TD8 : Produit tensoriel

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit K un corps, et soient A et B des K-algèbres.

a) Définir une structure de K-algèbre sur $A \otimes_K B$.

b) Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.

c) Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes_K K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.

Solution de l'exercice 1.

a) On sait que $A \otimes_K B$ est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel. Il reste à définir la multiplication. Pour cela, on remarque par exemple que la multiplication sur A est une application bilinéaire $A \times A \to A$, donc elle induit une application linéaire $m_A : A \otimes A \to A$. On dispose donc d'une application linéaire naturelle

$$m_A \otimes m_B : (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \to A \otimes B$$

définie sur les tenseurs purs par $(m_A \otimes m_B)(a \otimes a' \otimes b \otimes b') = aa' \otimes bb'$. Alors la commutativité et l'associativité du produit tensoriel permettent d'identifier cette application à une application linéaire

$$m_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B\,,$$

correspondant à une application bilinéaire $m : (A\otimes B)\times(A\otimes B) \to A\otimes B$ qui est la multiplication souhaitée. Par construction, elle vérifie $m(a \otimes b, a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$.

En utilisant le fait que les multiplications m_A et m_B munissent A et B d'une structure de K-algèbre, il est facile de vérifier que m munit $A \otimes B$ d'une structure de K-algèbre : par exemple, on vérifie que

$$(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2)\, a' \otimes b' = (a_1 \otimes b_1)(a' \otimes b') + (a_2 \otimes b_2)(a' \otimes b') = a_1a' \otimes b_1b' + a_2a' \otimes b_2b'\,,$$

et que K est central dans l'algèbre $A \otimes B$ ainsi définie.

Une variante consiste à considérer, pour tout $(a, b) \in A \times B$, l'application bilinéaire $m_{a,b} : A \times B \to A \otimes B$ définie par $(a', b') \mapsto aa' \otimes bb'$. Elle induit naturellement une application linéaire $m_{a,b} : A \otimes B \to A \otimes B$. Il est facile de voir que l'application $m : (a, b) \mapsto m_{a,b}$ est une application bilinéaire $m : A \times B \to \mathrm{End}_K(A \otimes B)$, donc elle induit une application linéaire $M : A \otimes B \to \mathrm{End}_K(A \otimes B)$. Il est alors clair que M induit une application bilinéaire $M' : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$, qui est la multiplication souhaitée.

b) L'application naturelle $K[X] \times K[Y] \to K[X, Y]$ définie par $(P(X), Q(Y)) \mapsto P(X)Q(Y)$ est clairement bilinéaire, donc elle induit une application linéaire $\varphi : K[X] \otimes_K K[Y] \to K[X, Y]$. Il est facile de voir que φ est un morphisme de K-algèbres (pour la structure de K-algèbre définie en a)).

On voit ensuite que φ envoie la base $(X^i \otimes Y^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de $K[X]\otimes K[Y]$ sur la base $(X^iY^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de $K[X, Y]$, donc φ est un isomorphisme.

On peut également considérer l'application linéaire $\psi : K[X, Y] \to K[X] \otimes_K K[Y]$ définie par $\sum_{m,n} \lambda_{m,n}X^mY^n \mapsto \sum_{m,n} \lambda_{m,n}\, X^m \otimes Y^n$ (ces sommes sont finies), et vérifie que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ sont bien les applications identité sur chacun des espaces en question.

c) On dispose comme en b) d'une application linéaire naturelle $\widetilde{\varphi} : K(X) \otimes_K K(Y) \to K(X,Y)$, définie par $\widetilde{\varphi}(f(X) \otimes f(Y)) = f(X)g(Y)$. On voit que l'image de $\widetilde{\varphi}$ est incluse dans le sous-espace strict

$$V := \left\{ R(X,Y) \in K(X,Y) : \exists (Q_1(X), Q_2(Y)) \in K[X] \times K[Y] \, , \, R(X,Y)Q_1(X)Q_2(Y) \in K[X,Y] \right\} .$$

Ceci montre bien que $\widetilde{\varphi}$ n'est pas surjective, puisque par exemple l'élément $\frac{1}{X+Y} \in K(X,Y)$ n'est pas dans V.

Définissons

$$\widetilde{\psi} : \begin{array}{ccc} V & \to & K(X) \otimes_K K(Y) \\ \dfrac{\sum_{m,n} \lambda_{m,n} X^m Y^n}{Q_1(X) Q_2(Y)} & \mapsto & \sum_{m,n} \lambda_{m,n} \dfrac{X^m}{Q_1(X)} \otimes \dfrac{Y^n}{Q_2(Y)} \end{array} .$$

On constate facilement que $\widetilde{\psi}$ est bien définie et que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ est l'identité, ce qui assure l'injectivité voulue.

Exercice 2 : $\star$

a) Notons $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbf{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions. Montrer que les $\mathbb{C}$-algèbres $M_2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sont isomorphes.

b) Montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 2.

a) On constate d'abord que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est naturellement munie d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre : on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}i \oplus \mathbb{C}j \oplus \mathbb{C}k$, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, et $ij = -ji = k$.

Par conséquent, il est facile de vérifier que l'application

$$1 \otimes a + i \otimes b + j \otimes c + k \otimes d \mapsto \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbf{H} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

b) On va montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (qui est isomorphe à $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$, puisque pour toute K-algèbre A, on a que $\mathrm{Mat}_n(K) \otimes_K A \simeq \mathrm{Mat}_n(A)$).

On considère la sous-$\mathbb{R}$-algèbre A de dimension 4 de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ engendrée par $1 \otimes 1, i \otimes 1, j \otimes j, k \otimes j$ (on vérifie que le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs est bien une sous-algèbre). Alors l'application linéaire $a : A \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ définie par $a(1 \otimes 1) := I_2$, $a(i \otimes 1) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a(j \otimes j) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a(k \otimes j) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. De même, on définit la sous-$\mathbb{R}$-algèbre B de dimension 4 de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ engendrée par $1 \otimes 1, 1 \otimes j, i \otimes k, i \otimes i$ (on vérifie que le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs est bien une sous-algèbre). Alors on voit que l'isomorphisme linéaire $A \to B$ défini par $1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1$, $i \otimes 1 \mapsto 1 \otimes j$, $j \otimes j \mapsto i \otimes k$ et $k \otimes j \mapsto i \otimes i$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, donc $B \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ comme $\mathbb{R}$-algèbres.

Enfin, les deux sous-$\mathbb{R}$-algèbres A et B commutent dans $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$, donc l'application linéaire naturelle $A \otimes_{\mathbb{R}} B \to \mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ induite par la multiplication dans $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ (i.e. $(a,b) \mapsto ab$) est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. On vérifie enfin que c'est un isomorphisme en calculant les dimensions et en montrant par exemple que l'image contient des générateurs de $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$.

Plus directement, notons $\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose ensuite

$$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(i \otimes 1) = \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad \alpha(j \otimes 1) = \sigma_j \otimes 1, \quad \alpha(k \otimes 1) = \sigma_k \otimes \sigma_j \, .$$

Ces matrices vérifient les mêmes relations que les générateurs de $\mathbf{H}$. Faisons la même chose de manière symétrique :

$$\alpha(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1, \quad \alpha(1 \otimes i) = \sigma_j \otimes \sigma_i, \quad \alpha(1 \otimes j) = 1 \otimes \sigma_j, \quad \alpha(1 \otimes k) = \sigma_j \otimes \sigma_k \, .$$

Cela suffit pour prolonger α en un morphisme d'algèbres $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, dont on vérifie (en calculant les dimensions) que c'est un isomorphisme.

Exercice 3 : $\star\star$

a) Soient U et V des espaces vectoriels (sur un corps K). On note $U^* = \mathrm{Hom}_K(U, K)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs décomposés (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

b) Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Que vaut

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \,,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} ?$$

Solution de l'exercice 3.

a) On définit $\phi : U^* \times V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$ par $\phi(\varphi, v) := \varphi(.)v$. Il est clair que l'application ϕ est bilinéaire, donc elle induit une application $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$. Il est clair que l'image de Φ est exactement le sous-espace $W \subset \mathrm{Hom}_K(U, V)$ des applications linéaires de rang fini. Par construction, les tenseurs décomposés sont envoyés sur les applications linéaires de rang 1. En outre, pour tout $f \in W$, on choisit une base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathrm{Im}\,(f)$, de sorte que $f = \sum_{i=1}^n f_i(.)v_i$, avec $f_i \in U^*$. La formule de changement de bases assure que l'élément $\Psi(f) := \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i \in U^* \otimes_K V$ ne dépend pas de la base (v_i) choisie. Cela permet de définir une application linéaire $\Psi : W \to U^* \otimes_K V$ telle que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, ce qui assure que Φ est injective (d'image W).

Finalement, Φ est un isomorphisme si et seulement si tout application linéaire $U \to V$ est de rang fini si et seulement si U ou V est de dimension finie.

b) La question a) assure que l'on a un isomorphisme canonique $\Phi : E \otimes_K F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(E^*, F)$, et que si pour tout $x \in E \otimes_K F$, on note

$$\mathrm{rg}(x) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \,,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} ,$$

alors on a $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(\Phi(x))$, où le second rang est le rang classique d'une application linéaire. Par conséquent, on voit immédiatement que l'on a

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \dots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \dots, f_n) \in F^n \,,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} = \min\{\dim(E), \dim(F)\} .$$

Remarque : la question plus générale du nombre maximal de tenseurs décomposables dont on a besoin pour écrire un élément quelconque de $E_1 \otimes_K \cdots \otimes_K E_n$, où les E_i sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, est très difficile si $n \geq 3$. Cette question est encore largement ouverte, et la réponse dépend du corps K...

Exercice 4 :

Soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Solution de l'exercice 4. Définissons l'application bilinéaire suivante

$$b : \begin{array}{ccc} (E^*)^n \times E^n & \to & K \\ ((\alpha_i)_i, (x_j)_j) & \mapsto & \det((\alpha_i(x_j))_{ij}) \end{array} .$$

Pour tout $(x_j)_j$, l'application $b(\cdot, (x_j))$ est alternée et passe donc au quotient pour définir $\bigwedge^n E^* \times E^n \to K$. De la même manière, c'est encore alterné en l'autre variable et b induit donc une application

bilinéaire $\overline{b} : \bigwedge^n E^* \times \bigwedge^n E \to K$. Cette dernière est non dégénérée : il suffit de prendre pour $(\alpha_i)_i$ la base duale de (x_i) pour obtenir 1.
L'application $(\alpha_i)_i \mapsto b((\alpha_i), \cdot)$ est l'isomorphisme $\bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ recherché.

Exercice 5 :
Soit $n \geq 1$ un entier, soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Montrer que le dual $(\bigwedge^i E)^*$ de $\bigwedge^i E$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Solution de l'exercice 5. L'application naturelle $\bigwedge^i E \times \bigwedge^{n-i} E \to \bigwedge^n E$ composée avec l'isomorphisme non canonique (voir cours) $\bigwedge^n E \simeq K$ montrent que $(\bigwedge^i E)^*$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6 : ⋆⋆
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et l'ensemble des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Solution de l'exercice 6. Si $f : \bigwedge^n E \to F$, on peut lui associer $(e_i)_i \mapsto f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$.
On peut construire l'application réciproque de la manière suivante : notons $\phi : \bigwedge^n E^* \xrightarrow{\sim} \left(\bigwedge^n E\right)^*$ l'isomorphisme de l'exercice 4. Notons $(f_1, \dots, f_r)$ une base de F et $(f_1^*, \dots, f_r^*)$ la base duale. Si $g : E^n \to F$ est n-linéaire alternée, on lui associe $\sum_j \phi(f_j^* \circ g) f_j$. On vérifie ensuite que c'est bien l'inverse de l'application précédente.

Exercice 7 : ⋆⋆
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel. Soient $u_1, \dots, u_r$ des éléments de E.

a) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_r)$ est libre dans E.
b) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement s'il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \dots, u_r) \neq 0$.

Solution de l'exercice 7.

a) Si on a une relation linéaire non triviale $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$ avec les λ_i dans K, on peut supposer $\lambda_{i_0} = 1$ pour un certain i_0. Alors on a
$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = -\sum_{j \neq i_0} \lambda_j \, u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i_0-1} \wedge u_j \wedge u_{i_0+1} \wedge \dots u_r = 0 \,.$$
Si la famille $(u_i)_i$ est libre, notons F le sous-espace de E engendré par ces vecteurs : la droite $\bigwedge^r F \subseteq \bigwedge^r E$ est alors engendrée par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$.
b) Si $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ est non nul, notons F le sous-espace de E de base $(u_1, \dots, u_r)$. Alors la forme linéaire $\bigwedge^r F \to K$ définie par $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mapsto 1$ peut se prolonger par 0 sur un supplémentaire de $\bigwedge^r F$ dans $\bigwedge^r E$ et on obtient une forme linéaire $f : \bigwedge^r E \to K$ telle que $f(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \neq 0$. La réciproque est évidente.

Exercice 8 :
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

a) Définir une application linéaire "naturelle" $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.
b) Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est $\binom{n}{r}$, et si $n > r$, l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.
c) Si $E = F$ est un K-espace vectoriel de dimension finie n, que dire de $\bigwedge^n u$?

Solution de l'exercice 8.

a) Il s'agit de $\bigwedge^n u : x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n)$.

b) On vérifie que l'image de $\bigwedge^n u$ est $\bigwedge^n \big(\mathrm{Im}\,(u)\big)$, ce qui assure le résultat.

c) On sait que $\bigwedge^n E$ est une droite vectorielle. Donc $\bigwedge^n u$ est une homothétie de la droite $\bigwedge^n E$. Donc $\bigwedge^n u$ est caractérisée par un scalaire $\lambda \in K^*$ tel que pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$, $u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_n) = \lambda x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. En décomposant $u(e_1), \dots, u(e_n)$ sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ et en utilisant le caractère alterné du produit extérieur, on voit que $u(e_1) \wedge \cdots \wedge u(e_n) = \det(u) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, ce qui assure que $\bigwedge^n u$ est l'homothétie de rapport $\det(u)$.

Exercice 9 :
Soient k un corps de caractéristique différente 2 et V un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $z \in \bigwedge^2 V$ un 2-vecteur. On dit que z est décomposable s'il existe $u, v \in V$ tels que $z = u \wedge v$.

a) Supposons $\dim V = 3$. Montrer que z est décomposable si et seulement si

$$z \wedge z = 0 \in \bigwedge^4 V.$$

b) Montrer en dimension quelconque le critère précédent par récurrence sur la dimension de V .

Solution de l'exercice 9.

a) En toute dimension, si z est décomposable, alors $z = u \wedge v$, donc $z \wedge z = u \wedge v \wedge u \wedge v = 0$. Réciproquement, si $\dim V = 3$, on a $\bigwedge^4 V = 0$. Or $\dim \bigwedge^2 V = 3$, et une base de cet espace est donnée par $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$. Donc si $z = \lambda e_1 \wedge e_2 + \mu e_1 \wedge e_3 + \nu e_2 \wedge e_3$, alors on a deux possibilités : soit $\mu = 0$, auquel cas $z = (\lambda e_1 - \nu e_3) \wedge e_2$, soit $\mu \neq 0$ et $z = (e_1 + \frac{\nu}{\mu} e_2) \wedge (\lambda e_2 + \mu e_3)$. Dans les deux cas, z est décomposable, donc tout élément de $\bigwedge^2 V$ est décomposable.

b) On peut supposer $\dim V \geq 4$.
Soit $z \in \bigwedge^2 V$ tel que $z \wedge z = 0$. En utilisant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V et en considérant $W := \mathrm{vect}(e_1, \dots e_{n-1})$, on peut écrire $z = u + v$, avec $u \in \bigwedge^2 W$ et $v = w \wedge e_n$ pour un certain $w \in W$. On a donc $v \wedge v = 0$, et comme $e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l$, avec $i < j < k < l$, est une base de $\bigwedge^4 V$, on voit que $z \wedge z = 0$ implique que $u \wedge u = 0$ et $u \wedge v = 0$. Par récurrence sur la dimension de V, on peut donc supposer que u est décomposable, i.e. $u = a \wedge b$, avec $a, b \in W$. Alors $z \wedge z = 0$ implique que $a \wedge b \wedge w \wedge e_n = 0$, donc la famille (a, b, w, e_n) est liée, donc a, b, w, e_n sont dans un sous-espace F de dimension 3 de V, donc $z = a \wedge b + w \wedge e_n \in \bigwedge^2 F$, donc la question a) assure que z est décomposable.

Exercice 10 : $\star\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et V un K-espace vectoriel de dimension n. Pour tout d, on note $\mathrm{Gr}(d, V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension d.

a) Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension d. Montrer que pour tout k, $\bigwedge^k W$ est naturellement un sous-espace vectoriel de $\bigwedge^k V$.

b) Construire une application naturelle $\varphi : \mathrm{Gr}(d, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

c) Montrer que l'application φ est injective et décrire son image.

d) Montrer que $\mathrm{Gr}(2, K^4)$ est une quadrique projective, dont on déterminera une équation.

e) Montrer que pour tout $2 \leq d \leq n-2$, $\mathrm{Gr}(d, V)$ est une intersection de quadriques projectives, dont on déterminera les équations.

f) Expliciter les équations de $\mathrm{Gr}(2, K^n)$.

g) Décrire $\mathrm{Gr}(1, V)$ et $\mathrm{Gr}(n-1, V)$.

Solution de l'exercice 10.

a) L'inclusion $i : W \to V$ induit une application linéaire $\bigwedge^k i : \bigwedge^k W \to \bigwedge^k V$, et on voit qu'elle est injective en considérant par exemple une base de W complétée en une base de V.

b) Si $W \subset V$ est un sous-espace de dimension d, la question a) assure que $\bigwedge^d W \subset \bigwedge^d V$ est une droite vectorielle, donc un point de $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$. D'où l'application φ recherchée.

c) Tout d'abord, il est clair que l'image de φ est exactement l'ensemble des classes de vecteurs décomposables non nuls $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$ de $\bigwedge^d V$ (si $W \in \mathrm{Gr}(d, V)$, et $e_1, \ldots, e_d$ une base de W, alors $\varphi(W)$ est la classe du vecteur $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$).

Soit $W \in \mathrm{Gr}(d, V)$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de W. On considère l'application $\pi : V \to \bigwedge^{d+1} V$ définie par $v \mapsto e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \wedge v$. Cette application est linéaire et on vérifie qu'elle ne dépend que du vecteur $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$, et même que de la droite engendrée par ce vecteur dans $\bigwedge^d V$. Or Pour tout $v \in V$, on a $\pi(v) = 0$ si et seulement si la famille $(e_1, \ldots, e_d, v)$ est liée (voir exercice 7) si et seulement si $v \in W$. Donc $W = \ker(\pi)$.

Par conséquent, pour toute classe de vecteur décomposable non nul $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_d$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$, il existe un unique sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension d tel que $\varphi(W)$ est la classe de w (et on obtient W comme le noyau de l'application $\pi : V \to \bigwedge^{d+1} V$ définie par $v \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_d \wedge v$). Cela assure que φ est injective.

d) Notons $V = K^4$. L'exercice 9 et la question c) assure que l'image de φ est exactement l'ensemble des classes de vecteurs $z \in \bigwedge^2 V$ tels que $z \wedge z = 0$. On décompose z sur la base $(e_i \wedge e_j)$ de $\bigwedge^2 V$, où (e_i) est la base canonique de V : $z = \sum_{i<j} z_{i,j} e_i \wedge e_j$, on obtient que

$$z \wedge z = 0 \text{ si et seulement si } z_{1,2} \cdot z_{3,4} - z_{1,3} \cdot z_{2,4} + z_{1,4} \cdot z_{2,3} = 0\,.$$

Par conséquent, l'application φ identifie $\mathrm{Gr}(2, V)$ avec la quadrique de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \cong \mathbb{P}(K^6) = \mathbb{P}^5(K)$ d'équation (en coordonnées homogènes dans le repère canonique)

$$z_{1,2} \cdot z_{3,4} - z_{1,3} \cdot z_{2,4} + z_{1,4} \cdot z_{2,3} = 0\,.$$

e) Remarque : dans cette question et dans les suivantes, on n'utilise pas l'hypothèse sur la caractéristique du corps.

Soit $z \in \bigwedge^d V$ non nul. On introduit le sous-espace vectoriel S_z comme le plus petit sous-espace de V tel que $z \in \bigwedge^d S_z$ (on vérifie que celui-ci est bien défini).

Il est clair que $\dim S_z \geq d$.

Vérifions que z est décomposable si et seulement si $\dim S_z = d$: le sens direct est évident, et pour la réciproque, si $\dim S_z = d$, alors $\bigwedge^d S_z$ est une droite de $\bigwedge^d V$ contenant un vecteur décomposable (le vecteur $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$, où (e_i) est une base de S_z), donc z est proportionnel à un vecteur décomposable, donc z est décomposable.

Montrons maintenant que z est décomposé si et seulement si $z \wedge v = 0$ pour tout $v \in S_z$.

— Si z est décomposé, $\dim S_z = d$, et donc pour tout $v \in S_z$, $z \wedge v \in \bigwedge^{d+1} S_z = 0$.

— Supposons z orthogonal à S_z. Supposons alors que z n'est pas décomposé. Alors $\dim S_z = q > d$. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_q)$ de S_z. Alors $z = \sum_I z_I \cdot e_I$, où I décrit les parties à d éléments de $\{1, \ldots, q\}$, et $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ si $I = \{i_1, \ldots, i_d\}$, avec $i_1 < \cdots < i_d$. Comme $z \neq 0$, il existe I_0 tel que $z_{I_0} \neq 0$. Comme $d < q$, il existe $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus I_0$. Comme $e_j \in S_z$, on a
$$0 = z \wedge e_j = \sum_I z_I \cdot e_I \wedge e_j = \sum_{I \not\ni j} \pm z_I \cdot e_{I \cup \{j\}}\,.$$
Or les parties $I \cup \{j\}$, I décrivant les parties de $\{1, \ldots, q\}$ ne contenant pas j, sont deux à deux distinctes, donc la famille des $e_{I\cup\{j\}}$, $I \not\ni j$, est libre, donc $z_I = 0$ pour tout $I \not\ni j$. Donc en particulier $z_{I_0} = 0$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, z est décomposé, d'où l'équivalence recherchée.

Définissons l'application $\mu_z : (V^*)^{d-1} \to V^{**} = V$ par $\mu_z(f_1, \ldots, f_{d-1}) : V^* \to K$, $f \mapsto= z(f_1 \wedge \cdots \wedge f_{d-1} \wedge f)$ (on identifie $\bigwedge^d V = \bigwedge^d (V^{**}) = (\bigwedge^d V^*)^*$).

Montrons que $S_z = \mathrm{Im}\,(\mu_z)$.

— Fixons une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de S_z et complétons-là en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V. Notons (e_i^*) la base duale. Alors pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$ à $d-1$ éléments, on voit par un calcul simple que $\mu_z(e_I^*) \in S_z$ (en écrivant $z = \sum_J z_J \cdot e_J$, il suffit de vérifier que $\mu_{e_J}(e_I^*)$, avec $J \subset \{1, \ldots, r\}$ de cardinal d, est de la forme $\pm e_i$ pour un i entre 1 et r). Donc $\mathrm{Im}\,(\mu_z) \subset S_z$.

— Supposons que $\mathrm{Im}(\mu_z) \neq S_z$. Alors on peut supposer qu'il existe $q < r$ tel que $(e_1, \dots, e_q)$ soit une base de $\mathrm{Im}(\mu_z)$. Alors e_r^* s'annule sur $\mathrm{Im}(\mu_z)$. En utilisant la décomposition mentionnée plus haut $z = \sum_J z_J \cdot e_J$, on voit (par un petit calcul) que le fait que e_r^* s'annule sur $\mathrm{Im}(\mu_z)$ implique que $\sum_I z_{I\cup\{r\}} \cdot e_I = 0$, où I décrit les parties à $d-1$ éléments de $\{1, \dots, r-1\}$. Donc $z_J = 0$ pour tout J contenant r, donc $z \in \bigwedge^d \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{r-1})$, ce qui contredit la minimalité de S_z. D'où l'égalité souhaitée.

Déduisons-en des équations décrivant $\mathrm{Im}(\varphi)$. On déduit des assertions précédentes que $z \in \bigwedge^d V$ non nul est décomposé si et seulement si

$$z \wedge \mu_z(e_I^*) = 0 \text{ pour tout } I \subset \{1, \dots, n\}\,,\ |I| = d-1\,.$$

Les calculs explicites de $\mu_{e_J}(e_I^*)$ assurent alors que les équations précédentes sont des équations quadratiques en les coordonnées z_J de z dans la base des e_J, $J \subset \{1, \dots, n\}$, $|J| = d$.

Cela assure que φ identifie $\mathrm{Gr}(d, V)$ avec une intersection de quadriques projectives dans $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

f) On explicite les équations de la question précédente dans le cas $d = 2$ (ou alors on généralise l'argument de la question d) si la caractéristique n'est pas 2) et on obtient les équations suivantes : φ identifie $\mathrm{Gr}(2, K^n)$ avec l'ensemble des solutions dans $\mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}(K)$ des $\binom{n}{4}$ équations

$$X_{i,j} \cdot X_{k,l} - X_{i,k} \cdot X_{j,l} + X_{i,l} \cdot X_{j,k} = 0\,,\ 1 \le i < j < k < l \le n\,.$$

g) Il est clair $\varphi : \mathrm{Gr}(1, V) \to \mathbb{P}(V)$ est une bijection canonique. De même, l'exercice 5 assure que $\bigwedge^{n-1} V$ s'identifie (non canoniquement) à V^*, et la bijection $\mathbb{P}(\bigwedge^{n-1} V) \cong \mathbb{P}(V^*)$ qui s'en déduit est canonique. On vérifie alors que $\varphi : \mathrm{Gr}(n-1, V) \to \mathbb{P}(V^*)$ est une bijection qui envoie un hyperplan de V sur la droite de V^* formée des formes linéaires de noyau contenant V.

Exercice 11 :

Soit K un corps et soient A et B des K-algèbres graduées.

a) Montrer qu'il existe sur $A \otimes_K B$ une structure naturelle de K-algèbre graduée telle que

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$

On note $A \otimes_K^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue.

b) Soient V et W des espaces vectoriels sur K. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-algèbres

$$\bigwedge(V \oplus W) \simeq \bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W.$$

Solution de l'exercice 11.

a) D'abord, la multiplication ainsi définie est bien associative. Ensuite, la distributivité par rapport à l'addition permet de définir la multiplication sur $A \otimes B$ et de lui fournir la structure d'algèbre voulue (voir aussi l'exercice 1).

b) En tant que K-espaces vectoriels, l'isomorphisme est clair puisque l'on a, pour tout $n \ge 0$, un isomorphisme naturel :

$$\bigwedge^n (V \oplus W) \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^k V\right) \otimes_K \left(\bigwedge^{n-k} W\right),$$

et ce dernier espace est exactement le sous-espace vectoriel de $(\bigwedge V) \otimes_K (\bigwedge W)$ formé des éléments de degré n.

Reste à vérifier la compatibilité avec la multiplication, qui se fait sur les tenseurs indécomposables. Pour cela,

soient $n, n' \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n, 0 \le k' \le n', v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_{k'} \in V, w_{k+1}, \dots, w_n, w'_{k'+1}, \dots, w'_{n'} \in W$.

On calcule le produit suivant dans $\bigwedge(V \oplus W)$:

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n) \wedge (v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{k'} \wedge w'_{k'+1} \wedge \cdots \wedge w'_{n'}) = (-1)^{(n-k)k'} v_I \wedge w_J \,,$$

où on a posé $v_I = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{k'}$ et $w_J = w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n \wedge w'_{k'+1} \wedge \cdots \wedge w'_{n'}$.
Or par définition de $\otimes^{\mathrm{su}}$, on a dans $\bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W$:

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \otimes w_{k+1} \wedge \cdots \wedge w_n) \cdot^{\mathrm{su}} (v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{k'} \otimes w'_{k'+1} \wedge \cdots \wedge w'_{n'}) = (-1)^{(n-k)k'} v_I \otimes w_J \,,$$

ce qui assure que l'isomorphisme naturel de K-espaces vectoriels entre $\bigwedge(V \oplus W)$ et $(\bigwedge V) \otimes_K^{\mathrm{su}} (\bigwedge W)$ est bien un isomorphisme de K-algèbres.

Exercice 12 :
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel.

a) Supposons E de dimension finie. On note $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ et on écrit tout élément $z \in \bigwedge E$ sous la forme $z = \sum_{n \geq 0} z_n$. Montrer que $z \in \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.

b) Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. En déduire une description des inversibles de $\bigwedge E$.

Solution de l'exercice 12.

a) Notons r la dimension de E. Si z est inversible d'inverse y, en projetant sur la composante en degré 0 de l'algèbre extérieure la relation $zy = 1$ dans $\bigwedge E$, on voit que $z_0 y_0 = 1$, donc la condition est nécessaire.
Réciproquement, supposons $z_0 \neq 0$. On vérifie que $z_0^{-1} \sum_{i=0}^{r} \big(- z_0^{-1} \sum_{n \geq 1} z_n \big)^{\wedge i}$ est une somme finie dans $\bigwedge E$ qui est l'inverse de z.

b) Seuls un nombre fini de z_n sont non nuls. Chacun s'écrit alors comme une somme finie

$$z_n = z_{n,1}^{(1)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(1)} + \cdots + z_{n,1}^{(\alpha_n)} \wedge \cdots \wedge z_{n,n}^{(\alpha_n)} \,.$$

Il suffit alors de considérer pour F le sous-espace de E engendré par tous les $z_{n,i}^k$ avec $n \geq 0$ tel que $z_n \neq 0$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq \alpha_n$. Alors $z \in \bigwedge F \subset \bigwedge E$.
La question a) assure alors que si $z_0 \neq 0$, alors z est inversible dans $\bigwedge F$, donc dans $\bigwedge E$. Réciproquement, si z est inversible dans $\bigwedge E$ d'inverse y, alors il existe un sous-espace vectoriel $G \subset E$ de dimension finie tel que $y, z \in \bigwedge G \subset \bigwedge E$, et la question a) assure que $z_0 \neq 0$.

Exercice 13 : $\star\star$
Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n, de base $(1, x_1, \dots, x_{n-1})$. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé de F-automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

a) Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.

b) Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit le sous-F-espace vectoriel des G-invariants par $V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$. Prouver que l'application naturelle E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ commute à l'action de G.

c) Montrer que η est un isomorphisme.

Solution de l'exercice 13.

a) On raisonne par l'absurde. Soit $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ dans $\mathrm{End}_F(E) \subset E^E$ une relation de dépendance linéaire sur E de longueur k minimale (avec les $g_i \in G$ deux-à-deux distincts et $\lambda_i \in E^*$ pour tout i). On peut supposer $k \geq 2$. Comme les caractères g_i sont distincts, on a l'existence d'un élément $y \in E$ avec $g_1(y) \neq g_2(y)$. On a alors, pour tout $x \in E$, $g_1(y) \sum_i \lambda_i g_i(x) = 0$, et aussi $\sum_i \lambda_i g_i(xy) = \sum_i \lambda_i g_i(x) g_i(y) = 0$. En soustrayant ces deux égalités, on obtient une combinaison linéaire non triviale et strictement plus courte, à savoir

$$\lambda_2(g_2(y) - g_1(y))g_2 + \cdots + \lambda_k(g_k(y) - g_1(y))g_k = 0 \,,$$

ce qui contredit la minimalité de la relation initiale.

b) Tout d'abord, on dispose bien d'une application E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ puisque l'application $V^G \times E \to V$ définie par $(v, e) \mapsto ev$ est bilinéaire.
Pour tout $g \in G$, et tous $v \in V^G$ et $e \in E$, on a

$$\eta(g \cdot (v \otimes e)) = \eta(v \otimes g(e)) = \eta(g(v) \otimes g(e)) = g(e)g(v) = g(ev)\,,$$

donc η est bien G-équivariante.

c) Montrons d'abord que η est surjective. Notons $g_1 = \mathrm{Id}, \dots, g_n$ les éléments de G. On renomme aussi $x_0 := 1 \in E$. Soit v un élément non nul de V. Posons, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $v_j := \sum_i g_i(x_j v) \in V^G$. Par la question a), la matrice $(g_i(x_j))_{i,j}$ est inversible, et en inversant le système précédent, on obtient les $g_i(v)$ comme combinaisons linéaires des v_j. La relation donnant $g_0(v)$ affirme alors la surjectivité souhaitée.
Montrons ensuite que η est injective. Si ce n'est pas le cas, il existe une famille $(v_1, \dots, v_m)$ de vecteurs de V^G qui est F-libre mais non E-libre. On suppose l'entier m minimal pour cette propriété. On dispose d'une combinaison linéaire non triviale $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ sur E. Comme les λ_i ne sont pas tous dans F, on peut supposer $\lambda_1 \notin F$ et $\lambda_m = 1$. Comme $\lambda_1 \notin F = E^G$, il existe $g \in G$ tel que $g(\lambda_1) \neq \lambda_1$. On obtient alors une relation $\sum_{i=1}^{m-1} (g(\lambda_i) - \lambda_i) v_i = 0$, qui contredit la minimalité de m. Donc η est bien injective.

Exercice 14 : ⋆⋆
Soit K un corps.

a) Définir une notion de suite exacte de K-espaces vectoriels.

b) Soit $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte de K-espaces vectoriels. Soit également W un K-espace vectoriel.

   i) Montrer que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W) \to 0$$

   est une suite exacte.

   ii) Montrer que la suite

$$0 \to V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W \to 0$$

   est une suite exacte.

Solution de l'exercice 14.

a) Soient $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des K-espaces vectoriels et $f_n : E_n \to E_{n+1}$ des applications linéaires. On dit que la suite

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

est exacte en rang n (ou en E_n) si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. On dit que la suite est exacte si elle est exacte en rang n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) On note $f : V_1 \to V_2$ et $g : V_2 \to V_3$ les deux morphismes non triviaux de la suite exacte.

   ~~i)~~ Montrons que la composée $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est l'application nulle. Soit $\varphi : V_3 \to W$ une application linéaire. Alors l'image de φ dans $\mathrm{Hom}_K(V_2, W)$ est $\varphi \circ g$ et son image dans $\mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est $\varphi \circ g \circ f$. Or la suite initiale est exacte, donc $g \circ f = 0$, donc l'image de φ dans $\mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est nulle.

   — Montrons maintenant que le noyau de $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est contenu dans l'image de $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$. Soit $\varphi : V_2 \to W$ dans ce noyau, i.e. tel que $\varphi \circ f = 0$. Alors $f(V_1) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, donc le théorème de factorisation assure que φ se factorise en une application linéaire $V_2/f(V_1) \to W$. Or g induit un isomorphisme $V_2/f(V_1) \simeq V_3$, donc φ se factorise en $\overline{\varphi} : V_3 \to W$ de sorte que $\overline{\varphi} \circ g = \varphi$. Cela assure que φ est l'image de $\overline{\varphi}$ par l'application naturelle $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$.

— Montrons que l'application $\mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W)$ est injective. Soit $\varphi : V_3 \to W$ tel que $\varphi \circ g = 0$. Comme g est surjective par hypothèse, il est clair que cela implique que $\varphi = 0$, d'où l'injectivité souhaitée.

— Montrons que l'application $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ est surjective. Soit $\varphi : V_1 \to W$ une application linéaire. On choisit un supplémentaire V_1' de $f(V_1)$ dans V_2, et on définit une application linéaire $\psi : V_2 \to W$ en posant $\psi_{|_{f(V_1)}} = \varphi \circ {f_{|_{V_1}}}^{-1}$ et $\psi_{|_{V_1'}} = 0$. Il est alors clair que $\psi \circ f = \varphi$, donc φ est l'image de ψ par $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$.

On a bien prouvé l'exactitude souhaitée.

ii) — Montrons que la composée $V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W$ est l'application nulle. Soit $v_1 \otimes w \in V_1 \otimes W$. Alors l'image de $v_1 \otimes w$ dans $V_2 \otimes W$ est $f(v_1) \otimes w$ et son image dans $V_3 \otimes W$ est $g(f(v_1)) \otimes W$. Or la suite initiale est exacte, donc $g \circ f = 0$, donc l'image de $v_1 \otimes w$ dans $V_3 \otimes W$ est nulle.

— Montrons maintenant que le noyau de $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est contenu dans l'image de $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$. Pour cela, on constate que le point précédent assure que l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ se factorise en une application linéaire $\overline{f} : V_2 \otimes W / \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W) \to V_3 \otimes W$, définie par $\overline{f}(v_2 \otimes w) = f(v_2) \otimes w$. On définit une application $h : V_3 \times W \to V_2 \otimes W / \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$ de la façon suivante : si $(v_3, w) \in V_3 \times W$, la surjectivité de g assure qu'il existe $v_2 \in V_2$ tel que $g(v_2) = v_3$, et on définit $h(v_3, w)$ comme l'image de $v_2 \otimes w$ dans le quotient $V_2 \otimes W / \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$. Vérifions que la définition de h est correcte : si $v_2, v_2' \in V_2$ vérifient que $g(v_2) = v_3 = g(v_2')$, alors $v_2 - v_2' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}\,(f)$, donc il existe $v_1 \in V_1$ tel que $v_1 - v_2' = f(v_1)$. Alors on a $v_2 \otimes w - v_2' \otimes w = (v_2 - v_2') \otimes w = f(v_1) \otimes w \in \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$. Donc h est bien définie.
En outre, il est clair que h est bilinéaire, donc h induit une application linéaire $\overline{h} : V_3 \otimes W \to V_2 \otimes W / \mathrm{Im}\,(V_1 \otimes W)$
Il est immédiat de vérifier que $\overline{h}$ est la réciroque de l'application $\overline{g}$. Cela assure bien que le noyau de $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est égal à l'image de $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$.

— Montrons que l'application $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$ est injective. On fixe une base $(w_i)_{i \in I}$ de W. Alors $W \cong \bigoplus_{i \in I} K w_i$, et le morphisme $V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$ s'identifie que morphisme $\bigoplus_{i \in I} f \otimes \mathrm{id}_i : \bigoplus_{i \in I} V_1 \otimes K w_i \to \bigoplus_{i \in I} V_2 \otimes K w_i$, qui est bien injectif puisque chacune des composantes de ce morphisme est le morphisme injectif $f : V_1 \to V_2$.

— Montrons que l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$ est surjective. Soit $v_3 \otimes w \in V_3 \otimes W$. Par surjectivité de g, il existe $v_2 \in V_2$ tel que $g(v_2) = v_3$. Alors $v_3 \otimes w$ est l'image de $v_2 \otimes w$ par l'application $V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W$. une application linéaire. On choisit un supplémentaire V_1' de $f(V_1)$ dans V_2, et on définit une application linéaire $\psi : V_2 \to W$ en posant $\psi_{|_{f(V_1)}} = \varphi \circ {f_{|_{V_1}}}^{-1}$ et $\psi_{|_{V_1'}} = 0$. Il est alors clair que $\psi \circ f = \varphi$, donc φ est l'image de ψ par $\mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$.

On a bien prouvé l'exactitude souhaitée.

Remarque : on peut également déduire la question b) ii) de la question b) i), en montrant le fait suivant : une suite $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ de K-espaces vectoriels est exacte si et seulement si pour tout K-espace vectoriel F, la suite $0 \to \mathrm{Hom}_K(E_3, F) \to \mathrm{Hom}_K(E_2, F) \to \mathrm{Hom}_K(E_1, F) \to 0$ est une suite exacte. La preuve de ce fait est facile (du même ordre que la preuve de b)i)). Il suffit ensuite d'appliquer cela à la suite $0 \to V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W \to V_3 \otimes W \to 0$, en utilisant les identifications $\mathrm{Hom}_K(V_i \otimes W, F) \simeq \mathrm{Hom}_K(V_i, \mathrm{Hom}_K(W, F))$...