Partiel algèbre.

Exercice 1. Soit G un groupe fini et X un ensemble fini de cardinal au moins 2 sur lequel G opère. Soit ρ la représentation de permutation correspondante et χ son caractère.

(a) Soit c le nombre d'orbites de cette action. Montrer que c est égal au nombre de fois que ρ contient la représentation unité $\mathbf{1}$.

(b) On fait opérer G sur le produit $X \times X$ au moyen de la formule $s.(x, y) = (s.x, s.y)$ (avec $s \in G$, $(x, y) \in X^2$). Calculer le caractère de la représentation de permutation correspondante.

(c) On note $< \, , \, >$ le produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions centrales sur G. On suppose que G agit transitivement sur X. On peut d'après le (a) décomposer ρ sous la forme $\rho = \mathbf{1} \oplus \theta$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) G est doublement transitif sur X. (Pour tout $(x, y, z, t) \in X^4$ il existe $g \in G$ tel que $z = g.x$, $t = g.y$).

(ii) L'action de G sur $X \times X$ a deux orbites.

(iii) 0n a $< \chi^2, \mathbf{1} >= 2$.

(iv) La représentation θ est irréductible.

(d) Que peut on en déduire pour la représentation standard (de dim $n - 1$) de $\mathcal{S}_n$.

Problème. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On rappelle que le normalisateur $N_G(H)$ de H dans G est défini par

$$N_G(H) := \{g \in G, \quad gHg^{-1} = H\}.$$

(0) Soit G un groupe fini d'ordre n. Soit p un nombre premier divisant n et k_p le nombre de p-Sylow de G. Soit H un p-Sylow de G. Calculer le cardinal de $N_G(H)$. Soit S l'ensemble des p-Sylow de G, montrer que

$$\cap_{Q \in S} N_G(Q)$$

est un sous-groupe normal de G.

(I) Dans toute cette partie, G désigne un groupe simple de cardinal 168.

(I1) Soit S l'ensemble des 7-Sylow de G. Montrer que S est de cardinal 8. Soit P un 7-Sylow et $N = N_G(P)$. Calculer le cardinal de N. Prouver que P opère transitivement par conjugaison sur $S - \{P\}$.

(I2) Montrer que si N admet un unique 3-Sylow alors N est un groupe cyclique.

(I3) Soit $f : G \to \mathcal{S}(S) = \mathcal{S}_8$ le morphisme de groupe associé à la représentation de G dans S. Montrer que f est injectif. Montrer qu'il n'y a pas d'éléments d'ordre 21 dans G. En déduire que N n'est pas cyclique. Combien N a-t'il de 3-Sylow.

(I4) Montrer que G possède soit 7 soit 28 sous-groupes de Sylow d'ordre 3. On suppose que G possède 7 sous-groupes de Sylow d'ordre 3. Montrer que N est un sous-groupe normal de G. En déduire que G possède 28 sous-groupes de Sylow d'ordre 3. Combien y-a-t'il dans G d'éléments d'ordre 7 et déléments d'ordre 3?

(II) On veut construire dans cette partie un groupe G simple de cardinal 168. Soient $a := (1, 2, 5)(3, 4, 6)$ et $b := (1, 7)(2, 6)$ deux éléments de $\mathcal{A}_7$. Soit $G =< a, b >$ le groupe qu'ils engendrent.

(II1) Soit $u = aba^{-1}b^{-1}$ et $L =< b, u >$. Montrer que L est un sous-groupe de G non abélien de cardinal 8. (On pourra montrer que L contient un sous-groupe distingué d'ordre 4). Montrer que L n'est pas distingué dans G.

(II2) Montrer que 168 divise l'ordre de G (on pourra considérer l'élément $\sigma = ab$ de G).

(II3) Quel est le nombre de 7-Sylow de $\mathcal{A}_7$? Soit T un 7-Sylow de $\mathcal{A}_7$. Calculer le cardinal de $N_{\mathcal{A}_7}(T)$.

(II4) On admettra (ou on vérifiera courageusement) que les 8-sous-groupes

$$< (1, 2, 3, 5, 6, 4, 7 >; < (1, 2, 3, 7, 4, 5, 6) >; < (1, 2, 4, 5, 7, 3, 6) >; < (1, 2, 4, 6, 3, 5, 7) >;$$

$$< (1, 2, 6, 4, 7, 5, 3) >; < (1, 2, 6, 5, 3, 7, 4) >; < (1, 2, 7, 3, 6, 5, 4) >; < (1, 2, 7, 5, 4, 6, 3) > .$$

sont invariants dans leurs ensemble sous l'action de a et b agissant par conjugaison. Vérifier que ce sont des sous-groupes de G. En déduire que G est de cardinal 168. On pourra borner le cardinal de $N_G(T)$ pour un 7-Sylow T de G.

(II5) Calculer le nombre de 3-Sylow et de 7-Sylow de G.

Soit $H \neq G$ un sous-groupe distingué de G.

(II6) Montrer que H ne contient pas d'éléments d'ordre 3. Montrer que si H contient un élément d'ordre 7 alors H est de cardinal 56 et admet un unique 2-Sylow.

(II7) En déduire que G est un groupe simple.