# Examen algèbre.

**Exercice 1.** Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$. On note $\overline{z}$ le nombre complèxe conjugué de $z \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $A^* = \{1, -1\}$ (on pourra utiliser la norme $N(a) = a\overline{a}$ pour $a \in A$).

(b) On suppose que $A$ est euclidien pour pour la division euclidienne $v : A - \{0\} \to \mathbb{N}$. Soit $x \in A$ réalisant le minimum des $v(x)$ parmi les éléments non nuls et non inversibles. Montrer que $A/(x)$ est un corps et que la restriction à $A^* \cup \{0\}$ de la surjection canonique $\phi$ de $A$ sur $A/(x)$ est surjective. En déduire que $A$ n'est pas euclidien.

**Exercice 2.**

(a) Soit $k$ un corps, $a \in k$ et $p$ premier. Montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur $k$ si et seulement si il n'a pas de racines dans $k$. (Si $X^p - a = PQ$ avec $P$, $Q \in k[X]$ et $0 < deg(P) < p$, soit $b$ le terme constant de $P$. On pourra commencer par montrer que $a^n = \pm b^p$.)

(b) Soit $p$ un nombre premier impair et $l$ un diviseur premier de $p - 1$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ montrer que pour tout entier $k$ tel que $l > k \geq 1$, $X^l + pX^k - a$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

**Problème.**

A) Soient $A$ un anneau commutatif noethérien et $I$ un idéal de $A$. On définit $(I : x) = \{y \in A, \quad xy \in I\}$ pour $x \in A$ et $R(I) = \{t \in A, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \ t^n \in I\}$. On dit que $R(I)$ est la racine de $I$.

(a) Soient $I$ et $J$ deux idéaux de $A$. Montrer que $(I : x)$ et $R(I)$ sont des idéaux de $A$. Montrer que $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$ et que

$$(I \cap J : x) = (I : x) \cap (J : x).$$

Quel est la racine $R(I)$ d'un idéal $I$ premier?

(b) On dit qu'un idéal $Q$ de $A$ distinct de $A$ est primaire si:

$$\forall (a, b) \in A^2, \ ab \in Q \Rightarrow b \in Q \ \text{ ou } \exists n > 0 \ \text{ tel que } a^n \in Q.$$

Montrer que $Q$ est primaire si et seulement si , dans l'anneau $A/Q$ la multiplication par un élément non nilpotent est injective.

(c) Montrer que si $Q$ est un idéal primaire, $R(Q)$ est un idéal premier.

(d) Montrer que si $Q$ et $Q'$ sont deux idéaux primaires tels que $R(Q) = R(Q')$, alors $Q \cap Q'$ est primaire.

(e) Un idéal $Q$ de $A$ est dit irréductible s'il n'est pas intersection de deux idéaux le contenant strictement. Montrer qu'un idéal irréductible est primaire. (Si $Q$ n'est pas primaire, on pourra considérer $\phi_{a^n} : A/Q \to A/Q$ la multiplication par $a^n$ pour $n$ assez grand.)

(f) Montrer que tout idéal de $A$ distinct de $A$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux irréductibles (donc primaires).

(g) Montrer que tout idéal $I$ de $A$ distinct de $A$ peut s'écrire

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$$

avec $Q_i$ primaire avec $R(Q_i) \neq R(Q_j)$ et $Q_i$ non contenu dans $Q_j$ si $i \neq j$. Une telle décomposition est dite réduite.

(h) Montrer que si $Q$ est un idéal primaire, on a $R((Q : x)) = A$ si $x \in Q$ et $R((Q : x)) = R(Q)$ si $x \notin Q$.

(i) Soit $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ une décomposition réduite de $I$. Soit $P_i = R(Q_i)$. Montrer que l'ensemble des idéaux premiers de la forme $R((I : x))$ avec $x \in A$ est identique à l'ensemble $P(I) = \{P_1, \ldots, P_n\}$. En particulier $P(I)$ est indépendant de la décomposition réduite.

B) Exemples et contre-exemples.

(a) Montrer que si $p$ est un idéal maximal et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $p^n$ est primaire.

(b) Soit $R = \mathbb{C}[x, y]$ et $m$ l'idéal engendré par $(x, y)$. Montrer que $m^2 = (m^2 + Rx) \cap (m^2 + Ry)$. En déduire que primaire n'implique pas irréductible.

(c) Soit $R = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy - z^2)$ et $I$ l'idéal engendré par les images $\overline{x}$ et $\overline{z}$ de $x$ et $z$ dans $R$. Montrer que $I$ est premier mais que $I^2$ n'est pas primaire.

(d) Soit $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x, y^2)$. Montrer que $I$ est primaire mais n'est pas la puissance d'un idéal premier.

(e) Soit $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x^2, xy)$. Montrer que $R(I)$ est premier mais que $I$ n'est pas primaire.