TD4 : groupes résolubles et nilpotents, croissance des groupes

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Si G est un groupe, on note $C^0(G) := G$ et $C^{n+1}(G) := [G, C^n(G)]$, à savoir le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, avec $g \in G$ et $h \in C^n(G)$. On dit que G est nilpotent s'il existe $N \geq 0$ tel que $C^N(G) = \{e\}$. Dans ce cas, l'entier $N \geq 0$ minimal tel que $C^N(G) = \{e\}$ est appelé classe de nilpotence de G.

Exercice 1 : $\star$
Soit G un groupe.

a) Donner une définition des groupes nilpotents en termes de suite de composition.
b) Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble.
c) Que dire de la réciproque ?
d) Montrer que le centre d'un groupe nilpotent est non trivial.
e) Montrer que si G est nilpotent et H est un sous-groupe de G, alors H est nilpotent.
f) On suppose désormais dans la suite que H est un sous-groupe distingué de G. Montrer que si G est nilpotent, G/H est nilpotent.
g) On suppose H et G/H nilpotents. Le groupe G est-il nilpotent ?
h) Les groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ sont-ils résolubles ? nilpotents ?
i) Soit p un nombre premier. Montrer que tout p-groupe est nilpotent (on pourra montrer que le centre d'un tel groupe est non-trivial, en utilisant la partition du groupe en classes de conjugaison).
j) (***) Soient p, q, r trois nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pqr est résoluble. Un tel groupe est-il nilpotent ?
k) On suppose G fini. Montrer que si G est nilpotent, alors tout sous-groupe maximal de G est distingué (la réciproque est vraie, mais plus difficile).

Exercice 2 : $\star\star$
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $T_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

a) Montrer que si G est connexe, alors $D(G)$ l'est aussi.
b) Montrer que si G est abélien, alors G est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$.
c) On suppose G résoluble connexe. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 : $\star\star$
Soit G un groupe de type fini. On définit le sous-groupe de Frattini de G (noté $\phi(G)$) comme l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

a) Montrer que $\mathbb{Q}$ ne possède pas de sous-groupe maximal.
b) Montrer que G admet au moins un sous-groupe maximal. La preuve est-elle plus simple si G est fini ?
c) Montrer que $\phi(G)$ est distingué dans G et même qu'il est stable par tout automorphisme de G (on dit qu'il est caractéristique). On note $\pi : G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.

d) Soit $S \subset G$ une partie de G. Montrer que S engendre G si et seulement si $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.

e) Montrer que $\phi(G)$ est exactement l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour toute partie $S \subset G$, on a : $\langle S, g\rangle = G \implies \langle S\rangle = G$.

f) (***) Montrer que si G est fini, alors $\phi(G)$ est nilpotent.

g) On suppose G fini. Montrer que si G est nilpotent, alors $D(G) \subset \phi(G)$ (la réciproque est vraie, mais plus difficile).

h) On suppose que G est un p-groupe.

  i) Montrer que tout sous-groupe maximal de G contient $D(G)$ et le sous-groupe G^p engendré par les puissances p-ièmes dans G.

  ii) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p.

  iii) Que peut-on en déduire sur le nombre minimal de générateurs de G ?

  iv) Montrer que $\phi(G) = D(G).G^p$.

Exercice 4 : $\star\star$

Soit G un groupe de type fini. Pour toute partie génératrice finie A de G, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $B_{G,A}(m)$ l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produits d'au plus m éléments de $A \cup A^{-1}$. On pose $\beta_{G,A}(m) := |B_{G,A}(m)|$. Si β et β' sont deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on notera $\beta \preceq \beta'$ s'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout n, $\beta(n) \leq c\beta'(an)$, et $\beta \sim \beta'$ si $\beta \preceq \beta'$ et $\beta' \preceq \beta$.

a) Montrer que $B_{G,A}(m)$ est une boule dans l'espace métrique (G, d), où d est une distance que l'on précisera.

b) Soient A et A' deux parties génératrices finies de G. Montrer que $\beta_{G,A} \sim \beta_{G,A'}$. On notera donc abusivement $\beta_G = \beta_{G,A}$.

c) Calculer β_G si G est un groupe fini, si $G = \mathbb{Z}$, si $G = \mathbb{Z}^n$, si G est le groupe libre à n générateurs (i.e. le groupe des mots finis sur un alphabet de n lettres, avec leurs inverses, pour la loi de concaténation des mots).

d) Montrer que $\beta_G(n) \preceq e^n$.

e) Si G' est un groupe de type fini, calculer $\beta_{G\times G'}$.

f) Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe de type fini, alors $\beta_H \preceq \beta_G$, et si H est d'indice fini, alors $\beta_H \sim \beta_G$.

g) Soit H un quotient de G. Comparer β_H et β_G.

h) Montrer que si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors G est de type fini et $\beta_G(n) \sim e^n$.

i) Montrer que si G est nilpotent de classe 2, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.

j) Montrer que si G est nilpotent, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.

k) Montrer que le groupe $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$, où le produit semi-direct est défini via la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, est un groupe résoluble tel que $\beta_G(n) \sim e^n$.

Exercice 5 : $\star\star\star$

On note Σ^* l'ensemble des mots (finis) sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, i.e. $\Sigma^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n$. On note G le groupe $\mathfrak{S}(\Sigma^*)$. On note $a \in G$ l'élément défini par $a(1m) := 0m$ et $a(0m) := 1m$ pour tout $m \in \Sigma^*$.

a) Montrer que les formules suivantes définissent des éléments b, c et d de G : $b(0m) = 0a(m)$, $c(0m) = 0a(m)$, $d(0m) = 0m$, $b(1m) = 1c(m)$, $c(1m) = 1d(m)$ et $d(1m) = 1b(m)$. On note $\Gamma := \langle a, b, c, d\rangle \subset G$.

b) Montrer que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \mathrm{id}$ et que $bc = cb = d$, $cd = dc = b$, $bd = db = c$.

c) Montrer que tout élément de Γ s'écrit comme produit des éléments a, b, c, d, avec un terme du produit sur deux égal à a.

d) Pour tout $n \geq 1$, on note $\Gamma_n := \{\gamma \in \Gamma : \gamma_{|\Sigma^n} = \mathrm{id}\}$. Montrer que Γ_n est un sous-groupe distingué strict d'indice fini de Γ.

e) On définit $\varphi_1 : \Gamma_1 \to G \times G$ par $\varphi_1(\gamma) := (\gamma_0, \gamma_1)$, où $\gamma_\epsilon(w)$ est le mot tel que $\gamma(\epsilon w) = \epsilon\gamma_\epsilon(w)$. Montrer que φ_1 est un morphisme de groupes injectif.

f) Montrer que les morphismes $\varphi^\epsilon : \Gamma_1 \to \Gamma$ définis par $\gamma \mapsto \gamma_\epsilon$ sont surjectifs. En déduire que Γ est infini.

g) Montrer que $\varphi_1(\Gamma_1)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \times \Gamma$.

h) Montrer que Γ n'est pas à croissance polynomiale, i.e. pour tout $d \geq 0$, $n^d \prec \beta_\Gamma(n)$.

i) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_1$, $l(\gamma_0) + l(\gamma_1) \leq l(\gamma) + 1$, où $l(g)$ désigne le nombre minimal de symboles a, b, c, d nécessaires pour écrire g.

j) Pour tout $n \geq 1$, généraliser les contructions précédentes pour obtenir un morphisme injectif $\varphi_n : \Gamma_n \to \Gamma^{\Sigma_n}$ tel que $\varphi_n(\Gamma_n)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ^{X_n}.

k) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_3$, si on note $\varphi_3(\gamma) = (\gamma_\epsilon)_{\epsilon \in \Sigma_3}$, alors

$$\sum_{\epsilon \in \Sigma_3} l(\gamma_\epsilon) \leq \frac{5}{6} l(\gamma) + 8\,.$$

l) Montrer que Γ n'est pas à croissance exponentielle, i.e. $\beta_\Gamma(n) \prec e^n$. On dit que Γ est à croissance intermédiaire.