Algèbre I (F. Loeser)
Partiel du 10 novembre 2006
Les documents ne sont pas autorisés. Durée : 2 h 30

Exercice 1

Rappeler la construction du plongement de $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$ et expliquer pourquoi $\mathfrak{S}_6$ admet un automorphisme non intérieur.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal ≥ 2. Pour tout g dans G on note $f(g)$ le nombre de points de X fixés par g.

a) Rappeler pourquoi il y a exactement

$$\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} f(g)$$

orbites de G dans X.

b) Démontrer que

$$\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} f(g)^2 \geq 2.$$

[On pourra considérer l'action de G sur $X \times X$.]

c) On suppose maintenant que l'action de G sur X est transitive. Démontrer que au moins $\operatorname{card} G / \operatorname{card} X$ éléments de G agissent sur X sans aucun point fixe. [On pourra sommer sur g la quantité $(f(g) - 1)(\operatorname{card} X - f(g))$.]

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

Soit G un groupe. On pose $Z^0(G) = \{1\}$ et on définit, pour $i \geq 1$, $Z^i(G)$ comme l'ensemble des g de G vérifiant $[g, x] \in Z^{i-1}(G)$ pour tout x dans G. (En particulier $Z^1(G) = Z(G)$ est le centre de G.) Si H est un sous-groupe de G on note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G, c'est à dire le sous-groupe de G formé des $g \in G$ vérifiant $gHg^{-1} \subset H$.

a) Montrer que $Z^i(G)$ est un sous-groupe normal de G.

On dit que G est nilpotent s'il existe i tel que $Z^i(G) = G$.

b) Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe nilpotent est nilpotent, qu'un quotient d'un groupe nilpotent est nilpotent, qu'un p-groupe fini est nilpotent.

c) Soit P un p-Sylow d'un groupe fini G. Montrer que pour tout sous-groupe H de G contenant $N_G(P)$ on a $N_G(H) = H$. [On pourra raisonner sur les sous-groupes de Sylow de H.]

d) Soit H un sous-groupe propre [i.e. différent de $\{1\}$ et de G] d'un groupe fini nilpotent G, montrer que $H \neq N_G(H)$.

e) Soit G un groupe fini. Montrer que si, pour tout nombre premier p divisant l'ordre de G, G admet un unique p-Sylow, alors G est isomorphe à un produit de p-groupes.

f) A l'aide des questions précédentes, montrer qu'un groupe fini est nilpotent si et seulement si il est isomorphe à un produit de p-groupes.