TD6 : groupe linéaire, homographies, simplicité

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$

a) Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Rappeler pourquoi $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$.

b) Soit q une puissance d'un nombre premier et $n \geq 2$. Construire un morphisme de groupes injectif canonique $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_N$ avec $N := \frac{q^n-1}{q-1}$.

c) Identifier les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n = 2$ et $q = 2, 3, 4, 5$.

d) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$.

Exercice 2 : $\star$

a) Soit p un nombre premier. Montrer que la réduction modulo p des coefficients d'une matrice induit un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui est surjectif.

b) Montrer que ce résultat reste vrai en remplaçant p par n'importe quel entier $N \geq 2$.

c) Soit $N \geq 3$. Montrer que le noyau du morphisme de réduction $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est sans torsion.

Exercice 3 : $\star$

On note $G := \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ et $H := \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$.

a) Montrer que G et H ont même cardinal.

b) Montrer que H contient deux classes de conjugaison distinctes formées d'éléments d'ordre 2.

c) Montrer que tout élément d'ordre 2 dans G est la classe d'une transvection de $\mathbb{F}_4^3$.

d) Montrer que G et H ne sont pas isomorphes.

Exercice 4 : $\star\star$

Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes de conjugaisons sous $\mathrm{SL}(E)$ des transvections de E. On fixe une base de E et, pour $a \in K^*$, on note T_a la transvection de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

a) Montrer que T_a et T_b sont conjuguées si et seulement si ab^{-1} est un élément de K^{*2}.

b) En déduire une bijection entre K^*/K^{*2} et $\mathcal{T}$.

c) Que dire de plus si $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$?

Exercice 5 : $\star\star$

Soit $n \geq 1$. On note $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.

a) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.

b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\ \}$ de σ.

c) En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.

d) Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.

e) En utilisant les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ opérant transitivement sur $\{1, \dots, 6\}$.

f) Construire géométriquement un sous-groupe H' d'indice 6 dans $\mathfrak{S}_6$ vérifiant les mêmes propriétés que H.

g) En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.

Exercice 6 : $\star\star$
Soit K un corps.

a) Montrer que l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ est 3-transitive. Est-elle 4-transitive ?

b) Pour $n = 1, 2, 3$, décrire le quotient $\mathbb{P}^1(K)^{[n]}/\mathrm{PGL}_2(K)$ (i.e. l'ensemble des orbites) où $\mathbb{P}^1(K)^{[n]}$ désigne l'ensemble des n-uplets de points deux-à-deux distincts de $\mathbb{P}^1(K)$.

c) Montrer que l'on a une bijection naturelle $(\mathbb{P}^1(K)^{[3]} \times \mathbb{P}^1(K))/\mathrm{PGL}_2(K) \to \mathbb{P}^1(K)$. Cette bijection est notée $(a, b, c, d) \mapsto [a, b, c, d]$ et $[a, b, c, d]$ est appelé le birapport des points a, b, c, d.

d) Expliciter la bijection précédente via l'identification $\mathbb{P}^1(K) \cong K \cup \{\infty\}$.

Exercice 7 :

a) Montrer que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit naturellement sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

b) Montrer que cette action est fidèle. Identifier le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$.

c) Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X. Une partie F de X est appelée *domaine fondamental* pour l'action de G sur X si elle vérifie :

$$\text{(i) } \overline{F^\circ} = F, \quad \text{(ii) } X = \bigcup_{h \in G} hF, \quad \text{(iii) } \forall g \in G \setminus \{1\},\ F^\circ \cap (gF)^\circ = \emptyset.$$

Soit $D = \{z \in \mathcal{H} \ : \ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$.

i) En maximisant la partie imaginaire des éléments d'une orbite $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$, montrer que D vérifie la propriété (ii).

ii) Montrer que D est un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$.

iii) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 8 :
Soit K un corps.
Montrer que les homographies sont exactement les K-automorphismes du corps $K(T)$ (les automorphismes de $K(T)$ dont la restriction à K est l'identité), i.e. que $\mathrm{Aut}_K(K(T)) \cong \mathrm{PGL}_2(K)$.

Exercice 9 : $\star\star\star$
Soit G un groupe simple d'ordre 360.

a) Montrer que G admet dix 3-Sylow.

b) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$. On supposera désormais que G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$.

c) Soit S un 3-Sylow de G. Montrer que S n'est pas cyclique, et que l'on peut supposer que $N_G(S)$ est le stabilisateur de 10 dans $G \subset \mathfrak{A}_{10}$.

d) Montrer que tout élément non trivial de S ne fixe aucun point de $\{1, 2, \dots, 9\}$.

e) Montrer que l'on peut supposer que S est engendré par les éléments $x = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8\,9)$ et $y = (1\,4\,7)(2\,5\,8)(3\,6\,9)$.

f) Montrer que le stabilisateur P de 1 dans $N_G(S)$ est cyclique d'ordre 4 et est un 2-Sylow de $N_G(S)$. On note z un générateur de P.

g) Montrer qu'on peut supposer que $z = (2\,4\,3\,7)(5\,6\,9\,8)$.

h) Soit T un 2-Sylow de G contenant z. Montrer que $T = \langle z, t\rangle$, avec t d'ordre 2.

i) Montrer que l'on peut supposer que $t = (1\,10)(2\,3)(5\,6)(8\,9)$.

j) Montrer que $G = \langle x, y, z, t\rangle$.

k) Que peut-on en conclure pour les groupes simples d'ordre 360 ?

l) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \cong \mathfrak{A}_6$.