Partiel algèbre.

Exercice 1.

(a) Montrer que S_5 a 7 classes de conjugaison et calculer le cardinal de chaque classe.

(b) Montrer que les représentations de degré 1 de S_5 sont la représentation triviale $\mathbf{1}$ et la signature ϵ.

(c) Soit ρ la représentation standard de S_5 dans l'hyperplan U d'équation $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$ de $\mathbb{C}^5$. Calculer le caractère χ_ρ de ρ. Montrer que $\rho \otimes \epsilon$ est une représentation irréductible non isomorphe à ρ.

On rappelle que l'on a un isomorphisme de représentation

$$(U \otimes U, \rho \otimes \rho) \simeq (Sym^2 U, Sym^2 \rho) \oplus (\Lambda^2 U, \Lambda^2 \rho)$$

correspondant à la décomposition d'un tenseur en somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

(d) Calculer $\chi_{\Lambda^2\rho}$. En déduire que $\Lambda^2\rho$ est irréductible et que $\Lambda^2\rho$ est isomorphe à $\Lambda^2\rho \otimes \epsilon$. En déduire qu'il existe 2 représentations de S_5 irréductibles de dimension 5 non isomorphes entre elles.

(e) Calculer $\chi_{Sym^2\rho}$ et montrer que $Sym^2\rho = \mathbf{1} \oplus \rho \oplus \mathbf{V}$ pour une représentation irréductible V de dimension 5 de S_5 .

(f) Dresser la table des caractères de S_5.

Exercice 2.

Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. On note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G. Un sous-groupe maximal de G est un sous-groupe de G maximal parmi les sous-groupes H de G distincts de G.

1.a) Montrer que si H est un sous-groupe normal de G et S un p-Sylow de G contenu dans H, on a $G = N_G(S).H$.

1.b) Montrer que si S est un p-Sylow de G et H un sous-groupe de G contenant $N_G(S)$ alors $N_G(H) = H$.

1.c) Un groupe fini G est dit nilpotent si tous ses sous-groupes maximaux sont normaux. Soit G un groupe fini nilpotent, montrer que les p-Sylow de G sont normaux dans G. En déduire que G est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

1.d) Montrer qu'un sous-groupe et un quotient d'un groupe nilpotent sont des groupes nilpotents.

1.e) Montrer que le centre d'un groupe nilpotent non trivial n'est pas trivial.

1.f) Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble.

1.g) Donner un exemple de groupe résoluble qui n'est pas nilpotent.

On définit le sous-groupe de Frattini $\phi(G)$ de G comme l'intersection des sous-groupes maximaux de G. (Si $G = \{1_G\}$ on conviendra que $\phi(G) = G$.)

2.a) Montrer que $\phi(G)$ est un sous-groupe normal de G. Soit $\pi : G \to G/\phi(G)$ la surjection canonique.

2.b) Montrer que pour qu'une partie S de G engendre G il suffit que $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.

2.c) Soit $\pi : G \to G'$ un morphisme de groupe surjectif. Montrer que $\pi(\phi(G)) \subset \phi(G')$.

On suppose dans la suite que G est un p-groupe.

3.a) Si G est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–espace vectoriel de dimension finie, calculer $\phi(G)$.

3.b) Soit H un sous-groupe maximal de G. Montrer que H est normal d'indice p et en particulier que G est nilpotent. Montre que H contient le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G ainsi que le sous-groupe G^p engendré par les puissances p-ièmes des éléments de G.

3.c) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient de G qui est abélien et tel que tout élément est d'ordre divisant p.

3.d) Montrer que $\phi(G) = D(G)G^p$.