École Normale Supérieure **Analyse fonctionnelle**

2013-2014

Partiel - 28 mars

Barème approximatif par exercice : 3 – 4 – 13. Documents et matériel électronique interdits. La notation prendra en compte la qualité de la rédaction. Il est possible d'admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1. Parmi ces distributions sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont tempérées ? (a) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|k|}\delta_k^{(k)}$; (b) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^k\delta_k$; (c) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^6\delta_k'$.

Exercice 2. On note $S = \{(m,n) \in \mathbb{N}, m \geq 1, n \geq 1\}$. Soit ℓ^1 l'ensemble des fonctions $y : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (autrement dit, l'ensemble des suites à deux indices $(y(m,n))_{m\geq 1,n\geq 1}$) telles que $\sum_{m\geq 1,n\geq 1} |y(m,n)| < +\infty$, muni de la norme $\|y\|_1 = \sum_{m\geq 1,n\geq 1} |y(m,n)|$.

Le dual topologique de ℓ^1 est ℓ^∞, espace des fonctions $y : S \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\sup_{m\geq 1,n\geq 1} |y(m,n)| < +\infty$, muni de la norme $\|y\|_\infty = \sup_{m\geq 1,n\geq 1} |y(m,n)|$.

L'espace ℓ^1 est le dual topologique de c_0, espace des fonctions $y : S \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{m+n\longrightarrow +\infty} |y(m,n)| = 0$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit M le sous-espace de ℓ^1 formé des suites $(y(m,n))_{m\geq 1,n\geq 1})$ telles que

$$y(m,1) = m\sum_{n\geq 2} y(m,n)$$

pour tout $m \geq 1$.

1. Montrer que M est fermé pour la topologie forte et pour la topologie faible de ℓ^1.

2. Montrer que M est dense pour la topologie faible-$*$ de ℓ^1.

Problème.

On rappelle que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des distributions à support compact sur $\mathbb{R}^d$, et que, pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est la fonction $\xi \mapsto (2\pi)^{-d/2}\langle T, e^{-i\xi\cdot}\rangle$, qui est à croissance polynômiale : il existe $C_0 > 0$ et un entier M tel que $|T(\xi)| \leq C_0(1+|\xi|)^M$ pour tout ξ. On notera $\widehat{S}$ la transformée de Fourier d'une distribution tempérée S.

I. 1. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ et $C_0 > 0$ tels que
$$|\phi(\xi)| \leq C_0(1+|\xi|)^M \tag{1}$$
pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction

$$\phi * \psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\eta)\psi(\xi-\eta)d\eta$$

est bien définie et qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|\phi*\psi(\xi)| \leq C(\sup_{|\eta-\xi|<\varepsilon|\xi|} |\phi(\eta)| \, \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \int_{|\eta|\geq\varepsilon|\xi|} |\psi(\eta)|(1+\epsilon^{-1})^M(1+|\eta|)^M d\eta)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que $\phi * \psi$ vérifie une estimée du même type que (1).

2. Montrer l'identité $\widehat{\phi * \psi} = (2\pi)^{d/2}\widehat{\psi}\widehat{\phi}$ en précisant dans quel espace elle a lieu.

3. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Notons $S = \chi T$. Exprimer $\widehat{S}$ en fonction de $\widehat{\chi}$ et $\widehat{T}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que, on ait l'inégalité

$$|\widehat{S}(\xi)| \leq C(\sup_{|\eta-\xi|<\varepsilon|\xi|} |\widehat{T}(\eta)| \, \|\widehat{\chi}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \int_{|\eta|\geq\varepsilon|\xi|} |\widehat{\chi}(\eta)|(1+\epsilon^{-1})^M(1+|\eta|)^M d\eta)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\tilde{C}$ tel que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^N|\widehat{S}(\xi)| \leq \tilde{C}((1-\varepsilon)^{-N} & \sup_{|\eta-\xi|<\varepsilon|\xi|} |\widehat{T}(\eta)| \, (1+|\eta|)^N \|\widehat{\chi}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ & + (1+\varepsilon^{-1})^{N+M} \int |\widehat{\chi}(\eta)|(1+|\eta|)^{M+N} d\eta) \end{aligned} \tag{2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$.

II. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle *support singulier* de T, noté $\operatorname{sing\,supp} T$, le fermé de Ω

$$\operatorname{sing\,supp} T = \cap_{F\in\mathcal{G}(T)} F$$

où $F \in \mathcal{G}(T)$ si et seulement si F est fermé et la restriction $T_{|\Omega\setminus F}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\Omega \setminus F$. Autrement dit, $x \notin \operatorname{sing\,supp} T$ si et seulement si il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ contenant x, et tel que $T_{|\omega}$ est une fonction de classe C^∞ sur ω.

On peut affiner la notion de support singulier en introduisant la notion de front d'onde, noté $WF(T)$, que l'on définit et étudie dans ce problème. Notons $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. L'ensemble $WF(T)$ est un fermé de $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$, défini ainsi :

$(x,u) \notin WF(T) \Leftrightarrow$ il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega), \chi(x) \neq 0$, et un voisinage V de u dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, tels que : pour tout entier N, il existe $C_N > 0$ tel que

$$|\widehat{\chi T}(\lambda v)| \leq C_N (1+|\lambda|)^{-N}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $v \in V$.

1. Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ la fonction de Heaviside sur $\mathbb{R}$. Quel est son support ? quel est son support singulier ?

2. Vérifier brièvement que $WF(T)$ est un fermé de $\Omega \times \mathbb{S}^{d-1}$. Montrer, à l'aide de l'inégalité (2), que $WF(\phi T) \subset WF(T)$ si $\phi \in C^\infty(\Omega)$.

3. Soit $x \in \Omega$. Montrer que

$$x \in \operatorname{sing\,supp} T \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{S}^{d-1}, (x,u) \in WF(T).$$

4. Soit $x \mapsto Ax = Mx + b$ une transformation affine inversible ($M \in GL_d(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$). Montrer que

$$(x,u) \in WF(T) \Leftrightarrow \left(A^{-1}x, \frac{{}^tMu}{\|{}^tMu\|} \right) \in WF(T \circ A).$$

5. Prenons $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $T = \mathbb{1}_{x_1>0}$ (on note (x_1,x_2) les coordonnées dans la base canonique). Quel est le support singulier de T ? Montrer que $WF(T) = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, x_1 = 0, u_2 = 0\}$.

6. Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$, décrire $WF(\delta_0)$.

Dans les questions suivantes, Δ désigne le laplacien sur $\mathbb{R}^d$, et on veut montrer que $WF(T) = WF(\Delta T)$.

7 Montrer que $WF(\Delta T) \subset WF(T)$ (indication : utiliser la formule $\phi \Delta T = \Delta(\phi T) - \Delta\phi T - 2\nabla\phi \cdot \nabla T$).

Pour l'inclusion réciproque, la difficulté est qu'on n'a pas de formule explicite permettant d'inverser Δ et d'exprimer $\widehat{\phi T}$ en fonction de ΔT. Dans la question 8, on cherche une expression approchée de l'inverse et dans la 9, on s'en sert pour relier $\widehat{\phi T}$ à ΔT.

8. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On fixe $v_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\lambda \neq 0$. On cherche une solution φ à l'équation

$$-\Delta\varphi = \phi(x)e^{-i\lambda v_0 \cdot x}$$

sous la forme $\varphi(x) = \lambda^{-2} w(x) e^{-i\lambda v_0 \cdot x}$. Montrer que w doit vérifier une équation du type

$$w - R_\lambda w = \phi$$

où $R_\lambda = \lambda^{-1}P_1 + \lambda^{-2}P_2$, où P_1 et P_2 sont des opérateurs différentiels que l'on explicitera.

Si l'on pose maintenant $w_N = \sum_{k<N} R_\lambda^N \phi$ (où N est un entier quelconque), que vaut $-\Delta\left(w_N(x)e^{-i\lambda v_0 \cdot x}\right)$?

9. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $(x_0, u_0) \notin WF(\Delta T)$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\phi(x_0) = 1$. Soit w_N la fonction construite à la question précédente. Montrer qu'on a

$$\lambda^{-2}\langle w_N \Delta T, e^{-i\lambda v_0 \cdot}\rangle = \widehat{\phi T}(\lambda v_0) - \langle T, e^{-i\lambda v_0 \cdot} R_\lambda^N \phi\rangle.$$

Conclure à l'aide du II.2 que $(x_0, u_0) \notin WF(T)$.

10. Plus généralement, si P est un opérateur différentiel à coefficients constants, voyez-vous sous quelles hypothèses sur P on peut étendre la méthode précédente, et montrer que $WF(PT) = WF(T)$ pour toute distribution T ?