TD3 : Groupes abéliens de type fini

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2 : $\star$
Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 3 : $\star$

a) Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.
b) Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Exercice 4 :

a) Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$ est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?
b) Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5 : $\star$
Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre égal à l'*exposant de G* (c'est-à-dire au ppcm des ordres des éléments de G).

Exercice 6 : $\star$
Soit G un groupe et soient H et K des sous-groupes de G. On suppose que :

a) $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$;
b) $HK = G$;
c) $H \cap K = e$.

Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 7 : $\star\star$
Soit K un corps et soit $G \subset K^*$ un sous-groupe fini d'ordre n. On va montrer que G est un groupe cyclique.

a) Montrer que l'ordre de tout élément de G divise n.
b) Soit d un diviseur de n et $x \in G$ d'ordre d. Soit H le sous-groupe cyclique de G engendré par x. Montrer que tout élément d'ordre d est dans H.
c) On note $N(d)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d. Montrer que $N(d) = 0$ ou $\varphi(d)$, et que $\sum_{d|n,\ d>0} N(d) = n$.
d) Conclure.

En particulier, si p est un nombre premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, et si K est un corps fini, K^* est un groupe cyclique.

Exercice 8 : $\star\star$
Si A est un anneau, on note $A^\times$ le groupe (multiplicatif) des éléments inversibles de A.

a) Soit G un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de G est en bijection avec l'ensemble des générateurs de G.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
c) Soit p un nombre premier impair et soit $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.
d) Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.
e) En déduire $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 :
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 10 : $\star\star$
Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 11 : $\star\star$
a) On considère $H := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a-b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, calculer son rang, en donner une base et décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/H$.
b) On note H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,5)$, $(5,-1)$ et $(1,-2)$. Déterminer une base de H et décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/H$.
c) On note H le quotient de $\mathbb{Z}^3$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4,8,10)$ et $(6,2,0)$. Déterminer la structure du groupe H.

Exercice 12 :
Soit $n \geq 1$. Constuire dans $\mathbb{R}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 13 :
Soit $n \geq 1$ est un entier. Montrer que tout système libre maximal dans $\mathbb{Z}^n$ est de cardinal n.
Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

Exercice 14 :
Soit $e_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter e_1 en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 15 : $\star\star$
Déterminer les facteurs invariants des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 :
a) Soit G un groupe abélien de type fini et soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme. Ceci est-il nécessairement vrai si l'on remplace surjectif par injectif ?
b) Soit G un groupe abélien libre de type fini et soit $f : G \to G$ un morphisme. Définir le déterminant $\det(f) \in \mathbb{Z}$ de f et montrer que f est injectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, montrer que l'on a $|\mathrm{Coker}(f)| = |\det(f)|$.

Exercice 17 : $\star\star\star$
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des groupes abéliens de type fini et $f_i : A_i \to A_{i+1}$ des morphismes de groupes. On dit que la suite

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \to 0$$

est exacte si f_1 est injectif, f_{n-1} est surjectif, et pour tout $1 \leq i \leq n-2$, $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. Montrer que si la suite est exacte, alors $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mathrm{rang}(A_i) = 0$.

Exercice 18 : $\star\star\star$

On se propose de redémontrer le théorème de structure des groupes abéliens finis.

On appelle caractère d'un groupe abélien fini G tout morphisme $G \to \mathbb{C}^*$.

a) Si H est un sous-groupe d'un groupe abélien fini G, montrer que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G.

b) Soit G un groupe abélien fini. On note H un sous-groupe de G engendré par un élément de G d'ordre maximal. Montrer que l'on a un isomorphisme $G \cong H \times G/H$.

c) Conclure.