TD8 : Produit tensoriel

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit K un corps, et soient A et B des K-algèbres.

a) Définir une structure de K-algèbre sur $A \otimes_K B$.

b) Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X,Y]$ sont isomorphes.

c) Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes_K K(Y)$ vers $K(X,Y)$ est injectif mais non surjectif.

Exercice 2 : $\star$

a) Notons $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbf{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions. Montrer que les $\mathbb{C}$-algèbres $M_2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sont isomorphes.

b) Montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : $\star\star$

a) Soient U et V des espaces vectoriels (sur un corps K). On note $U^* = \mathrm{Hom}_K(U,K)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U,V)$. Quelles sont les images des tenseurs décomposés (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

b) Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Que vaut

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \ldots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \ldots, f_n) \in F^n ,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} ?$$

Exercice 4 :
Soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 5 :
Soit $n \geq 1$ un entier, soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Montrer que le dual $(\bigwedge^i E)^*$ de $\bigwedge^i E$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6 : $\star\star$
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et l'ensemble des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Exercice 7 : $\star\star$
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de E.

a) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre dans E.

b) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement s'il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$.

Exercice 8 :
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

a) Définir une application linéaire "naturelle" $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.

b) Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est $\binom{n}{r}$, et si $n > r$, l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.

c) Si $E = F$ est un K-espace vectoriel de dimension finie n, que dire de $\bigwedge^n u$?

Exercice 9 :
Soient k un corps de caractéristique différente 2 et V un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $z \in \bigwedge^2 V$ un 2-vecteur. On dit que z est décomposable s'il existe $u, v \in V$ tels que $z = u \wedge v$.

a) Supposons $\dim V = 3$. Montrer que z est décomposable si et seulement si

$$z \wedge z = 0 \in \bigwedge^4 V.$$

b) Montrer en dimension quelconque le critère précédent par récurrence sur la dimension de V .

Exercice 10 : $\star\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et V un K-espace vectoriel de dimension n. Pour tout d, on note $\mathrm{Gr}(d, V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension d.

a) Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension d. Montrer que pour tout k, $\bigwedge^k W$ est naturellement un sous-espace vectoriel de $\bigwedge^k V$.

b) Construire une application naturelle $\varphi : \mathrm{Gr}(d, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

c) Montrer que l'application φ est injective et décrire son image.

d) Montrer que $\mathrm{Gr}(2, K^4)$ est une quadrique projective, dont on déterminera une équation.

e) Montrer que pour tout $2 \leq d \leq n - 2$, $\mathrm{Gr}(d, V)$ est une intersection de quadriques projectives, dont on déterminera les équations.

f) Expliciter les équations de $\mathrm{Gr}(2, K^n)$.

g) Décrire $\mathrm{Gr}(1, V)$ et $\mathrm{Gr}(n - 1, V)$.

Exercice 11 :
Soit K un corps et soient A et B des K-algèbres graduées.

a) Montrer qu'il existe sur $A \otimes_K B$ une structure naturelle de K-algèbre graduée telle que

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$

On note $A \otimes_K^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue.

b) Soient V et W des espaces vectoriels sur K. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-algèbres

$$\bigwedge(V \oplus W) \simeq \bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W.$$

Exercice 12 :
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel.

a) Supposons E de dimension finie. On note $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ et on écrit tout élément $z \in \bigwedge E$ sous la forme $z = \sum_{n \geq 0} z_n$. Montrer que $z \in \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.

b) Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. En déduire une description des inversibles de $\bigwedge E$.

Exercice 13 : $\star\star$

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n, de base $(1, x_1, \ldots, x_{n-1})$. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé de F-automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

a) Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.

b) Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit le sous-F-espace vectoriel des G-invariants par $V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$. Prouver que l'application naturelle E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ commute à l'action de G.

c) Montrer que η est un isomorphisme.

Exercice 14 : $\star\star$

Soit K un corps.

a) Définir une notion de suite exacte de K-espaces vectoriels.

b) Soit $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte de K-espaces vectoriels. Soit également W un K-espace vectoriel.

   i) Montrer que la suite
   $$0 \to \mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W) \to 0$$
   est une suite exacte.

   ii) Montrer que la suite
   $$0 \to V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W \to 0$$
   est une suite exacte.