

$$a_\lambda g b_\lambda = a_\lambda t g b_\lambda = a_\lambda g(g^{-1}tg) b_\lambda = -a_\lambda g b_\lambda\ ,$$

de sorte que cette quantité est nulle.

c) Soit $g \in \mathfrak{S}_n$. Pour répéter l'argument de la question b), il nous suffit de trouver $t \in P_\lambda$ tel que $g^{-1}tg$ soit un élément de Q_μ. On pose $T = T_\lambda$ et $T' = gT_\mu$. Si on a $\lambda_1 > \mu_1$, l'existence d'indices i et j qui sont sur la même ligne de T et la même colonne de T' est claire par le principe des tiroirs. Si on a $\lambda_1 = \mu_1$, il existe $p_1 \in P\lambda$ et $q_1 \in gQ_\lambda g^{-1}$ tels que $T_2 := p_1T$ et $T_2' := q_1T'$ ont même première ligne. On travaille ensuite sur la deuxième ligne de T_2 et T_2', etc... Comme l'hypothèse assure que $\lambda > \mu$, il existe un plus petit indice α avec $\lambda_\alpha > \mu_\alpha$. Par principe des tiroirs, la α-ième ligne de T_α va alors contenir deux indices qui sont dans la même colonne de T_α'. Cela assure le résultat.

d) Les applications $\begin{array}{ccc} eM & \to & \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \\ em & \mapsto & (ae \mapsto aem) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} eM & \leftarrow & \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \\ f(e) & \leftarrow\!\shortmid & f \end{array}$ sont inverses l'une de l'autre.

Par la question b), on a $c_\lambda^2 = l_\lambda(b_\lambda a_\lambda) c_\lambda$. Aussi, comme on a $c_\lambda^2(1) = 1$, le coefficient $l_\lambda(b_\lambda a_\lambda)$ n'est pas nul. Il s'ensuit que $l_\lambda(b_\lambda a_\lambda)^{-1} c_\lambda$ est un idempotent.

5. Supposons $\lambda \geq \mu$. On a par la question d) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\mu) \simeq c_\lambda \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\mu\,.$$

Si on a $\lambda > \mu$, cet espace est nul par la question c). Dans le cas $\lambda = \mu$, l'espace est de dimension 1 par la question b). De ce fait, on sait que les V_λ sont irréductibles et que V_λ et V_μ sont isomorphes si et seulement si $\lambda = \mu$. Enfin, il y a autant de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n, ce qui permet de conclure.

Exercice 11 : $\star\star\star$

On garde les notations de l'exercice précédent. Soit U_λ la représentation $\mathrm{Ind}_{P_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C}$.

a) Montrer que la représentation obtenue par multiplication à gauche sur $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]a_\lambda$ est isomorphe à U_λ.

b) Montrer la décomposition $U_\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$, où les $K_{\mu\lambda}$ sont des entiers naturels avec $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Les entiers $K_{\mu\lambda}$ sont appelés *nombres de Kostka.*

On définit les ensembles suivants, qui correspondent à ajouter ou enlever une case sur le tableau de Young T_λ :

$$A(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n+1 \mid \exists j,\, \forall i,\, \nu_i = \lambda_i + \delta_{ij}\},$$

$$R(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n-1 \mid \exists j,\, \forall i,\, \nu_i = \lambda_i - \delta_{ij}\}.$$

c) Montrer que V_λ est isomorphe à $\bigoplus_{\nu \in R(\lambda)} V_\nu$ en tant que $\mathfrak{S}_{n-1}$-représentation.

d) Montrer que $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu \simeq \bigoplus_{\lambda \in A(\nu)} V_\lambda$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_n$-représentations.

Solution de l'exercice 11.

a) Soit V une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Par réciprocité de Frobenius (voir exercice 5), on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{P_\lambda}(\mathrm{id}, V)\,.$$

De plus, $\mathbb{C}[P_\lambda]a_\lambda$ est isomorphe à la P_λ-représentation triviale puisque pour tout $p \in P_\lambda$, on a $pa_\lambda = a_\lambda$. Enfin, le dernier isomorphisme provient des propriétés du produit scalaire :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{P_\lambda}(\mathbb{C}[P_\lambda]a_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]a_\lambda, V)\,.$$

b) On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(U_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]a_\lambda, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\mu) \simeq a_\lambda \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\mu\,.$$

Ce dernier est nul dans le cas $\lambda < \mu$ et est de dimension 1 si $\lambda = \mu$.

c) Soit ν une partition de $n-1$. Toute injection $\iota : \mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ se prolonge linéairement en $\iota : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ et munit V_λ d'une structure de représentation de $\mathfrak{S}_{n-1}$. On a par la question d) de l'exercice 10 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]c_\nu, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda) \simeq \iota(c_\nu)\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda\,.$$

En choisissant ι correspondant à l'inclusion canonique de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, on obtient la condition $\nu_i \leq \lambda_i$ pour tout i pour que cet espace de morphismes soit non nul. Autrement dit, il est nécessaire d'avoir $\nu \in R(\lambda)$.

Réciproquement, soit $\nu \in R(\lambda)$. Si σ désigne le n-cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$, alors on a $\mathfrak{S}_n = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathfrak{S}_{n-1}\sigma^k$. On a ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]c_\nu, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}]\sigma^k c_\lambda)\,.$$

Un seul de ces termes est non nul, de dimension 1, et si n_0 est la case enlevée de λ pour obtenir ν, alors cela correspond au terme $k = n - n_0$.

d) La réciprocité de Frobenius (voir exercice 5) nous donne

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu, V_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V_\nu, V_\lambda)$$

et le résultat résulte de la question précédente.

Exercice 12 : (Théorème de Burnside) $\star\star\star$

Soient p, q deux nombres premiers, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Soit G groupe fini tel que $|G| = p^\alpha q^\beta$. L'objectif de l'exercice est de montrer que G est résoluble.

a) Soient $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ des racines de l'unité. Montrer que $\frac{\zeta_1+\dots+\zeta_n}{n}$ est un entier algébrique si et seulement si $\zeta_1 + \dots + \zeta_n = 0$ ou $\zeta_i = \zeta_1$ pour tout i.

b) Soit H un groupe fini, ρ une représentation irréductible de H sur $\mathbb{C}$, de caractère χ.

   i) Montrer que pour tout $h \in H$, si $c(h)$ désigne le cardinal de la classe de conjugaison de h dans H, alors $c(h)\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique.

   ii) Montrer que pour tout $h \in H$, si $c(h)$ est premier avec $\chi(1)$, alors $\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique.

   iii) Sous les hypothèses de la question b)ii), montrer que si $\chi(h) \neq 0$, alors $\rho(h)$ est une homothétie.

c) Soit $h \in H$ tel que $c(h)$ soit une puissance d'un nombre premier. En considérant la représentation régulière de H, montrer que G contient un sous-groupe strict distingué N tel que l'image de h dans H/N soit centrale dans H/N.

d) Montrer par récurrence que G est résoluble.

Solution de l'exercice 12.

a) Rappelons que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique (i.e. la racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$), on appelle conjugués de α les racines du polynôme minimal de α dans $\mathbb{Q}[X]$. On montre d'abord le résultat suivant : si α et β sont deux nombres algébriques, alors $\alpha+\beta$ est un nombre algébrique et les conjugués de $\alpha+\beta$ sont de la forme $\alpha'+\beta'$, où α' et β' sont des conjugués de α et β respectivement. Par hypothèse, α et β sont algébriques de polynômes minimaux respectifs P et Q : les racines de P (resp. Q) sont exactement les conjugués de α (resp. β). On introduit les matrices compagnons A et B associées aux polynômes P et Q : ce sont des matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dont les polynômes caractéristiques sont exactement P et Q. On considère alors la matrice $C := A \otimes I + I \otimes B$. C'est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dont les valeurs propres sont exactement les sommes d'un conjugué de α et d'un conjugué de β. Donc $\alpha+\beta$ est algébrique et son polynôme minimal divise le polynôme caractéristique de C, donc les conjugués de $\alpha+\beta$ sont des valeurs propres de C, donc de la forme souhaitée.

Répondons maintenant à la question a). On note $\alpha := \frac{\zeta_1+\dots+\zeta_n}{n}$ et supposons que α est un entier algébrique. Ce qui précède assure que les conjugués de α sont également de la forme $\alpha' = \frac{\zeta_1'+\dots+\zeta_n'}{n}$, avec ζ_i' racine de l'unité pour tout i. Par conséquent, tout conjugué de α est un nombre complexe de module ≤ 1. Si les ζ_i ne sont pas tous égaux, alors l'inégalité triangulaire assure que $|\alpha| < 1$, et par conséquent le produit des conjugués de α est de module < 1 ; or ce produit est, au signe près, le coefficient constant du polynôme minimal P de α dans $\mathbb{Q}[X]$; comme α est une entier algébrique, P est à coefficients entiers, donc son coefficient constant est un entier de valeur absolue < 1, il est donc nul ; donc $P = X$ par irréductibilité, donc $\alpha = 0$.

On a bien montré que si α était un entier algébrique, alors $\alpha = 0$ ou $\zeta_i = \zeta_1$ pour tout i.

La récipoque est évidente.

b) i) Voir cours, lemme IV.3.5.

   ii) Les entiers $c(h)$ et $\chi(1)$ sont premiers entre eux, donc le théorème de Bézout assure qu'il existe des entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ac(h) + b\chi(1) = 1$. En multipliant par $\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$, on obtient

$$ac(h)\frac{\chi(h)}{\chi(1)} + b\chi(h) = \frac{\chi(h)}{\chi(1)}\,.$$

Or la question b)i) assure que $c(h)\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique, et $\chi(h)$ est un entier algébrique (c'est une somme de racines de l'unité), donc comme l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, on déduit de la formule précédente que $\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique.

iii) Si on note $n = \rho(1)$ la dimension de la représentation ρ, on sait que $\alpha := \frac{\chi(h)}{\chi(1)} = \frac{\zeta_1+\cdots+\zeta_n}{n}$, où les ζ_i sont des racines de l'unité qui sont les valeurs propres de $\rho(h)$. La question b)ii) assure que α est un entier algébrique, qui est non nul par hypothèse, donc la question b)i) assure que $\zeta_i = \zeta_1$ pour tout i, donc $\rho(h)$ est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres égales à ζ_1, donc $\rho(h) = \zeta_1 \mathrm{id}$, donc $\rho(h)$ est une homothétie.

c) Si $h = 1$, le résultat est évident en prenant $N = \{1\}$. Supposons désormais $h \neq 1$. On note ρ_H la représentation régulière de H. On sait que $\chi_H(h) = 0$ car $h \neq 1$, ot $\chi_H = \sum_\chi n_\chi \chi$, où χ décrit les caractères irréductibles de H et $n_\chi = \dim(\chi) = \chi(1)$. On a donc $\sum_\chi \chi(1)\chi(h) = 0$, donc $\sum_{\chi\neq \mathrm{triv}} \chi(1)\chi(h) = -1$, donc

$$\sum_{\chi\neq\mathrm{triv}} \frac{\chi(1)\chi(h)}{p} = -\frac{1}{p}\,.$$

Comme $-\frac{1}{p}$ n'est pas un entier algébrique, il existe $\chi \neq$ triv (dont on note ρ la représentation correspondante) tel que $\frac{\chi(1)\chi(h)}{p}$ n'est pas un entier algébrique. En particulier, on a $\chi(h) \neq 0$ et p ne divise pas $\chi(1) = \dim(\chi)$. Donc les entiers $c(h)$ et $\chi(1)$ sont premiers entre eux. Alors la question b)iii) assure que $\rho(h)$ est une homothétie. On définit alors $N := \mathrm{Ker}(\rho)$ qui est un sous-groupe distingué de G, distinct de G car $\chi \neq$ triv. Or $\rho(h)$ est une homothétie, donc $\rho(h)$ est central dans le groupe linéaire de ρ, donc $\rho(h)$ est central dans l'image de G dans ce groupe, donc l'image de h est centrale dans G/N.

d) On raisonne par récurrence sur $|G|$. Un groupe dont le cardinal est un puissance d'un nombre premier est nilpotent, donc résoluble. On peut donc supposer que $\alpha, \beta \geq 1$.

Écrivons l'équation aux classes pour l'action de G sur lui-même par conjugaison : on a $|G| = 1+\sum_{\overline{h}\neq 1 \in G/\mathrm{conj}} c(h)$. Réduisons cette égalité modulo q : on obtient $1+\sum_{\overline{h}\neq 1\in G/\mathrm{conj}} c(h) \equiv 0\,[q]$. Par conséquent, il existe $h \in G$ tel que q ne divise pas $c(h)$.

Or $c(h)$ divise $|G|$, donc $c(h)$ est une puissance de p.

Alors la question c) assure qu'il existe un sous-groupe distingué strict $N \subset G$ tel que l'image de h dans G/N soit centrale dans G/N. On a alors deux cas :

- si $N \neq \{1\}$, on applique l'hypothèse de récurrence aux groupes N et G/N qui sont de cardinal divisant strictement celui de G, donc ils sont résolubles, donc G est résoluble.
- si $N = \{1\}$, alors $h \in Z(G)$, donc $Z(G) \neq \{1\}$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux groupes $Z(G)$ et $G/Z(G)$, qui sont donc résolubles, donc G est résoluble.