Examen algèbre 2009.

Exercice 1

Soit $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss et $\Sigma = \{a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$.

(a)(Question de cours). Montrer que Σ est stable par multiplication. Déterminer les éléments inversibles de A. Montrer que A est euclidien.

(b) Soit p un nombre premier, montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Soit $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$. Montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \mod 4$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = \Pi p^{v_{p(n)}}$ sa décomposition en facteurs premiers. Montrer que $n \in \Sigma$ si et seulement si pour tout $p \equiv 3 \mod 4$, $v_p(n)$ est pair.

(e) Déterminer les éléments irréductible de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 2

Soit n un entier non nul. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$. On note A^t la transposée de $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $Tr(A)$ sa trace. Montrer que $q_1(A) := Tr(AA^t)$ et $q_2(A) := Tr(A^2)$ sont des formes quadratiques. Déterminer les formes polaires de q_1 et de q_2. Déterminer le rang et la signature de q_1 et de q_2.

Problème.

A Soit A un anneau non nul , on dit qu'un élément e de A est idempotent si $e^2 = e$. On dit que deux idempotents e et e' sont orthogonaux si $ee' = 0$. Un anneau A est dit local si il a un unique idéal maximal. On note A^* l'ensemble des éléments inversibles de A.

A1) Montrer que si e est un idempotent de A, alors $1 - e$ est un idempotent orthogonal à e. Montrer que si A est intègre 0 et 1 sont les seuls idempotents de A.

A2) On suppose que A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Montrer que A est réunion disjointe de $\mathfrak{m}$ et de A^*. Montrer que les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

A3) Soit e un idempotent de A. Montrer que le sous-ensemble Ae de A muni des lois d'additions et de multiplication induites par celles de A est un anneau d'élément unité e. Soient $e_1, \ldots, e_n$ des idempotents deux à deux orthogonaux de somme 1. On note A_i l'ensemble Ae_i muni de la structure d'anneau précédente. Montrer que l'application $a \mapsto (ae_1, \ldots, ae_n)$ est un isomorphisme de A sur l'anneau produit $A_1 \times \ldots \times A_n$

B On appelle radical d'un anneau A et on note $Rad(A)$ l'intersection de tous les idéaux maximaux de A.

B1) Montrer que si $x \in Rad(A)$ alors $1 - x \in A^*$.

Soit I un idéal de A et M un A-module de type fini tel que $IM = M$.

B2) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de générateurs de M. Soit X la matrice colonne $(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer qu'il existe une matrice $n \times n$, Λ à valeurs dans I telle que $\Lambda X = X$. Soit I_n la matrice identité et $P = I_r - \Lambda$, montrer que $\det(P).M = 0$.

B3) Montrer qu'il existe $y \in I$ tel que $\det(P) = 1 + y$. En déduire le lemme de Nakayama qui dit que si de plus $I \subset Rad(A)$, alors $M = O$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On note k le corps $A/\mathfrak{m}$.

B4) Montrer que $\cap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = 0$.

B5) Soit M un A-module de type fini. Montrer que $M/\mathfrak{m}M$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(m_1, \ldots, m_n)$ des éléments de M induisant une base de $M/\mathfrak{m}M$. Montrer que $(m_1, \ldots, m_r)$ est un système de générateurs de M. On pourra considérer M/N où N désigne le sous-A-module de M engendré par les m_i.

C Soit A un anneau et M un A-module.

C1) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) Toute suite décroissante de sous-modules de M est stationnaire.

(b) Tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément minimal.

On dit que M est artinien si il vérifie ces propriétés. On dit que l'anneau A est artinien si c'est un A-module artinien.

C2) Montrer que si A est un corps, un A-espace vectoriel est artinien si et seulement si il est de dimension finie. Montrer que pour tout entier n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau artinien.

C3)Montrer que si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, alors M est artinien si et seulement si M' et M'' sont artiniens.

On suppose désormais A artinien. On fixe $a \in A$ et on note N_r et I_r, respectivement les noyaux et l'image de la multiplication par a^r dans A.

C4) Montrer qu'il existe un entier h tel que $I_r = I_h$ pour tout $r \geq h$. Montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $a^h = a^{2h}y$. En déduire que $A = I_r \oplus N_r$ pour tout $r \geq h$.

C5) Montrer que si les seuls idempotents de A sont 0 et 1 alors A est un anneau local dont l'idéal maximal est constitué d'éléments nilpotents. On pourra vérifier que $a^h y$ est un idempotent de A.

C6) On suppose A local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On veut montrer que $\mathfrak{m}^h = 0$ pour tout h assez grand. Comme A est artinien, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que pour tout h assez grand $\mathfrak{m}^h = \mathfrak{a}$. On suppose $\mathfrak{a} \neq 0$, montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $x\mathfrak{a} \neq 0$ et tel que $\mathfrak{m}xA = xA$. Conclure.

C7) On suppose encore que A est local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit J un idéal de A. Montrer que J est de type fini. On pourra supposer dans un premier temps que $J\mathfrak{m} = 0$ puis raisonner par récurrence.

C8) On dit qu'un idempotent e de A est minimal si il est différent de 0 et si les seuls idempotents de Ae sont 0 et e. Montrer qu'il existe dans A un idempotent minimal, puis que A est un produit fini d'anneaux locaux artiniens. En déduire qu'un anneau artinien est noethérien.