TD7 : Représentations des groupes finis I

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps K.

Solution de l'exercice 1. La représentation régulière de G sur K répond à la question.
De façon équivalence, le théorème de Cayley assure que G se plonge dans le groupe des permutations de G, et ce dernier groupe se plonge dans un groupe linéaire via les matrices de permutation.

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe distingué dans G, notons $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H.

a) Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Solution de l'exercice 2.

a) C'est évident : la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.
b) Plus généralement, si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, et ρ une représentation de G', on a toujours l'implication suivante : si $\rho \circ f$ est irréductible (comme représentation de G), alors ρ est irréductible. En effet, tout sous-espace stable par G' est stable par G puisque l'action de G se factorise par G'. En revanche, la réciproque est fausse en général si f n'est pas surjective (prendre pour G le groupe trivial, pour G' un groupe non abélien et pour ρ une représentation irréductible de dimension ≥ 2).
Dans la situation de l'exercice, en revanche, le morphisme π est surjectif. Montrons le sens réciproque : on suppose ρ irréductible. Soit W un sous-espace strict stable par G. Pour tout $x \in G/H$, il existe $g \in G$ tel que $\pi(g) = x$. Comme W est stable par g, il est stable par x, donc W est stable par tout élément de G/H. Comme ρ est irréductible, $W = 0$, donc $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 3 : $\star$
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Solution de l'exercice 3. Soit W un espace vectoriel de base $\{e_g\}_{g\in G}$ (par exemple, $W = K^G$ et e_g est l'indicatrice de g). Rappelons que la représentation regulière ρ_R de G opère sur W par $\rho_R(h)e_g = e_{hg}$. Considérons l'application linéaire ϕ définie sur la base (e_g) par :

$$\begin{array}{rcl} \phi : W & \longrightarrow & V \\ e_g & \mapsto & \rho(g)v \end{array}$$

Comme $(\rho(g)v)_{g\in G}$ est une base de V, ϕ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, et par définition, ϕ est G-équivariant, donc ϕ est un isomophisme entre ρ et ρ_R.

Exercice 4 : $\star\star$
Soit V une représentation complexe d'un groupe fini G. On note S la représentation $S^2(V)$ et A la représentation $\bigwedge^2 V$.

a) Calculer les caractères χ_S et χ_A de S et de A en fonction du caractère χ_V de V.

b) Calculer $\chi_{V\otimes V}$ en fonction de χ_A et χ_S.

Solution de l'exercice 4.

a) Soit $g \in G$. Il existe une base $(e_i)_{i\leq i\leq n}$ de V formée de vecteurs propres de g. Pour tout i, on note λ_i la valeur propre correspondant à e_i. Alors par définition, on a $\chi_V(g) = \sum_i \lambda_i$.
Or $S^2(V)$ admet comme base $(e_i \cdot e_j)_{1\leq i\leq j\leq n}$, et pour tout $i \leq j$, $g(e_i \cdot e_j) = \lambda_i\lambda_j e_i \cdot e_j$, donc les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres pour g, ce qui assure que $\chi_S(g) = \sum_{i\leq j} \lambda_i\lambda_j$.
Donc

$$\chi_S(s) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 + \sum_i \lambda_i^2\right) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)}{2}\,.$$

De même, $\bigwedge^2(V)$ admet comme base $(e_i \wedge e_j)_{1\leq i<j\leq n}$, et pour tout $i < j$, $g(e_i \wedge e_j) = \lambda_i\lambda_j e_i \wedge e_j$, donc les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres pour g, ce qui assure que $\chi_A(g) = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j$. Donc

$$\chi_A(s) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 - \sum_i \lambda_i^2\right) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)}{2}\,.$$

Donc finalement, on a

$$\chi_S = \frac{\chi_V^2 + \chi_V(.^2)}{2}$$

et

$$\chi_A = \frac{\chi_V^2 - \chi_V(.^2)}{2}\,.$$

b) On sait que l'on a un isomorphisme de représentations $V \otimes V \simeq S^2(V) \otimes \bigwedge^2(V)$, ce qui assure que

$$\chi_{V\otimes V} = \chi_S + \chi_A\,.$$

Remarque : En combinant a) et b), on retrouve bien la formule $\chi_{V\otimes V} = \chi_V^2$.

Exercice 5 : $\star\star$
Soit $G = \mathfrak{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. On considère l'application $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ définie par $T(g)e_\tau = e_{g\tau g^{-1}}$.

a) Montrer que T est une représentation de G.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1,2)} + je_{(1,3)} + j^2 e_{(2,3)}, \qquad \beta = e_{(1,2)} + j^2 e_{(1,3)} + je_{(2,3)}.$$

Montrer que W est une sous-G-représentation de V. Est-ce que W est irréductible ?

c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ces sous-espaces.

d) Mêmes questions en remplaçant T par la représentation régulière R.

e) Soit U une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ de dimension 2. Décomposer $U \otimes U$, $S^2(U)$ et $\bigwedge U$ en somme de représentations irrédutibles.

Solution de l'exercice 5.

a) C'est évident.

b) Le groupe $\mathfrak{S}_3$ est engendré par $(1,2)$ et $(1,2,3)$. Il suffit donc de montrer que l'espace engendré par α et β est stable par $T((1,2))$ et $T((1,2,3))$. Un simple calcul donne $T((1,2))(\alpha) = \beta$, $T((1,2))(\beta) = \alpha$, $T((1,2,3))(\alpha) = j\alpha$ et $T((1,2,3))(\beta) = j^2\beta$. Un simple calcul montre qu'aucun sous-module de W de dimension 1 n'est stable par $\mathfrak{S}_3$ et donc W est irréductible.

c) Remarquons que si C est une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$, alors $\sum_{g \in C} e_g$ est stable par T. On trouve ainsi trois sous-espaces stables sous $\mathfrak{S}_3$, à savoir les trois droites :

$$W_1 = \mathbb{C}_{\mathrm{Id}}, \qquad W_2 = \mathbb{C}(e_{(1,2)} + e_{(1,3)} + e_{(2,3)}), \qquad W_3 = \mathbb{C}(e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)}) .$$

Enfin, si on note ε la signature, on obtient :

$$T(g)(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)}) = \varepsilon(g)(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)})$$

(il suffit de le vérifier pour $(1,2)$ et $(1,2,3)$). Donc l'espace $W_4 = \mathbb{C}(e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)})$ est stable par $\mathfrak{S}_3$. On a finalement :

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W \cong \mathrm{triv}^{\oplus 3} \oplus \mathrm{sign} \oplus W .$$

La représentation triviale apparaît trois fois dans cette décomposition (W_1, W_2 et W_3), la signature une fois (W_4) et l'unique (voir plus bas) représentation irréductible de dimension 2 une fois (W).

d) On note $E = \mathcal{F}(G)$ et $(\delta_\sigma)_{\sigma \in G}$ la base canonique de la représentation régulière E de G. Pour tout $\sigma, \tau \in G$, on a $\sigma \cdot \delta_\tau = \delta_{\sigma\tau}$.
On constate que $E_1 = \mathbb{C}\left(\sum_{\sigma \in G} \delta_\sigma\right)$ est une droite fixe par G, sur laquelle G agit trivialement ; E_1 est donc une sous-représentation de E isomorphe à la représentation triviale. De même, $E_2 := \mathbb{C}\left(\sum_{\sigma \in G} \epsilon(\sigma)\delta_\sigma\right)$ est une autre droite de E stable par G, sur laquelle G agit selon la signature : donc E_2 est isomorphe à la représentation "signature" notée sign.
Ensuite, on définit les deux sous-espaces vectoriels suivants de E, d'intersection triviale :

$$E_3 := \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\left(e_{\mathrm{id}} + j\delta_{(123)}) + j^2\delta_{(132)} ; \delta_{(12)} + j\delta_{(23)} + j^2\delta_{(13)}\right)$$

et

$$E_4 := \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\left(e_{\mathrm{id}} + j^2\delta_{(123)}) + j\delta_{(132)} ; \delta_{(12)} + j^2\delta_{(23)} + j\delta_{(13)}\right) .$$

On voit facilement que E_3 et E_4 sont stables par G, et que ce sont des représentations irréductibles de G de dimension 2. Enfin, il est clair que ces deux représentations de G sont isomorphes.
Par conséquent, E se décompose de la façon suivante en sous-représentations irréductibles :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4 \cong \mathrm{triv} \oplus \mathrm{sign} \oplus E_3^{\oplus 2} .$$

Le cours assure alors que E_3 est l'unique représentation irréductible de dimension 2 de G, donc $E_3 \cong W$.

e) On sait par la question d) que G admet une unique représentation irréductible de dimension 2, donc U est isomorphe à W. Une base de l'espace de dimension 4 $W \otimes W$ est donnée par $\alpha \otimes \alpha$, $\alpha \otimes \beta$, $\beta \otimes \alpha$ et $\beta \otimes \beta$. Or les calculs de la question b) assurent que $W_1 := \mathbb{C}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$ est une sous-représentation triviale, $W_2 := \mathbb{C}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)$ est une sous-représentation donnée par la signature, et $W_3 := \mathrm{vect}(\alpha \otimes \alpha, \beta \otimes \beta)$ est une sous-représentation irréductible de dimension deux isomorphe à $U \cong W$. Donc $U \otimes U \simeq W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, avec W_1 triviale, W_2 la signature et $W_3 = U$. De même, $S^2(U)$ admet pour base $\alpha \cdot \alpha$, $\alpha \cdot \beta$ et $\beta \cdot \beta$, donc on voit que $S^2(U) = W_1 \oplus W$ avec les notations précédentes. Enfin, on a des ismomorphismes évidents de représentations $\bigwedge U = \bigwedge^0 U \oplus \bigwedge^1 U \oplus \bigwedge^2 U \simeq W_1 \oplus U \oplus \bigwedge^2 U$, or $\bigwedge^2 U$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 de base $\alpha \wedge \beta$, donc c'est la représentation signature W_2.

Exercice 6 :
Soit p un nombre premier et soit K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur K.

Solution de l'exercice 6. On sait que G admet un sous-groupe distingué H d'indice p. Donc $G/H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Puisque K est algébriquement clos de caractéristique $\neq p$, le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples, donc les racines p-ièmes de l'unité dans K^* forment un sous-groupe cyclique d'ordre p, isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On obtient donc une injection de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans K^*. Le morphisme composé $G \mapsto G/H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto K^*$ est donc un caractère non trivial de G, i.e. une représentation non triviale de dimension 1 de G sur K.

Exercice 7 :
Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall g \in G \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Solution de l'exercice 7. Il suffit de montrer que $|G|$ divise $\chi(1)$. On calcule $\langle \mathrm{triv}, \chi \rangle$, où triv désigne la représentation triviale de G. On a que $\langle \mathrm{triv}, \chi \rangle = \chi(1)/|G|$ et donc $|G|$ divise $\chi(1)$.

Exercice 8 :

a) Soit A un groupe fini abélien et χ un caractère de A sur $\mathbb{C}$. Montrer

$$\sum_{a \in A} |\chi(a)|^2 \geq |A| \cdot \chi(1).$$

b) Soit G un groupe fini et soit A un sous-groupe abélien de G d'indice $n \geq 1$. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G, on a $\chi(1) \leq n$. Que peut-on dire si $\chi(1) = n$?

Solution de l'exercice 8.

a) On décompose le caractère χ en somme de caractères irréductibles : $\chi = \sum_i a_i \chi_i$. Il faut donc montrer que $\sum_i a_i^2 \geq \sum_i a_i$ ce qui est vrai car $a_i \in \mathbb{N}$ pour tout i.

b) Notons ψ la restriction du caractère χ à A. D'après a), on a $\sum_{x \in A} |\psi(x)|^2 \geq |A|\psi(1) = |A|\chi(1)$. D'autre part, puisque χ est irréductible, on a $\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |G|$. On a donc $|G| \geq \sum_{x \in A} |\chi(x)|^2 = |A|\chi(1)$, d'où $\chi(1) \leq n$.
Si $\chi(1) = n$, alors $\sum_{x \in G \setminus A} |\chi(x)|^2 = 0$, c'est-à-dire $\chi(x) = 0$ pour tout $x \in G \setminus A$.

Exercice 9 : $\star\star$
Soit G un groupe fini et soient ϕ et ψ des caractères de G dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que si ψ est de degré 1, $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.

b) Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\overline{\psi}$ n'est pas irréductible.

c) Soit ϕ un caractère irréductible de G. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Solution de l'exercice 9.

a) Calculons le produit scalaire : $\langle \phi\psi, \phi\psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\psi(g)\overline{\phi(g)\psi(g)}$. Puisque ψ est de degré 1, on a $\psi(g)\overline{\psi(g)} = 1$ pour tout $g \in G$. On a donc que $\langle \phi\psi, \phi\psi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle$, et donc $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.

b) On a $\langle \mathrm{triv}, \psi\overline{\psi} \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$. Si ψ est non irréductible, alors $\langle \psi, \psi \rangle > 1$ et donc triv apparaît dans $\psi\overline{\psi}$ avec multiplicité ≥ 2, donc $\psi\overline{\psi}$ est réductible. Si ψ est irréductible, alors $\langle \mathrm{triv}, \psi\overline{\psi} \rangle = 1$, et donc $\psi\overline{\psi}$ est irréductible si et seulement si $\psi\overline{\psi} = \mathrm{triv}$. Mais cela n'est pas possible car $\psi\overline{\psi}(1) > 1$ parce que ψ est de degré ≥ 2 et $\mathrm{triv}(1) = 1$.

c) D'après a), $\phi\psi$ est irréductible, et donc par hypothèse, $\phi\psi = \phi$, d'où le résultat.

Exercice 10 : $\star\star$

a) Établir la table de caractère de D_4.

b) Établir la table de caractère de $\mathbf{H}_8$.

c) Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 10.

a) On note $G = D_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, s, r\cdot s, r^2\cdot s, r^3\cdot s\}$. On vérifie que G admet cinq classes de conjugaison, à savoir $\{\mathrm{id}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$, $\{r\cdot s, r^3\cdot s\}$, $\{s, r^2 s\}$. On a $D(G) = \{\mathrm{id}, r^2\}$, donc $G/D(G) = \langle \overline{r}, \overline{s} : \overline{r}^2 = \overline{s}^2 = 1\,,\, \overline{rs} = \overline{sr}\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc G admet quatre représentations de dimension 1 correspondant aux quatre morphismes de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$. On en déduit que la cinquième représentation irréductible de G est de dimension 2. Et son caractère se déduit des quatre caractères précédents par orthogonalité. On obtient la table de caractères suivante :

D_4	1 $\{\mathrm{id}\}$	1 $\{r^2\}$	2 $\{r, r^3\}$	2 $\{r\cdot s, r^3\cdot s\}$	2 $\{s, r^2\cdot s\}$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
$\chi_3 = \chi_1\chi_2$	1	1	-1	-1	1
χ_ρ	2	-2	0	0	0

Remarquons que la représentation ρ de dimension 2 peut aussi s'obtenir géométriquement en voyant D_4 comme le groupe des isométries d'un carré dans un plan euclidien, ce qui permet de retrouver la dernière ligne de la table.

b) On note $G = \mathbf{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. On vérifie que G admet cinq classes de conjugaison, à savoir $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$. On a $D(G) = \{\pm 1\}$, donc $G/D(G) = \langle \overline{i}, \overline{j} : \overline{i}^2 = \overline{j}^2 = 1\,,\, \overline{ij} = \overline{ji}\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc G admet quatre représentations de dimension 1 correspondant aux quatre morphismes de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$. On en déduit que la cinquième représentation irréductible de G est de dimension 2. Et son caractère se déduit des quatre caractères précédents par orthogonalité. On obtient la table de caractères suivante :

$\mathbf{H}_8$	1 $\{1\}$	1 $\{-1\}$	2 $\{\pm i\}$	2 $\{\pm j\}$	2 $\{\pm k\}$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
$\chi_3 = \chi_1\chi_2$	1	1	-1	-1	1
χ_ρ	2	-2	0	0	0

C'est donc exactement la même table de caractères que D_4.

c) Ces exemples assurent que la table de caractères ne détermine pas la classe d'isomorphisme d'un groupe fini.

Remarque : la représentation irréductible de dimension 2 de D_4 est définie sur $\mathbb{R}$, alors que $\mathbf{H}_8$ n'admet pas de représentation irréductible de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 :

a) En considérant la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, construire une (sous-)représentation irréductible de dimension 3, de caractère valant $(3, 1, 0, -1, -1)$ sur les différentes classes de conjugaisons.

b) Dresser les tables de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$ et interpréter géométriquement certaines représentations obtenues.

c) Dresser les tables de caractères de $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$ et interpréter géométriquement certaines représentations obtenues.

Solution de l'exercice 11.

a) Considérons le sous-espace V_0 de dimension 3 dans $\mathbb{C}^4$ défini par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Il est clair que V_0 est stable par l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{C}^4$. Montrons que V_0 est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$: soit $0 \neq W \subset V_0$ une sous-représentation. Il existe $v \in W \setminus \{0\}$. Quitte à dilater v et à lui appliquer un élément de $\mathfrak{S}_4$, on peut supposer que $x_1 = 1$. Alors il existe $i \in \{2,3,4\}$ tel que $x_i \neq 1$. Alors $y := (1i)\cdot x$ est dans W, et $x-y$ est un vecteur non nul de W avec deux coordonnées nulles et deux coordonnées non nulles (et donc opposées). Quitte à multiplier par un scalaire et à appliquer une transposition, on voit que $(1,-1,0,0) \in W$. En appliquant différentes transpositions à ce vecteur, on voit que $(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1) \in W$. Or ces trois vecteurs forment une famille libre, donc génératrice, de V_0, donc $W = V_0$ et V_0 est irréductible.

Calculons le caractère de V_0 (ce qui fournira une autre preuve de son irréductibilité) : les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ sont {id}, {transpositions}, {3-cycles}, {bitranspositions} et {4-cycles}. Or on a $\mathbb{C}^4 = V_0 \oplus \mathbb{C}(1,1,1,1) \cong V_0 \oplus \mathrm{triv}$, donc $\chi_{V_0} = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_{\mathrm{triv}} = \chi_{\mathbb{C}^4} - 1$. Enfin, en calculant la trace des matrices correspondantes, on voit que $\chi_{\mathbb{C}^4}(\mathrm{id}) = 4$, $\chi_{\mathbb{C}^4}((12)) = 2$, $\chi_{\mathbb{C}^4}((123)) = 1$, $\chi_{\mathbb{C}^4}((1234)) = 0$ et $\chi_{\mathbb{C}^4}((12)(34)) = 0$. Donc $\chi_{V_0}(\mathrm{id}) = 3$, $\chi_{V_0}((12)) = 1$, $\chi_{V_0}((123)) = 0$, $\chi_{V_0}((1234)) = -1$ et $\chi_{V_0}((12)(34)) = -1$.

b) — La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ s'obtient de la façon suivante : puisque $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ a exactement deux représentations de dimension 1 : la triviale et la signature sign. On dispose ensuite de la représentation V_0 de la question a), qui est irréductible de dimension 3.
On peut également considérer la représentation $V_0 \otimes \mathrm{sign}$, qui est irréductible de dimension 3 par l'exercice 9, et non isomorphe à V_0 (calculer son caractère).
On connaît ainsi quatre des cinq représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$. Pour trouver la dernière (notée V), on peut par exemple utiliser les relations d'orthogonalité pour compléter la table ci-dessous :

$\mathfrak{S}_4$	1 id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1	-1	1
χ_{V_0}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{V_0\otimes\mathrm{sign}}$	3	-1	0	1	-1
χ_V	2	0	-1	0	2

Les deux représentations V_0 et $V_0 \otimes \mathrm{sign}$ irréductibles de dimension 3 correspondent aux l'actions de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{R}^3$ définies respectivement par l'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \xleftarrow{\sim} \mathrm{Isom}^+(\mathrm{Cube}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ (une isométrie directe du cube permute les quatre grandes diagonales dudit cube) et par l'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \xleftarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\text{Tétraèdre}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ (une isométrie du tétraèdre permute les quatre sommets dudit tétraèdre) : on renvoie à l'exercice 10 du TD5 pour une explication détaillée de ces isomorphismes. La représentation V de dimension 2 est définie par l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur un triangle équilatéral de $\mathbb{R}^2$ via le morphisme quotient naturel $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4/K \simeq \mathfrak{S}_3$, où K désigne le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par les bitranspositions.

— Le groupe $\mathfrak{A}_4$ a exactement quatre classes de conjugaison, à savoir celle de id (de cardinal 1), celle de (123) (de cardinal 4), celle de (132) (de cardinal 4), celle de (12)(34) (de cardinal 3). Le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$ est le groupe de Klein engendré par les bitranspositions, et le quotient de $\mathfrak{A}_4$ par son sous-groupe dérivé est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donc $\mathfrak{A}_4$ admet trois représentations de dimension 1. On en déduit que la quatrième représentation irréductible est de dimension 3 et on obtient son caractère par orthogonalité. D'où la table de caractères suivante :

$\mathfrak{A}_4$	1 id	4 (123)	4 (132)	3 (12)(34)
χ_{triv}	1	1	1	1
χ	1	j	j^2	-1
χ^2	1	j^2	j	1
$\chi_{V_0'}$	3	0	0	-1

On constate que la représentation V_0' est la restriction de la représentation standard V_0

de $\mathfrak{S}_4$ et correspond donc à un sous-groupe du groupe des isométries directes du cube en dimension 3.

c) — La table de caractères de $\mathfrak{S}_5$ peut s'obtenir ainsi : ce groupe a exactement sept classes de conjugaison (les classes de id, (12), (12)(34), (123), (1234), (123)(45) et (12345)), il admet exactement deux représentations de dimension 1, qui sont triv et sign. Comme en a), on peut construire une représentation V_0 irréductible de dimension 4 comme sous-représentation de la représentation usuelle de $\mathfrak{S}_5$ sur $\mathbb{C}^5$ par permutation, et son caractère s'obtient comme en a) en faisant $\chi_{\mathbb{C}^5} - 1$. On trouve donc que $\chi_{V_0} = (4, 2, 0, 1, 0, -1, -1)$. Alors $V_0 \otimes \text{sign}$ fournit une quatrième représentation irréductible, de dimension 4 également.
On peut obtenir d'autres représentations irréductibles en considérant $\bigwedge^2 V_0$. L'exercice 4 permet de calculer le caractère de $\bigwedge^2 V_0$ à partir de celui de V_0. On trouve que ce caractère vaut $(6, 0, -2, 0, 0, 0, 1)$. Alors le calcul du carré scalaire de ce caractère assure que $\bigwedge^2 V_0$ est irréductible (de dimension 6).
On peut obtenir une nouvelle représentation irréductible en décomposant $S^2(V_0)$ en irréductibles. Le caractère de $S^2(V_0)$ vaut $(10, 4, 2, 1, 0, 1, 0)$, donc $S^2(V_0)$ n'est pas irréductible. On calcule les produits scalaires de $\chi_{S^2(V_0)}$ avec χ_{triv} et χ_{V_0}, on obtient que $S^2(V_0)$ contient exactement une fois la représentation triviale et exactement une fois la représentation V_0, et une sous-représentation S supplémentaire de la somme des deux précédentes, dont le caractère est $(5, 1, 1, -1, -1, 1, 0)$. Alors S est irrédutible (de dimension 5). ALors S et $S \otimes \text{sign}$ sont les deux représentations manquantes.
On en déduit la table suivante :

$\mathfrak{S}_5$	1 id	10 (12)	15 (12)(34)	20 (123)	30 (1234)	20 (123)(45)	24 (12345)
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1	1
χ_{sign}	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_{V_0}	4	2	0	1	0	-1	-1
$\chi_{V_0 \otimes \text{sign}}$	4	-2	0	1	0	1	-1
χ_S	5	1	1	-1	-1	1	0
$\chi_{S \otimes \text{sign}}$	5	-1	1	-1	1	-1	0
$\chi_{\bigwedge^2 V_0}$	6	0	-2	0	0	0	1

L'interprétation géométrique de ces représentations est difficile.

— Le groupe $\mathfrak{A}_5$ a exactement 5 classes de conjugaison, à savoir celle de id (de cardinal 1), celle de (123) (de cardinal 20, c'est la classe de tous les 3-cycles), celle de (12)(34) (de cardinal 15, c'est la classe de toutes les bitranspositions), celle de (12345) (de cardinal 12) et celle de (21345) (de cardinal 12). On considère les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$ et on regarde si leur restrictions à $\mathfrak{A}_5$ sont irréductibles ou non. Avec les notations du cours, on constate que $\chi_{\text{triv}|_{\mathfrak{A}_5}} = \chi_{\text{sign}|_{\mathfrak{A}_5}}$ est la représentation triviale de $\mathfrak{A}_5$. De même, les restrictions de V_0 et $V_0 \otimes \text{sign}$ sont isomorphes et irréductibles. Et les restrictions de V et $V \otimes \text{sign}$ sont isomorphes et irréductibles. En revanche, la restriction de $\bigwedge^2 V_0$ n'est pas irréductible. On a donc déterminé trois représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$ sur cinq. La formule sur les dimensions assure que les deux représentations restantes, notées W et W', sont de dimension 3. On peut déterminer leur caractère via les relations d'orthogonalité. D'où la table de caractères suivante :

$\mathfrak{A}_5$	1 id	20 (123)	15 (12)(34)	12 (12345)	12 (21345)
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_W	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\chi_{W'}$	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_{V_0}	4	1	0	-1	-1
χ_V	5	-1	1	0	0

On peut montrer que les représentations W et W' de dimension 3 s'obtiennent respectivement via l'isomorphisme $\mathfrak{A}_5 \xleftarrow{\sim} \text{Isom}^+(\text{Dodécaèdre}) \simeq \text{Isom}^+(\text{Icosaèdre}) \subset GL_3(\mathbb{R})$ (voir

TD5, exercice 10), ainsi qu'en composant cette représentation avec l'automorphisme de $\mathfrak{A}_5$ défini par la conjugaison par $(12) \in \mathfrak{S}_5$ (cet automorphisme échange (12345) et (21345)).

Exercice 12 : $\star\star$
Soit p un nombre premier et soit $f \geq 1$ un entier ; on pose $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q\}$.

a) Déterminer la table des caractères de G sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Solution de l'exercice 12.

a) Le groupe G, qui est le groupe affine de la droite affine de $\mathbb{F}_q$, s'insère dans une suite exacte scindée naturelle :
$$0 \to \mathbb{F}_q \to G \to \mathbb{F}_q^* \to 0\,,$$
où le noyau $\mathbb{F}_q$ s'identifie aux translations dans le groupe affine, et le morphisme de droite associe à une application affine sa partie linéaire. On en déduit donc au moins $q-1$ représentations de dimension 1 de G via les caractéres de $\mathbb{F}_q^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Or on vérifie qu'il y a exactement q classes de conjugaison dans G (on a deux classes correspondant à $a = 1$, selon que $b = 0$ ou $b \neq 0$, et pour tout $a \neq 1$, et exactement une classe pour toute valeur de $a \neq 0, 1$), donc il reste une représentation irréductible V de dimension supérieure à déterminer. Son caractère vaut $q-1$ sur $\{1\}$ (donc sa dimension vaut $q-1$) et -1 sur $\{x \mapsto x + b \mid b \in \mathbb{F}_q^\times\}$. On a donc la table de caractères de G suivante, où $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ est un générateur de $\mathbb{F}_q^*$:

G	1	$q-1$	q	q	$\dots$	q
	id	translations	$x \mapsto \zeta x$	$x \mapsto \zeta^2 x$	$\dots$	$x \mapsto \zeta^{q-2} x$
χ_{triv}	1	1	1	1	$\dots$	1
χ_1	1	1	ζ	ζ^2	$\dots$	ζ^{q-2}
χ_2	1	1	ζ^2	ζ^4	$\dots$	$\zeta^{2(q-2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
χ_{q-2}	1	1	ζ^{q-2}	$\zeta^{2(q-2)}$	$\dots$	$\zeta^{(q-2)(q-2)}$
χ_V	$q-1$	-1	0	0	$\dots$	0

b) On peut par exemple considérer la représentation naturelle de G sur $W := \mathbb{C}^{\mathbb{F}_q}$ définie par $g \cdot [x] := [g(x)]$, où $[x] \in W$ désigne la fonction indicatrice de $\{x\}$, pour $x \in \mathbb{F}_q$. Alors $\dim(W) = q$, et l'hyperplan $V := \{\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \lambda_x [x] : \sum_x \lambda_x = 0 \text{ dans } \mathbb{C}\}$ est une sous-représentation de W de dimension $q-1$. On voit facilement que V n'admet pas de droite stable, donc V est la représentation irréductible de dimension $q-1$ recherchée.

On peut aussi la voir comme la représentation naturelle sur
$$V = \left\{f : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{\mathbb{F}_q} f(x) = 0\right\}.$$

Exercice 13 :
Soient G_1 et G_2 deux groupes finis. Déterminer l'ensemble des représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$ en fonction des représentations irréductibles de G_1 et G_2.

Solution de l'exercice 13. Si V_1 et V_2 sont des représentations de G_1 et G_2 respectivement, le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est naturellement une représentation de $G_1 \times G_2$ pour l'action $(g_1, g_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) := (g_1 \cdot v_1) \otimes (g_2 \otimes v_2)$.
On voit facilement que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors $V_1 \otimes V_2$ est une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$: pour cela, on peut par exemple remarquer que $\chi_{V_1 \otimes V_2}(g_1, g_2) = \chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2)$.
Or il est clair que le nombre de classes de conjugaison de $G_1 \times G_2$ est le produit du nombre de classes de conjugaison de G_1 par celui de G_2. Il suffit donc de montrer que pour V_i, W_i représentations

irréductibles de G_i, les représentations $V_1 \otimes V_2$ et $W_1 \otimes W_2$ sont isomorphes comme représentations de $G_1 \times G_2$ si et seulement $V_i \cong W_i$ pour $i = 1$ et 2. Or un calcul simple assure que l'on a

$$\langle \chi_{V_1 \otimes V_2}, \chi_{W_1 \otimes W_2} \rangle = \langle \chi_{V_1}, \chi_{W_1} \rangle \langle \chi_{V_2}, \chi_{W_2} \rangle ,$$

ce qui implique que $V_1 \otimes V_2$ et $W_1 \otimes W_2$ ne sont pas isomorphes si V_1 et W_1 (ou V_2 et W_2) ne sont pas isomorphes.

Exercice 14 : $\star\star$
Soient p un nombre premier, G un p-groupe fini et K un corps de caractéristique p.

a) Montrer que toute représentation linéaire de G sur un K-espace vectoriel non nul admet des vecteurs fixes non nuls.
b) Montrer que toute représentation irréductible de G à coefficients dans K est isomorphe à la représentation triviale.

Solution de l'exercice 14.

a) Soit V une telle représentation. On note $k \cong \mathbb{F}_p$ le sous-corps premier de K et on fixe un vecteur non nul $v \in V$. On définit $W \subset V$ comme le sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de V engendré par les $g \cdot v$, g décrivant G. Alors W est une sous-$\mathbb{F}_p$-représentation de dimension finie de V. Alors l'équation aux classes pour l'action de G sur W assure que

$$|W^G| \equiv |W| \ [p] ,$$

donc p divise $|W^G|$. Or $0 \in W^G$, donc $W^G \neq \{0\}$, donc $V^G \neq \{0\}$.
b) Soit V une représentation irréductible de G sur K. La question a) assure que V admet un vecteur fixe non nul $v \in V$. Donc $Kv \subset V$ est une sous-représentation triviale de V, donc par irréductibilité, $V = Kv$ est la représentation triviale de G.

Exercice 15 : $\star\star$
Soient G un groupe fini, χ le caractère d'une représentation et $K_\chi := \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.

a) Montrer que K_χ est un sous-groupe distingué de G.
b) Montrer que G est simple si et seulement si $K_\chi = \{e\}$ pour tout caractère irréductible $\chi \neq 1$.

Solution de l'exercice 15.

a) Montrons que $K_\chi = \ker(\rho)$, où ρ est la représentation dont χ est le caractère. Soit $g \in K_\chi$. Alors $\rho(g)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, qui sont des racines de l'unité. Alors $\chi(g) = \chi(e)$ se réécrit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$, ce qui implique par inégalité triangulaire que les λ_i sont tous égaux, et puisque leur somme vaut n, $\lambda_i = 1$ pour tout i, donc $\rho(g) = \mathrm{id}$. Donc $K_\chi \subset \ker(\rho)$. L'inclusion réciproque est évidente.
b) Montrons que les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$, où $\chi_1, \dots, \chi_r$ sont les caractères irréductibles de G, et $I \subset \{1, \dots, r\}$. Soit N un sous-groupe distingué de G. Il existe une représentation fidèle V de G/N (par exemple la représentation régulière). On voit V comme une représentation ρ de V de noyau N. Alors V se décompose en somme de représentations irréductibles de G : notons $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ les entiers tels que les représentations irréductibles de caractères χ_{i_j} sont exactement celles qui apparaissent dans la décomposition de (V, ρ). Comme le noyau de ρ est exactement l'intersection des noyau des représentations irréductibles qui apparaissent dans cette décomposition, la question a) assure que

$$N = \ker(\rho) = \bigcap_{j=1}^k \ker(\chi_{i_j}) = \bigcap_{j=1}^k K_{\chi_{i_j}} .$$

Donc les sous-groupe distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$, avec I décrivant les parties de $\{1, \dots, r\}$.
D'où le critère de simplicité demandé.

Exercice 16 :
Soit G un groupe fini et soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit ρ la représentation de permutation sur $\mathbb{C}$ définie par X et soit χ son caractère.

a) Montrer la décomposition $\rho = 1 \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale 1.

On fait opérer diagonalement G sur le produit $X \times X$ en posant $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$.

b) Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est égal à χ^2.

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) l'action de G sur X est doublement transitive ;

(ii) on a l'égalité $\langle \chi^2, 1\rangle = 2$;

(iii) la représentation θ est irréductible.

Solution de l'exercice 16.

a) On a par la formule de Burnside :

$$\langle \chi, 1\rangle = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_G \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_G |\mathrm{Fix}\, g| = 1\,,$$

donc la représentation triviale apparaît avec multiplicité 1 dans la décomposition en irréductibles de ρ.

b) L'application bilinéaire naturelle et G-équivariante $\mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^X \to C^{X\times X}$ définie par $(f, g) \mapsto ((x_1, x_2) \mapsto f(x_1)g(x_2))$ induit un isomorphisme de G-représentations $\mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X \simeq \mathbb{C}^{X\times X}$, ce qui assure le résultat.

c) En utilisant la question b), le même raisonnement qu'en a) donne l'équivalence entre (i) et (ii). De plus, si ψ est le caractère de θ, on a $\chi^2 = 1 + 2\psi + \psi^2$, donc

$$\langle \chi^2, 1\rangle = \langle 1, 1\rangle + 2\langle \psi, 1\rangle + \langle \psi^2, 1\rangle = 1 + 0 + \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \psi^2(g) = 1 + \langle \psi, \psi\rangle\,,$$

où la dernière égalité provient du fait que ψ est à valeurs réelles (puisque ρ est définie sur $\mathbb{R}$, χ est à valeurs réelles, donc ψ aussi).

L'équivalence entre (ii) et (iii) est alors claire.

Exercice 17 : ⋆⋆⋆

a) Soit G un groupe abélien (éventuellement infini) et (V, ρ) une représentation complexe irréductible de G (de dimension éventuellement infinie). Sous quelles hypothèses cette représentation est-elle de dimension 1 ? Est-ce toujours le cas ?

b) Soit K un corps de caractéristique nulle, G un groupe (éventuellement infini) et (V, ρ) une représentation de G sur K (de dimension éventuellement infinie). Sous quelles hypothèses cette représentation est-elle somme directe de sous-représentations irréductibles ? Est-ce toujours le cas ?

Solution de l'exercice 17.

a) i) Si le groupe G est fini, $\dim(V) = 1$ même si la dimension de V est infinie, car V contient une sous-représentation non nulle de dimension finie, obtenue en fixant un vecteur de v et en prenant le sous-espace vectoriel engendré par l'orbite de v sous G.

ii) Si la représentation (V, ρ) est de dimension finie n et le groupe G quelconque, alors $\dim(V) = 1$: le sous-groupe $\rho(G)$ de $\mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe abélien formé d'endomorphismes trigonalisables, donc les éléments de $\rho(G)$ sont cotrigonalisables, ce qui assure que G admet une droite stable dans $\mathbb{C}^n$, donc $n = 1$ par irréductibilité.

iii) Si le cardinal de G est strictement inférieur à celui de $\mathbb{C}$ (par exemple si G est un groupe abélien de type fini), alors $\dim(V) = 1$.

Pour montrer ce résultat, on étend d'abord le lemme de Schur à de tels groupes. Soit V une représentation irréductible de G et $\pi : V \to V$ un morphisme de représentations. Tout d'abord, il est clair que tout morphisme non nul de représentations $V \to V$ est un isomorphisme ($\mathrm{Ker}(\pi)$ et $\mathrm{Im}\,(\pi)$ sont des sous-représentations de V). Supposons que π ne soit pas une homothétie. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on dispose de l'isomorphisme $\pi_\lambda := (\pi - \lambda)^{-1} : V \to V$. On montre alors facilement que pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, les vecteurs $(\pi_\lambda(v))_{\lambda \in \mathbb{C}}$ forment une famille libre dans V. Donc la dimension de V est supérieure ou égale au cardinal de $\mathbb{C}$. Or V est engendré par l'orbite $G \cdot v$ de v, qui est de cardinal strictement inférieur à celui de $\mathbb{C}$. On a donc une contradiction, ce qui assure que π est une homothétie.

On déduit alors facilement du lemme de Schur le fait que sous les hypothèses de a)ii), toute représentation irréductible de G est de dimension 1 : si (V, ρ) est une telle représentation, pour tout $g \in G$, $\rho(g) : V \to V$ est un morphisme de représentations irréductibles, donc c'est une homothétie, et on conclut facilement comme en ii).

iv) En général, $\dim(V) \neq 1$. On peut construire un exemple de la façon suivante : considérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V = \mathbb{C}(T)$ et le groupe abélien (multiplicatif) $G = \mathbb{C}(T)^*$. Alors G agit linéairement sur V par multiplication (à gauche), et cette action est transitive sur les vecteurs non nuls de V. Cela assure que la représentation $G \to \mathrm{GL}(V)$ qui s'en déduit est irréductible et de dimension infinie.

b) i) Si G est fini, la réponse est positive. En effet, tout vecteur de la représentation V est contenu dans une sous-représentation de dimension finie, ce qui assure que V est somme (pas directe a priori) de sous-représentations irréductibles. Le lemme de Zorn assure alors que V est somme directe de sous-représentations irréductibles (considérer les sous-familles en somme directe dans la décomposition précédente : elles forment bien un ensemble inductif).

ii) Si G est infini, la réponse est négative en général. Un contre-exemple est donné par $G = \mathbb{Z}$ et sa représentation de dimension 2 sur le corps K définie par $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(K)$ qui envoie $n \in \mathbb{Z}$ sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que cette représentation n'est pas irréductible, (on a une droite stable évidente), mais que celle-ci ne se décompose pas en somme de représentations irréductibles (si c'était le cas, la matrice $\rho(1)$ serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas).