Examen Algèbre ENS 2009/2010

1 Exercice

(**a**) Soit G un groupe simple de cardinal n. On suppose que n n'est pas un nombre premier. Soit p un nombre premier divisant le cardinal de G. On note k_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que n divise $k_p!$. On pourra faire opérer G sur l'ensemble de ses p-Sylow.

(**b**) On suppose que G est simple de cardinal $n = 60$. Montrer qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour les entiers k_3 et k_5 que l'on explicitera.

(**c**) Montrer qu'un groupe simple de cardinal 60 contenu dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_6$ est contenu dans le groupe alterné $\mathcal{A}_6$ et est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

(**d**) En déduire qu'un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

2 Problème

Dans tout ce problème, représentation signifie "représentation linéaire dans un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie." Si V est une représentation d'un groupe fini G, on note χ_V son caractère. On note $|S|$ le cardinal d'un ensemble S.

I

1. Soit H un groupe fini. Soient (W_i) $(1 \leq i \leq r)$ un système de représentants des classes de représentations irréductible de H. Soit W une représentation de H, on note a_i la multiplicité de W_i dans W.

(**a**) Montrer que $\sum_{h\in H} |\chi_W(h)|^2$ est un multiple entier de $|H|$ que l'on exprimera à l'aide des a_i.

(**b**) On suppose que $\sum_{h\in H} |\chi_W(h)|^2 = 2|H|$. Montrer qu'alors W est somme directe de deux représentations irréductibles W' et W'' non isomorphes.

2. Soit H un sous-groupe d'indice 2 (donc distingué) d'un groupe fini G. On note $\epsilon : G \to \{\pm 1\}$ l'homomorphisme de noyau H et L la représentation de dimension 1 de G de caractère ϵ. Soit V une représentation de G, on note $V(\epsilon)$ la représentation $V \otimes L$.

(**a**) Exprimer $\chi_{V(\epsilon)}(g)$ à l'aide de $\chi_V(g)$ pour $g \in H$ et pour $g \notin H$.

(**b**) On suppose V irréductible. On note W la représentation de H déduite de V par restriction. W est donc définie par l'homomorphisme composé $H \to G \to \mathrm{GL}(V)$ et W a même espace sous-jacent que V.

(**i**) Montrer que $\sum_{h \in H} |\chi_W(h)|^2 = n|H|$ avec $n = 1$ ou $n = 2$.

(**ii**) Montrer que $n = 1$ si et seulement si V n'est pas isomorphe à $V(\epsilon)$ et que dans ce cas W est irréductible. Montrer que dans le cas contraire $\chi_V(g) = 0$ pour $g \notin H$.

3. On fixe un élément t de G n'appartenant pas à H. On note $\tau : H \to H$ l'automorphisme $h \to tht^{-1}$. Si E est une représentation de H, on note $\tilde{E}$ la représentation de H ayant même espace sous-jacent que E donnée par le composé de la représentation E avec $\tau : H \to H$. Soit V une représentation irréductible de G et W la représentation de H déduite de V par restriction. On suppose que $n = 2$ de sorte que $W = W' \oplus W''$ avec W' et W'' non isomorphes.

(i) Montrer que l'application linéaire $\phi : W \to W$, $\phi(x) = tx$ est un isomorphisme de représentations de W sur $\tilde{W}$.

(ii) Montrer que $\tilde{W} = \tilde{W'} + \tilde{W''}$ et que $\tilde{W'}$ et $\tilde{W''}$ sont irréductibles. En déduire que ϕ induit un isomorphisme de représentations de W' sur $\tilde{W''}$ et de W'' sur $\tilde{W'}$. On pourra utiliser le lemme de Schur.

II

On rappelle que le groupe symétrique $G := \mathcal{S}_5$ a 7 classes de conjugaison $(C_i)_{1 \le i \le 7}$ de représentants $x_i \in C_i$ données par $x_1 = 1$, $x_2 = (1,2)$, $x_3 = (1,2,3)$, $x_4 = (1,2,3,4)$, $x_5 = (1,2,3,4,5)$, $x_6 = (1,2)(3,4)$ et $x_7 = (1,2)(3,4,5)$.

1. Donner le nombre d'éléments c_i de C_i

2. Soit P la représentation de permutation de G sur $\mathbb{C}^5$ correspondant à l'action tautologique de G sur $\{1,2,3,4,5\}$. Soit E la représentation standard de G, i.e. la sous-représentation de G d'espace l'hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ de $\mathbb{C}^5$.

(**a**) Calculer les caractères χ_P et χ_E de P et E. Montrer que la restriction F de E au groupe alterné $\mathcal{A}_5$ est irréductible.

(**b**) Soit $V = \Lambda^2 E$. Montrer que

$$\chi_V(g) = \frac{\chi_E(g)^2 - \chi_E(g^2)}{2}.$$

(**c**) Montrer que V est irréductible.

3. Soit W la représentation du groupe alterné $\mathcal{A}_5$ déduite de V par restriction. Montrer que $W = W' \oplus W''$ pour des représentations irréductibles non isomorphes de $\mathcal{A}_5$.

4. On fait opérer le groupe symétrique $\mathcal{S}_5$ par conjugaison sur l'ensemble C_5 des 5-cycles de $\mathcal{S}_5$. Montrer que le stabilisateur d'un 5-cycle a est le groupe cyclique engendré par a. En déduire que C_5 est réunion disjointe de deux classes de conjugaison sous $\mathcal{A}_5$ C' et C'', représentées respectivement par le cycle $a = (1, 2, 3, 4, 5)$ et le cycle $b = (2, 1, 3, 4, 5) = tat$, où $t = (1, 2)$.

5. Montrer que $\mathcal{A}_5$ a 5 classes de conjugaison représentées par les (1), $(1, 2, 3)$, $(1, 2)(3, 4)$ et les 5-cycles a et b. Donner le cardinal de chaque classe de conjugaison.

6. En utilisant I-3-ii, montrer que pour tout x dans $\mathcal{A}_5$, $\chi_{W'}(txt) = \chi_{W''}(x)$ Montrer que si $\chi_{W'}(a) = \alpha$ et $\chi_{W'}(b) = \beta$ alors $\chi_{W''}(a) = \beta$ et $\chi_{W''}(b) = \alpha$ et calculer le couple (α, β).

7. Compléter la table des caractères de $\mathcal{A}_5$.