Algèbre I — Examen du 25 janvier 2011
*Durée : 3 heures*

*Aucun document n'est autorisé. Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction.*

**Exercice 1.** Soit $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base standard de $\mathbb{C}^4$. Le pfaffien définit une forme quadratique complexe Pf sur $\mathrm{E} = \Lambda^2\mathbb{C}^4$ par la formule, pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$,

$$2\,\mathrm{Pf}(\mathrm{A})\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = \mathrm{A} \wedge \mathrm{A}.$$

On rappelle qu'un élément $p \in \Lambda^2\mathbb{C}^4$ est décomposable ($p = x \wedge y$ avec $x, y \in \mathbb{C}^4$) si et seulement si $p \wedge p = 0$.

1° Calculer la forme bilinéaire symétrique B sur E associée à la forme quadratique Pf dans une base appropriée. Vérifier qu'elle est non dégénérée.

2° Pour $u \in \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$, montrer que $\Lambda^2 u$ est une isométrie de E, et que l'application $f(u) = \Lambda^2 u$ définit un morphisme $f : \mathrm{SL}(4, \mathbb{C}) \to \mathrm{SO(E)}$. Montrer que $f$ induit un morphisme $g : \mathrm{PSL}(4, \mathbb{C}) \to \mathrm{PSO(E)} = \mathrm{PSO}(6, \mathbb{C})$.

Dans la suite, on veut montrer que $g$ est un isomorphisme.

3° Montrer que tout plan non isotrope de E est engendré par deux vecteurs $p$, $q$ de la forme $p = v_1 \wedge v_2$, $q = v_3 \wedge v_4$, tels que les vecteurs $v_i \in \mathbb{C}^4$ forment une base de $\mathbb{C}^4$.

4° En déduire que $g$ est surjectif.

5° Conclure en montrant que $g$ est injectif.

**Exercice 2.**

Soit $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$. On considère le sous-groupe fini $\mathrm{G} \subset \mathrm{SU}(2)$ engendré par les matrices

$$x = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce groupe est appelé groupe binaire diédral.

1° Vérifier que $\mathrm{G} = \{x^k, 0 \leq k \leq 2n-1\} \cup \{x^k y, 0 \leq k \leq 2n-1\}$, et que les générateurs $x$ et $y$ satisfont les relations $x^n = y^2$, $yxy^{-1} = x^{-1}$. Montrer que G a $(n+3)$-classes de conjugaison, que l'on déterminera.

2° Calculer le groupe dérivé D(G) et le quotient G/D(G). En déduire les 4 représentations complexes irréductibles de degré 1 de G et calculer leur caractère.

3° Soit $H = \langle x \rangle$ le sous-groupe engendré par $x$, soit $(S_i, \rho_i)$ $(0 \leq i \leq 2n-1)$ la représentation de degré 1 de H telle que $\rho_i(x) = \omega^i$. Pour quelles valeurs de $i$ la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G S_i$ est-elle irréductible ? calculer son caractère.

4° En déduire la liste des représentations complexes irréductibles et la table des caractères du groupe G.

5° Soit $R = \mathbb{C}^2$ la représentation standard de G donnée par l'inclusion $G \subset SL(2, \mathbb{C})$. Soit $R_i$ les représentations irréductibles de G. On pose $R \otimes R_i = \sum_j n_{ij} R_j$. Calculer les coefficients $n_{ij}$.

**Exercice 3.** *(Quotient de Herbrand)* Soit A un groupe abélien, soit $f, g : A \to A$ des morphismes de groupe, tels que $f \circ g = 0 = g \circ f$. Si $\ker f / \operatorname{im} g$ et $\ker g / \operatorname{im} f$ sont des groupes finis, on note

$$q(A) = \frac{[\ker f : \operatorname{im} g]}{[\ker g : \operatorname{im} f]}.$$

1° Que vaut $q(A)$ si A est fini ? pour tout entier naturel $n > 1$, trouver un exemple tel que $q(A) = n$.

2° Soit $B \subset A$ un sous-groupe tel que $f(B) \subset B$ et $g(B) \subset B$. On notera $f_B$ et $g_B$ les restrictions de $f$ et $g$ à B.

Montrer que $f$ et $g$ induisent des morphismes $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de A/B tels que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 0 = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

3° Une suite exacte hexagonale est une famille de groupes $(G_i)_{i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ et de morphismes $m_i : G_i \to G_{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ tels que pour chaque $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ on ait $\ker m_i = \operatorname{im} m_{i-1}$.

Montrer qu'il existe une suite exacte hexagonale

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \ker f_B/\operatorname{im} g_B & \longrightarrow & \ker f/\operatorname{im} g & & \\
 & \nearrow & & & & \searrow & \\
\ker \tilde{g}/\operatorname{im} \tilde{f} & & & & & & \ker \tilde{f}/\operatorname{im} \tilde{g} \\
 & \nwarrow & & & & \swarrow & \\
 & & \ker g/\operatorname{im} f & \longleftarrow & \ker g_B/\operatorname{im} f_B & &
\end{array}$$

4° Montrer que si 2 des 3 trois quantités $q(A)$, $q(B)$ et $q(A/B)$ sont définies, alors la 3ème est aussi définie, et

$$q(A) = q(B)\, q(A/B).$$

**Exercice supplémentaire.** (*À faire seulement après avoir fini tout le reste*). Que se passe-t-il dans l'exercice 1 si on remplaçe $\mathbb{C}$ par un corps quelconque de caractéristique différente de 2 ?