TD9 : Représentations des groupes finis II, caractères

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi|_H$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi|_H$ est un caractère irréductible ?

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W := \mathrm{Ind}_H^G(\pi) := \{f : G \to V \mid \forall x \in G\ \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h)f(x)\},$$

avec action de G donnée par $g(f) : x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, est-ce que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est une représentation irréductible de G ?

Exercice 3 :
Soit G un groupe fini ; notons triv la représentation triviale du sous-groupe $\{e_G\}$ de G. Déterminer la représentation $\mathrm{Ind}_{\{e_G\}}^G(\mathrm{triv})$.

Exercice 4 : $\star\star$
Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G. On va définir une application entre espaces de fonctions centrales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(H) & \longrightarrow & \mathcal{C}(G) \\ f & \mapsto & f^G. \end{array}$$

D'abord on définit $f^0 : G \to \mathbb{C}$ par

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite on pose $f^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} f^0(xgx^{-1})$.

a) Montrer que $f^G \in \mathcal{C}(G)$.

b) Supposons que f est un caractère irréductible. Est-ce que f^G est irréductible ?

c) Soit (π, V) une représentation de H et soit χ son caractère. Montrer que χ^G est le caractère de $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$.

Exercice 5 : (Réciprocité de Frobenius, point de vue des représentations) $\star\star$
Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G, π une représentation de H et ρ une représentation de G.

a) Montrer :
$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G(\pi)) = \mathrm{Hom}_H(\rho_{|_H}, \pi)\,.$$

b) En déduire que, si ρ et π sont irréductibles, la multiplicité de ρ dans $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$ est égale à la multiplicité de π dans $\rho_{|_H}$.

Exercice 6 : (Réciprocité de Frobenius, point de vue des caractères)
Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G, ϕ une fonction centrale sur G et ψ une fonction centrale sur H. Montrer

$$\langle \phi, \psi^G \rangle = \langle \phi|_H, \psi \rangle.$$

Exercice 7 : (Théorème de Frobenius)
Soit $n \geq 1$ un entier et soit G un groupe fini. Soit X un ensemble à n éléments muni d'une action transitive de G, soit $x_0 \in X$ et notons H le stabilisateur de x_0. On suppose que tout élément de G autre que l'identité fixe au plus un élément de X.
On note G_1 l'ensemble des éléments de G qui agissent sur X sans point fixe ; on pose $G_0 := G_1 \cup \{1\}$.

a) Déterminer le cardinal de G_0.
b) Soit χ_σ le caractère de la $\mathbb{C}$-représentation de permutation donnée par l'action de G sur X et soit χ_1 le caractère de la représentation triviale. On pose $\chi = \chi_\sigma - \chi_1$. Montrer que χ est un caractère.
c) Soient ψ un caractère irréductible de H et ψ_G le caractère de l'induite de H à G. On pose $\phi = \psi_G - \psi(1)\chi$. Montrer que ϕ est un caractère irréductible de G. En déduire que G_0 est un sous-groupe distingué de G.
d) Montrer que G est le produit semi-direct de H par G_0.

Exercice 8 : (Critère de Mackey)
Soit G un groupe fini et soit k un corps algébriquement clos de caractéristique première à $|G|$. Soient H et K des sous-groupes de G et soit (ρ, W) une représentation de H sur k. On pose $V := \mathrm{Ind}_H^G W$.
Soit S un système de représentants de $K\backslash G/H$ contenant 1. Pour $s \in S$, on pose $H_s = sHs^{-1} \cap K$ et on note W_s la représentation de H_s correspondant au morphisme $\begin{array}{rccc} \rho^s : & H_s & \to & \mathrm{GL}(W) \\ & x & \mapsto & \rho(s^{-1}xs) \end{array}$.

a) Montrer que V est isomorphe à $\bigoplus_{s\in S} \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$ en tant que représentation de K.
b) Montrer que V est irréductible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
   (i) W est irréductible ;
   (ii) pour tout $s \in S \setminus \{1\}$, $\mathrm{Hom}(W_s, W|_{H_s}) = 0$ (on dit alors que W_s, et $W|_{H_s}$ ne s'entrelacent pas).

Exercice 9 : $\star\star$
Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation complexe de G, de caractère χ.
Montrer les deux équivalences suivantes :

a) le caractère χ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si V admet une forme bilinéaire non dégénérée invariante par G.
b) la représentation ρ provient d'une représentation réelle par extension des scalaires si et seulement si V admet une forme bilinèaire symétrique non dégénérée invariante par G.

Exercice 10 : (Représentations complexes de $\mathfrak{S}_n$) $\star\star\star$
Soit $n \geq 1$ un entier et soit λ une partition de n, c'est-à-dire une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ d'entiers naturels vérifiant $n = \sum_k \lambda_k$ avec $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$ pour tout k. À cette partition λ, on associe un *tableau de Young* T_λ, qui est un tableau de n cases alignées à gauche dans lequel la i-ème ligne a λ_i colonnes.
Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ s'identifie au groupe de permutations des cases de T_λ. On définit alors le sous-groupe P_λ (resp. Q_λ) comme étant respectivement le stabilisateur des lignes (resp. des colonnes) de T_λ. On appelle *projecteurs de Young* les éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ suivants

$$a_\lambda = \frac{1}{|P_\lambda|} \sum\nolimits_{P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \frac{1}{|Q_\lambda|} \sum\nolimits_{Q_\lambda} \varepsilon(g)\, g,$$

où $\varepsilon(g)$ désigne la signature de la permutation g. On pose $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$.

a) Supposons $g \in \mathfrak{S}_n \smallsetminus P_\lambda Q_\lambda$. Montrer qu'il existe une transposition $t \in P_\lambda$ vérifiant $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire $l_\lambda : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}$ telle que l'on ait $a_\lambda g b_\lambda = l_\lambda(g) c_\lambda$ pour tout $g \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

c) Soit μ une partition de n. On introduit l'ordre lexicographique sur les partitions de n : on a $\lambda > \mu$ s'il existe $j \geq 1$ tel que $\lambda_j > \mu_j$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i < j$. Supposons $\lambda > \mu$. Montrer que l'on a $a_\lambda \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] b_\mu = 0$.

d) Soit A une algèbre. Un élément $e \in A$ est dit *idempotent* s'il vérifie $e^2 = e$. Montrer que pour tout A-module à gauche M, on a $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \simeq eM$. Montrer que c_λ est proportionnel à un idempotent de $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

e) Soit V_λ la représentation de $\mathfrak{S}_n$ donnée par multiplication à gauche sur l'espace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto V_\lambda$ induit une bijection entre l'ensemble des partitions de n et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 11 : $\star\star\star$

On garde les notations de l'exercice précédent. Soit U_λ la représentation $\mathrm{Ind}_{P_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C}$.

a) Montrer que la représentation obtenue par multiplication à gauche sur $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]a_\lambda$ est isomorphe à U_λ.

b) Montrer la décomposition $U_\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$, où les $K_{\mu\lambda}$ sont des entiers naturels avec $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Les entiers $K_{\mu\lambda}$ sont appelés *nombres de Kostka.*

On définit les ensembles suivants, qui correspondent à ajouter ou enlever une case sur le tableau de Young T_λ :

$$A(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n+1 \mid \exists j, \forall i,\ \nu_i = \lambda_i + \delta_{ij}\},$$

$$R(\lambda) = \{\nu \text{ partition de } n-1 \mid \exists j, \forall i,\ \nu_i = \lambda_i - \delta_{ij}\}.$$

c) Montrer que V_λ est isomorphe à $\bigoplus_{\nu \in R(\lambda)} V_\nu$ en tant que $\mathfrak{S}_{n-1}$-représentation.

d) Montrer que $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\nu \simeq \bigoplus_{\lambda \in A(\nu)} V_\lambda$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}_n$-représentations.

Exercice 12 : (Théorème de Burnside) $\star\star\star$

Soient p, q deux nombres premiers, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Soit G groupe fini tel que $|G| = p^\alpha q^\beta$. L'objectif de l'exercice est de montrer que G est résoluble.

a) Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ des racines de l'unité. Montrer que $\frac{\zeta_1 + \cdots + \zeta_n}{n}$ est un entier algébrique si et seulement si $\zeta_1 + \cdots + \zeta_n = 0$ ou $\zeta_i = \zeta_1$ pour tout i.

b) Soit H un groupe fini, ρ une représentation irréductible de H sur $\mathbb{C}$, de caractère χ.

i) Montrer que pour tout $h \in H$, si $c(h)$ désigne le cardinal de la classe de conjugaison de h dans H, alors $c(h)\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique.

ii) Montrer que pour tout $h \in H$, si $c(h)$ est premier avec $\chi(1)$, alors $\frac{\chi(h)}{\chi(1)}$ est un entier algébrique.

iii) Sous les hypothèses de la question b)ii), montrer que si $\chi(h) \neq 0$, alors $\rho(h)$ est une homothétie.

c) Soit $h \in H$ tel que $c(h)$ soit une puissance d'un nombre premier. En considérant la représentation régulière de H, montrer que G contient un sous-groupe strict distingué N tel que l'image de h dans H/N soit centrale dans H/N.

d) Montrer par récurrence que G est résoluble.