

TD2 : Produit semi-direct

Exercices \star : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.

Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.

Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : \star

Soient N et H des groupes et soit $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Notons $N \rtimes_{\phi} H$ l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de composition définie par $(n_1, h_1) \rtimes_{\phi} (n_2, h_2) = (n_1 \phi(h_1)(n_2), h_1 h_2)$.

- Montrer que $N \rtimes_{\phi} H$ est un groupe, appelé *produit semi-direct* de H par N relativement à ϕ .
- Montrer que $N \times \{e_H\} \triangleleft N \rtimes_{\phi} H$ et $\{e_N\} \times H < N \rtimes_{\phi} H$.
- Identifier le quotient de $N \rtimes_{\phi} H$ par $N \times \{e_H\}$.

Exercice 2 : \star

Soit G un groupe et soient N et H des sous-groupes de G tels que $N \cap H = \{e\}$, $NH = G$ et $N \triangleleft G$. Montrer que :

- l'application $i : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ définie par $h \mapsto i_h$, où $i_h(n) = hnh^{-1}$, est un morphisme de groupes.
- l'application

$$\begin{aligned} f : N \rtimes_i H &\rightarrow G \\ (n, h) &\mapsto nh \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

On dit alors que G est le *produit semi-direct* de H par N .

Exercice 3 : \star

Montrer que le produit semi-direct $N \rtimes_{\phi} H$ est direct si et seulement si ϕ est le morphisme trivial si et seulement si $\{e_N\} \times H \triangleleft N \rtimes_{\phi} H$.

Exercice 4 : $\star\star$

Une suite de morphismes $\dots \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow \dots$ est dite exacte en B si $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$, et elle est dite *exacte* si elle est exacte en tous ses termes.

Soit

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

une suite exacte (courte). On dit alors que G est une *extension* de H par N .

- Montrer que, si G est le produit direct de H et N ou bien un produit semi-direct de H par N , alors on a une telle suite exacte.
- Réciproquement soit une telle suite exacte. Si p possède une *section*, c'est-à-dire s'il existe un morphisme de groupes $s : H \rightarrow G$ tel que $p \circ s = \text{id}_H$, montrer que G est le produit semi-direct de H par N pour l'opération $h \cdot n = s(h)ns(h)^{-1}$.
- Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 5 : $\star\star$

- Montrer que l'on peut écrire \mathfrak{S}_n comme un produit semi-direct naturel.
- Montrer que l'on peut écrire le groupe diédral D_n comme un produit semi-direct naturel.
- Montrer que l'on peut écrire $\mathrm{GL}_n(k)$ comme un produit semi-direct naturel (k est un corps).
- Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Exercice 6 :

Soit $G = N \rtimes H$ et soit K un sous-groupe de G contenant N . Montrer que l'on a $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 7 :

Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 8 : **

Soient H et N des groupes et soient ϕ et $\psi : H \rightarrow \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $N \rtimes_{\phi} H$ et $N \rtimes_{\psi} H$ soient isomorphes.

- S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, montrer que l'on a la conclusion attendue.
- S'il existe un automorphisme u de N tel que

$$\forall h \in H \quad \phi(h) = u\psi(h)u^{-1},$$

montrer que la conclusion attendue vaut encore.

- Si H est cyclique et que ϕ et $\psi : H \rightarrow \mathrm{Aut}(N)$ sont tels que $\phi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_{\phi} H$ et $N \rtimes_{\psi} H$ sont isomorphes.

Exercice 9 : **

Soient $p < q$ des nombres premiers.

- Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal pq .
- Si $q \geq 3$, en déduire que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_q .

Exercice 10 : ***

- Montrer qu'un groupe d'ordre 8 est isomorphe à l'un des groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3, D_4, \mathbf{H}_8.$$

Justifier que \mathbf{H}_8 n'est pas un produit semi-direct et que les cinq groupes cités sont deux-à-deux non isomorphes.

- Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.
- Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes finis de cardinal ≤ 15 .

Exercice 11 : ***

Soit p un nombre premier impair.

- Déterminer les p -Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
- Soient ϕ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. En notant pour tout entier k , ϕ_k le morphisme défini par $\phi_k(x) = \phi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\psi = P\phi_k P^{-1}$.
- En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2 . Montrer que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 : on raisonnera par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe.

Exercice 12 : ***

Soient $p \neq q$ deux nombres premiers. Classifier les groupes d'ordre p^2q .